Lezione XXI

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

✱ Tipi di punti sulle quadriche

Ricordiamo l'espressione del piano tangente ad una quadrica reale $\boxed{Q : X^T A X = 0}$ in un suo punto semplice:

$F(X) = 0$

$A \in M_4(\mathbb{R})$

$A^T = A$

A simmetrica

$a_{ij} = a_{ji}$

$$(\ast) \quad \boxed{\tau_P : \underline{P}^T A X = 0}$$

vettori

$\parallel$

$X^T A \underline{P} = 0$

$\underline{P} : [p_0, p_1, p_2, p_3] \in Q : \underline{P}^T A \underline{P} = 0$

$= 0$

$1 \times 4 \quad 4 \times 4 \quad 4 \times 1$

segue subito dalla formula generale

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(\underline{P})x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(\underline{P})x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\underline{P})x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}(\underline{P})x_3 = 0$$

$$F(x_0 - x_3) = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} x_i x_j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{01}x_0x_1 + a_{10}x_1x_0 = \\ & = a_{01}x_0x_1 + a_{01}x_0x_1 \\ & = 2a_{01}x_0x_1 \quad \text{ecc.} \end{aligned} \right\}$$

$$= a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{03}x_0x_3 + \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 2a_{00}x_0 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(\underline{P}) = \underbrace{2a_{00}p_0 + 2a_{01}p_1 + 2a_{02}p_2 + 2a_{03}p_3}_{\diamond}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(\underline{P})x_0 = (\diamond)\cdot x_0$$

ecc.

È istruttivo effettuare la seguente verifica "sincopata" tramite la convenzione di Einstein

[si somma sugli indici ripetuti]

$$F(x_0 - x_3) = a_{ij} x_i x_j \qquad \Big(\sum_{i,j} \text{ sottintesa!} \Big)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = a_{ij} [\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i] \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$$

Kronecker

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(P) = a_{ij} [\delta_{ik} P_j + \delta_{jk} P_i]$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(P) x_k = a_{ij} \delta_{ik} P_j x_k + a_{ij} \delta_{jk} P_i x_k$$

$$\Big(\sum_k \text{ sottintesa} \Big) \qquad = a_{ij} P_j x_i + a_{ij} P_i x_j$$

$$⚠ \qquad = 2 \, a_{ij} x_i P_j$$

$\frac{\partial F}{\partial x_k}(P) x_k = 0$ ottiene $\sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} x_i P_j = 0$, ossia la (✱)

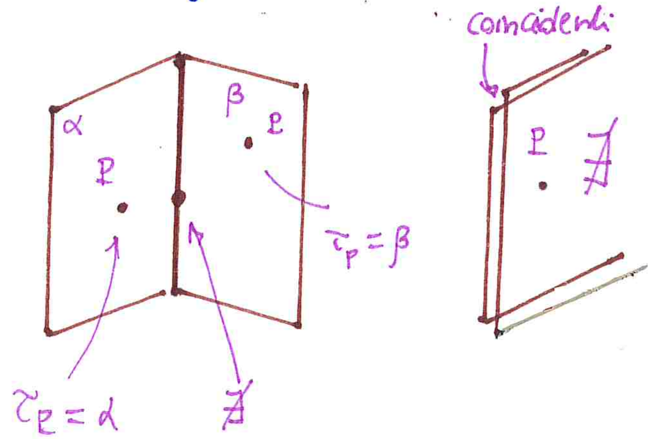
Se Q è doppiamente riducibile (un piano contato due volte)

non ha punti semplici e nessun punto ammette piano tangente.

Se Q è semplicemente riducibile, $Q = \alpha \cup \beta$

piani

i punti della retta intersezione $\alpha \cap \beta$ non ammettono piano tangente, per i rimanenti è o α o β



Se poi Q è irriducibile, tutti i punti, eccettuato il vertice nel caso del cono, sono semplici e quindi ammettono piano tangente.

Poniamoci in quest'ultimo caso

Q irriducibile, $P \in Q$ semplice

Consideriamo la conica $\mathcal{C} = Q \cap \tau_P$

Data una retta $r \subset \tau_P$ $r \not\subset Q$ passante per P, si ha $r \cap Q = P$, contato due volte.

Ma $r \cap \mathcal{C} = r \cap (Q \cap \tau_P) = (r \cap Q) \cap \tau_P = P$

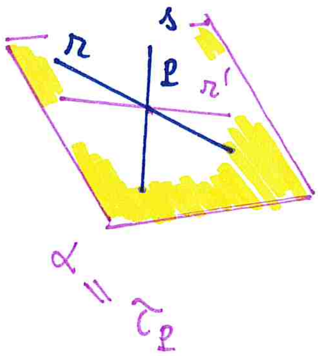
contato due volte: P allora è un punto doppio di $\mathcal{C}$, e pertanto $\mathcal{C} = r \cup s$,

r, s rette incidenti in P

Viceversa, se α è un **piano** per $P \in Q$ semplice tale che $\mathcal{C} = \alpha \cap Q$ si **spezza** in due rette per P, esso è il **piano tangente**.

Infatti, se $Q \cap \alpha = \mathcal{C} = r \cup s$, $P \in r \cap s$, presa una retta $r' \ni P$, $r' \subset \alpha$, si presentano le situazioni seguenti.

Se $r' = r$ o $r' = s$, $r \subset Q$. Se invece $r' \neq r$, $r' \neq s$, si trova



$$r' \cap Q = (r' \cap Q) \cap \alpha = r' \cap (Q \cap \alpha) = r' \cap (r \cup s) = (\overbrace{r' \cap r}^{P}) \cup (\overbrace{r' \cap s}^{P}) = P,$$

contato <u>due volte</u>

Pertanto una retta $r' \subset \alpha$, passante per P, o è contenuta nella quadrica, o ha con questa un contatto almeno bipunto, pertanto

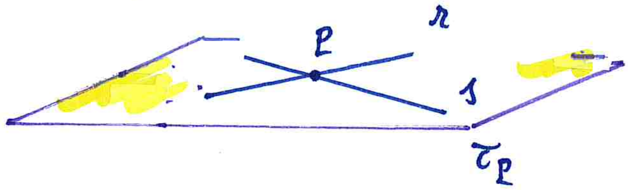
★ α è il piano tangente τ_P

in virtù della caratterizzazione analitica di quest'ultimo.

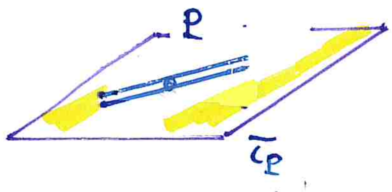
★ **Definizioni** $\quad Q$ quadrica irriducibile, $P \in Q$, P semplice

τ_P : piano tangente a Q in P

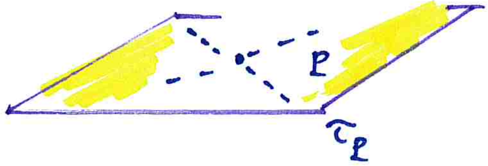
- P è detto iperbolico se $\tau_P \cap Q = r \cup s$, r, s reali e distinte

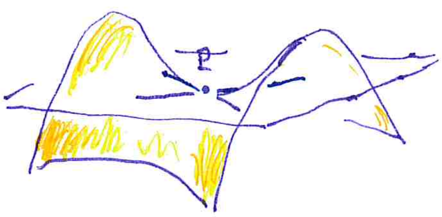


- P è detto parabolico se $\tau_P \cap Q = r$ contata due volte

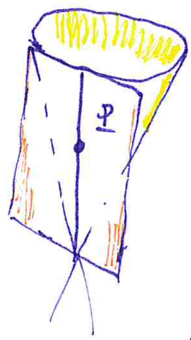


- P è detto ellittico se $\tau_P \cap Q = r \cup \bar{r}$, $r \cap \bar{r} = P$



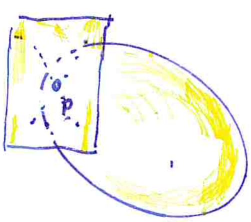


P iperbolico



P parabolico

vedi oltre

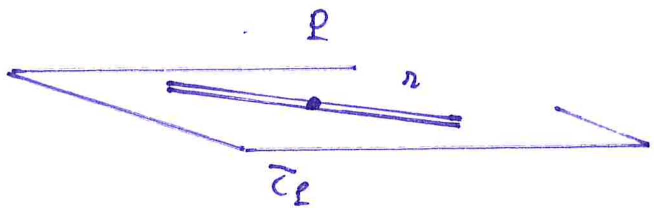


P ellittico

Approccio sintetico

$\boxed{\text{Sia } Q \text{ una quadrica irriducibile. } Q \text{ ha un punto parabolico} \iff Q \text{ è un cono}}$

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Sia $P \in Q$, P semplice e parabolico.

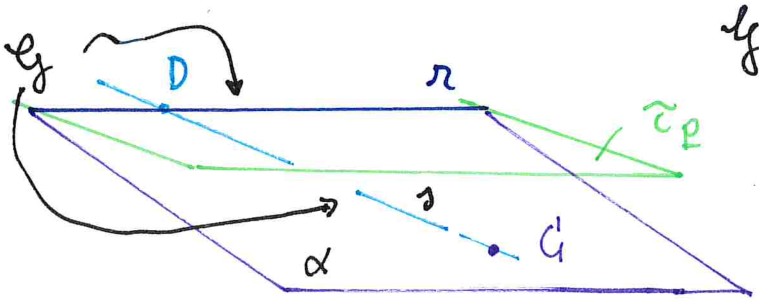


Facciamo vedere che Q possiede un unico punto doppio: ciò basterà per concludere.

$\tau_P \cap Q = r$ (contata due volte). Sia $X \in r$;

se X è semplice, è $\tau_X = \tau_P$ (τ_X interseca Q lungo una conica riducibile). Pertanto $X \in r$, semplice, è pure parabolico. Sia ora $C \in Q$, $C \notin \tau_P$, α il piano per r e C, e

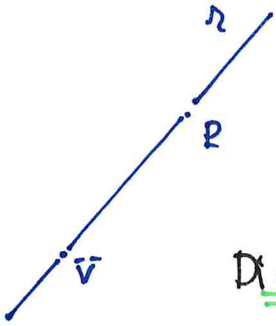
$\mathcal{C} := \alpha \cap Q$



Tale conica contiene r e C, pertanto si spezza in r e in un'altra retta $s \ni C$: $\mathcal{C} = r \cup s$

Sia $D = r \cap s$. Se D fosse semplice, ammetterebbe due piani tangenti, τ_P e α ($\alpha \neq \tau_P$) e ciò è assurdo. Dunque D è doppio ed è unico poiché, se ce ne fosse un altro, Q sarebbe riducibile, contro l'ipotesi. Quindi Q è un cono.

($\Leftarrow$) Viceversa, sia Q un cono di vertice $\bar{V}$.



Sia r una generatrice di Q; tutti i punti di r, eccetto $\bar{V}$, sono semplici, sia P uno di questi.

Dico che P è parabolico. Infatti,

$$\tau_P \cap Q = \underset{\underset{Q}{\cap}}{r} \cup \underset{\underset{Q}{\cap}}{\overset{\text{retta}}{s}}$$

(per le proprietà di τ_P)

Ma, per una proprietà dei coni, anche s deve essere una generatrice, sicché $s = r$ e l'asserto è provato.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Osserviamo il corollario seguente:

Se Q è irriducibile e ha un punto parabolico, tutti i punti semplici di Q sono parabolici

Q è infatti un cono, il cui unico punto doppio è il vertice $\bar{V}$

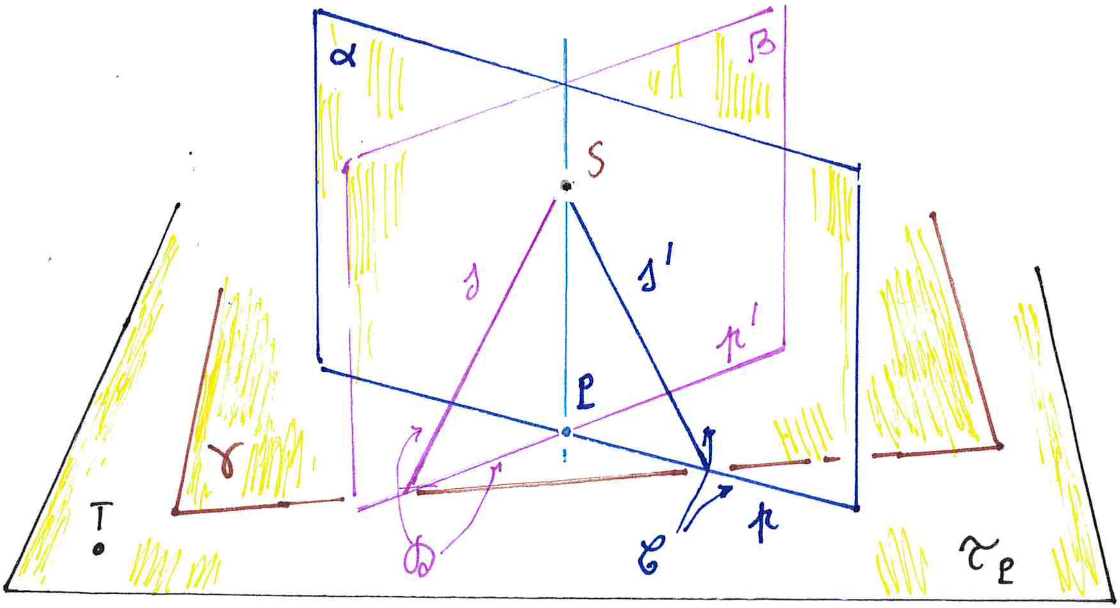
11 Teorema Sia Q una quadrica irriducibile, $P \in Q$ iperbolico. Allora tutti i punti di Q sono iperbolici

Prima di dimostrare il teorema osserviamo che, in base al caso e al teorema precedente, abbiamo che se

Q è irriducibile e ammette un punto ellittico, tutti i suoi punti sono ellittici.

Pertanto, data Q irriducibile, il carattere di un suo punto semplice (iperbolico, ellittico, parabolico) è comune ai restanti punti semplici (nei primi due casi tutti i punti di Q sono semplici, nel terzo vi è un solo punto doppio).

Dimostrazione



Ci si riferisca alla figura.

Sia $P \in Q$ un punto iperbolico: $\tau_P \cap Q = p \cup p'$, reali e distinte. Sia $S \in Q$, $S \notin \tau_P$

Sia α il piano per r contenente ξ e

$$\mathcal{C} = Q \cap \alpha = r \cup s' \quad (s' \ni \xi)$$

Analogamente, consideriamo il piano β contenente r' e s, e $\mathcal{D} = Q \cap \beta = r' \cup s \quad (s \ni \xi)$

Le rette s e s' sono reali e non possono coincidere: in caso contrario, $s = s' = \xi P$ sarebbe contenuta interamente in Q, avendo tre intersezioni con Q (P contato due volte e ξ), e dovrebbe perciò far parte del piano tangente τ_P, sicché $\xi \in \tau_P$, contro l'ipotesi.

Sia allora γ il piano individuato da s e s'; si ha $\gamma \cap Q = s \cup s' \Rightarrow \gamma = \tau_\xi$, e pertanto ξ è un punto iperbolico.

Se infine $T \in \tau_P$, si può ragionare come sopra rispetto ad un punto iperbolico di Q non contenuto in τ_P.

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$