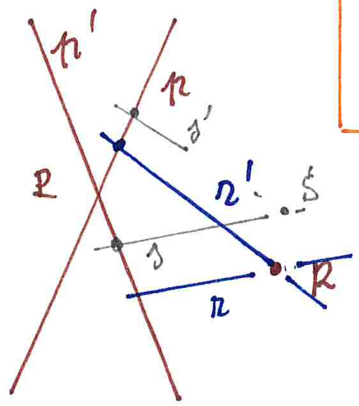
Lezione XXII

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

1 Regoli di una quadrica a punti iperbolici

Sia Q una quadrica irriducibile a punti iperbolici.
Da ogni $P \in Q$ escono due rette reali e distinte contenute in Q : $Q \cap \tau_P = p \cup p'$.
Q è una quadrica doppiamente rigata : variando $R \in Q$ si ottengono due schiere di rette (regoli di Q): Le rette stesse sono chiamate generatrici o regoli esse stesse, con abuso di linguaggio



$\mathcal{R}' : \{ r', s' \dots$ intersecanti p in punti distinti e $\subset Q \}$

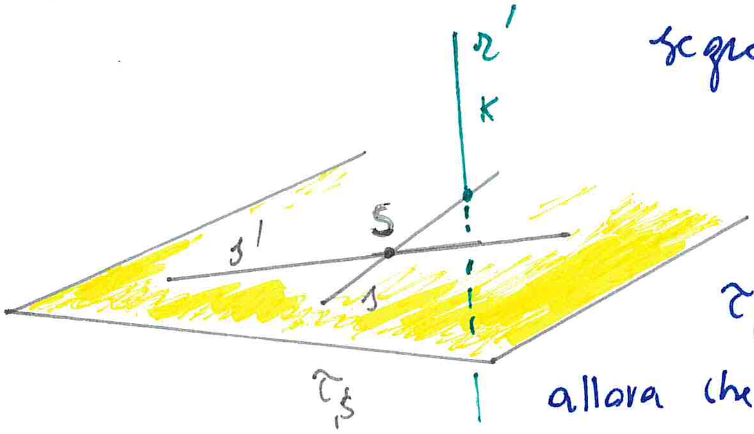
$\mathcal{R} : \{ r, s \dots$ intersecanti p' in punti distinti e $\subset Q \}$

Le rette di $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}'$) sono a due a due sghembe : se non lo fossero, risulterebbero complanari, sicché il piano da queste individuato, che conterrebbe p, farebbe parte della quadrica, contro l'ipotesi di irriducibilità. Stesso discorso per $\mathcal{R}'$.

Inoltre :

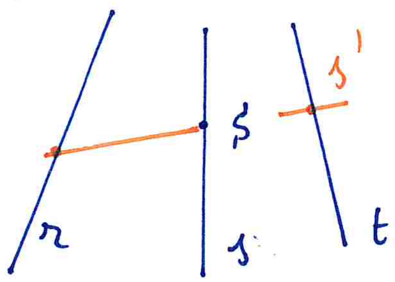
Rette appartenenti a regoli diversi sono incidenti

Ciò è ovvio per rette r, r', che individuano piani tangenti. Si consideri poi la situazione seguente (v. figura)



$r' \cap \tau_\xi = K \in Q$ ($r' \subset Q$). Da $\tau_\xi \cap Q = s \cup s'$ segue allora che o $K \in s$ oppure $K \in s'$.

Ma r' non può intersecare s' poiché appartiene allo stesso regolo di quest'ultima, quindi interseca s : $K \in s$. □

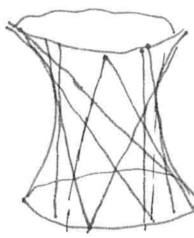


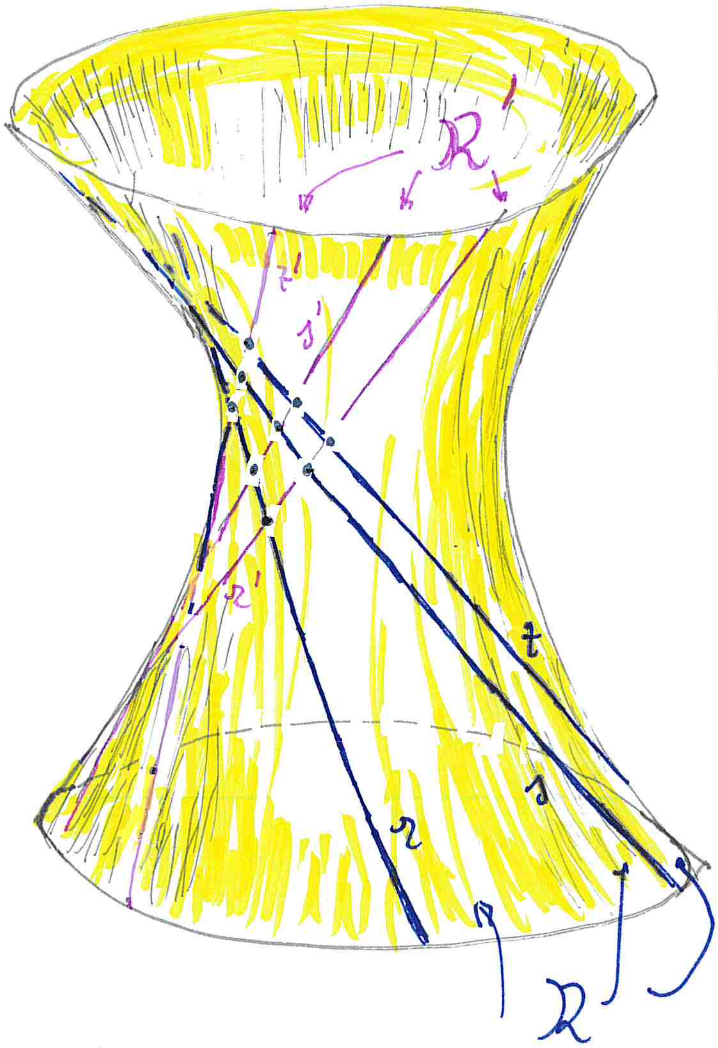
Siano $r, s, t \in \mathcal{R}$: essendo mutuamente sghembe, $\forall \xi \in s$, $\exists!$ retta s' che si appoggia alle altre due. Necessariamente s e s' individuano τ_ξ, e $s' \in \mathcal{R}'$.

Inversamente, ogni retta di $\mathcal{R}'$ interseca r, s, t.

Variando ξ su s, viene descritto tutto il regolo $\mathcal{R}'$.

In definitiva, date nello spazio proiettivo tre rette reali a due a due sghembe, esiste ed è unica la quadrica a punti iperbolici che le contiene. Le rette in questione appartengono allo stesso regolo.





le rette di uno stesso regolo sono mutuamente sghembe e intersecano tutte quelle dell'altro regolo

Lezione XXII

OMETTERE

V2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro Spera, UCSC Brescia

tratto da

In questa lezione e nelle successive presentiamo alcuni complementi di geometria proiettiva. Non procederemo in modo strettamente assiomatico, e faremo libero uso di nozioni apprese in altri corsi (considerazioni metriche, coordinate omogenee, metodi matriciali). Lo scopo principale (ma non l'unico) è arrivare a descrivere il modello di Beltrami-Klein del piano iperbolico, nonché la metrica proiettiva generale di Klein. Importanti digressioni riguardano il tracciamento di coniche (sulla base dei teoremi di Steiner-Chasles e di Pascal) e il disegno prospettico ("omologia di Piero della Francesca")

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

M. Spera, E. Rizzo

★ Digressione

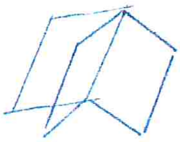
Lezione XXII segue

★ Assiomi della geometria proiettiva (secondo Enriques)

Elementi fondamentali: punti, rette, piani

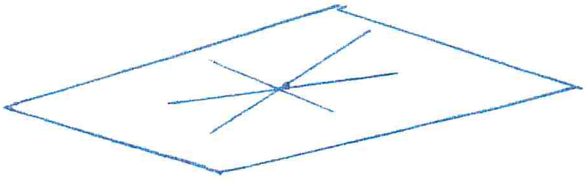
nello spazio, completato dal piano improprio, luogo delle direzioni delle sue rette

Forme geometriche fondamentali: (di prima, seconda e terza specie)

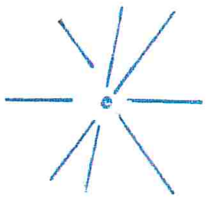
Specie		forme geometriche		
I	1.	retta punteggiata		(retta come insieme dei suoi pti)
I	2.	fascio di piani		(piani per una retta)
II	3.	piano punteggiato		(piano come luogo dei suoi pti)
II	4.	piano rigato		(piano come insieme delle sue rette)

In un sistema piano (pti e rette di un dato piano)

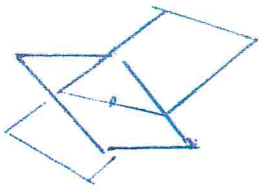
I 5. fascio di rette (rette del piano per un singolo pto)



II 6. stella di rette (rette – nello spazio – per un singolo punto)



II 7. stella di piani (piani per un singolo punto)



III 8. spazio punteggiato (lo spazio come insieme dei suoi punti)

III 9. spazio di piani (lo spazio come totalità dei suoi piani)

[10. spazio rigato — spazio come totalità delle sue rette]

$\mapsto$ "Quadrica di Klein" Q

rette ($\mathbb{P}^1$) nello spazio ($\mathbb{P}^3$)

$\mapsto$ Q in $\mathbb{P}^5$ (complesso)

Si pensano aggiunti gli elementi impropri, dopodiché non si opera nessuna distinzione tra elementi propri e impropri

Due elementi fondamentali si appartengono quando uno di essi è contenuto nell'altro

Es: Un pto e una retta si appartengono

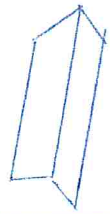
ecc. si utilizzano poi le locuzioni usuali

☆ Assiomi di incidenza (grafici) ⟶ si collegano al senso della vista

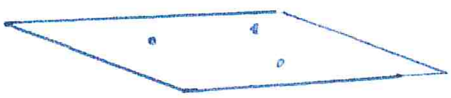
["gli elementi propri e impropri possono e debbono essere considerati indifferentemente"]

a) Due punti determinano una (e una sola) retta cui appartengono

a') Due piani determinano una (e una sola) retta cui appartengono

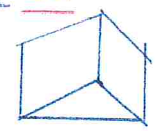


b) Tre punti non appartenenti ad una retta (+) individuano uno e un solo piano, cui appartengono



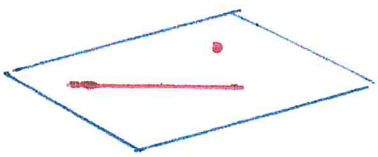
(+) non allineati

b') Tre piani non appartenenti ad una retta (+) determinano uno e un sol punto che ad essi appartiene (cui appartengono)

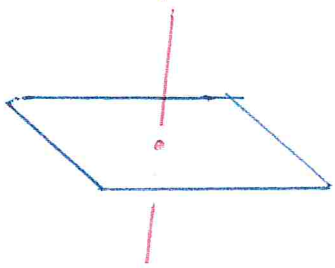


(+) non formanti fascio

c) Un punto e una retta che non si appartengono determinano uno e un solo piano, cui appartengono



c') Un piano e una retta, che non si appartengono, determinano uno e un sol punto che ad essi appartiene (cui appartengono)



Gli assiomi sono mutuamente duali a) e a'), b) e b'), c) e c')

☆☆☆ Dualità (Gergonne) nello spazio

scambi

punto ⟷ piano
retta ⟷ retta

nel piano

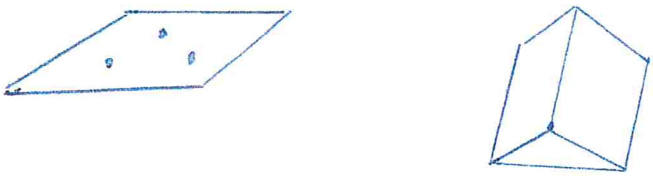
punto ⟷ retta

segue dalla dualità spaziale

In modo sintetico, possiamo asserire che

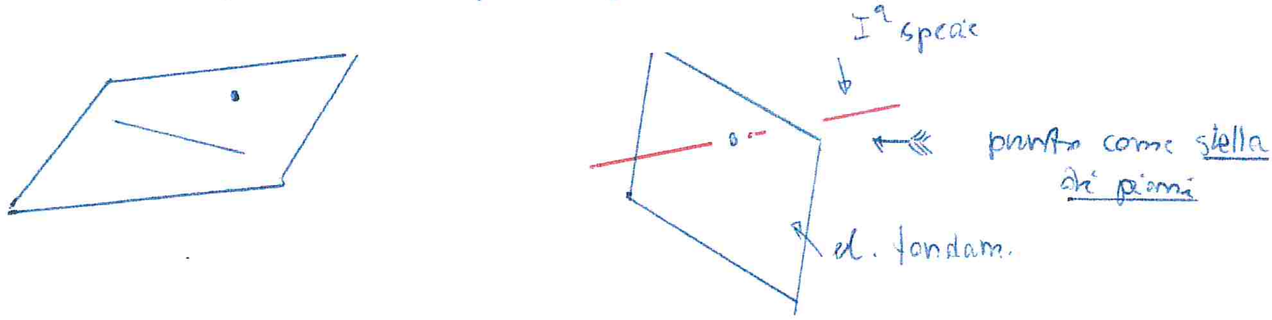
(I) In una forma di III^a specie, due elementi fondamentali determinano una forma di I^a specie, cui appartengono

(II) In una forma di III^a specie, tre elementi fondamentali non appartenenti ad una forma di prima specie determinano una forma di II^a specie, cui appartengono



il punto è visto come stella di piani per quel punto centro della stella

(III) In una forma di III^a specie, un elemento fondamentale e una forma di I^a specie che non si appartengono determinano una forma di II^a specie, cui appartengono.



I, II, III : primo gruppo di postulati della geometria proiettiva (di incidenza)

★ Operazioni della geometria proiettiva

proiezioni & **sezioni**

proiettare una figura ...

$\mathcal{F} = (B, C \ldots \; b, c \ldots)$
punti rette

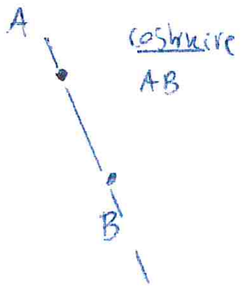
proiezione da...

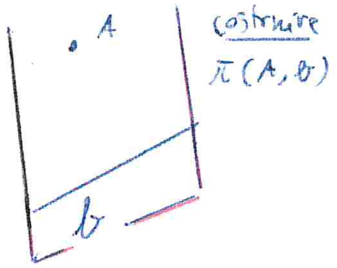
segare una figura ...

$\mathcal{F} = (b, c, \ldots \beta, \gamma \ldots)$
rette piani

sezione con

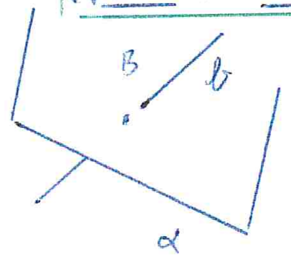
• ... da un pto A (centro di proiezione – esterno alla figura)



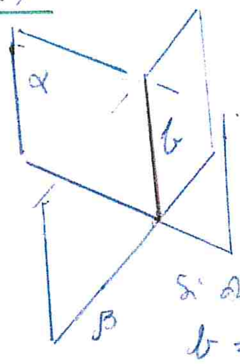


In generale, costruire le rette AB, con $B \in \mathcal{F}$

• ... con un piano α, non appartenente ad un elemento della figura (piano di sezione)



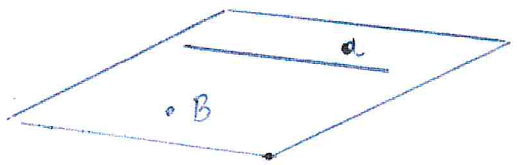
si determina $\alpha \cap \beta$



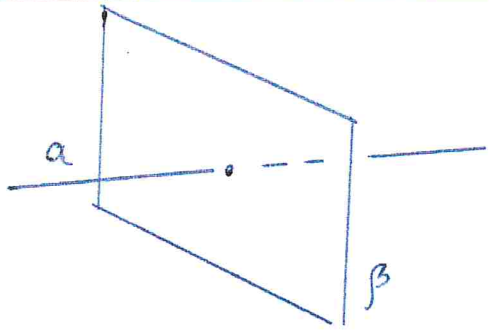
si determina $b = \alpha \cap \beta$

• ... da una retta a (asse di proiezione)

determinare i vari piani $\pi(B, a)$ $B \in \mathcal{F}$; nuova figura: $A(B, C .. b, c ..)$



• ... con una retta a (non appartenente ad un elemento della figura)



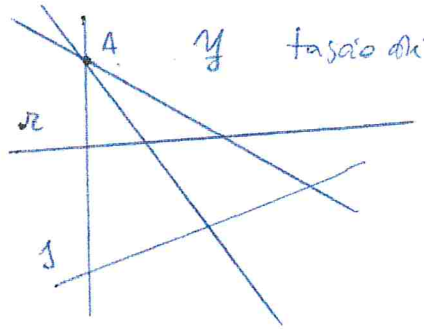
★ proiettare una figura da A (esterno ad essa) su un piano α: si proietta da A e la figura ottenuta si sega con α

Forme della stessa specie si dicono prospettive se sono l'una proiezione dell'altra o, se omonime, ambedue proiezioni / sezioni di una medesima forma.

Due forme della stessa specie si dicono riferite tramite proiezioni e sezioni se si ottengono l'una dall'altra attraverso un numero finito di prospettività.

Diamo alcuni <u>esempi</u>

1. <u>Nel piano</u>:



$\mathcal{Y}$ fascio di rette di centro A
r, s punteggiate

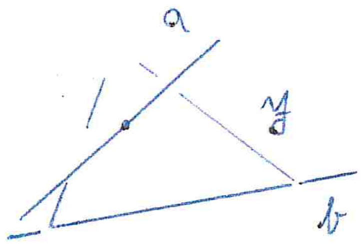
$\mathcal{Y}$ e r, $\mathcal{Y}$ e s

così come r e s

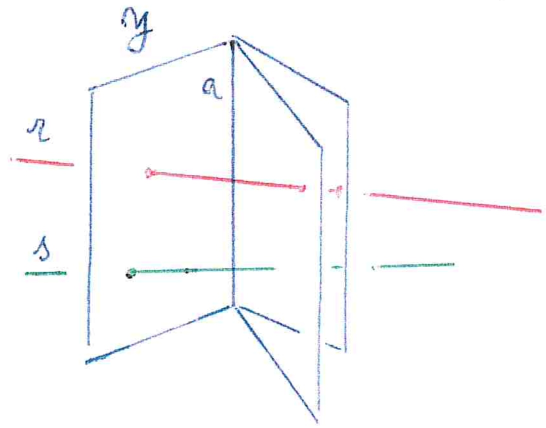
sono forme (di prima specie) <u>prospettive</u>

$\mathcal{Y}$ si ottiene proiettando r (o s) da A, r (s) si ottiene segando $\mathcal{Y}$ con r stessa... ; r ed s sono sezioni di $\mathcal{Y}$

2.



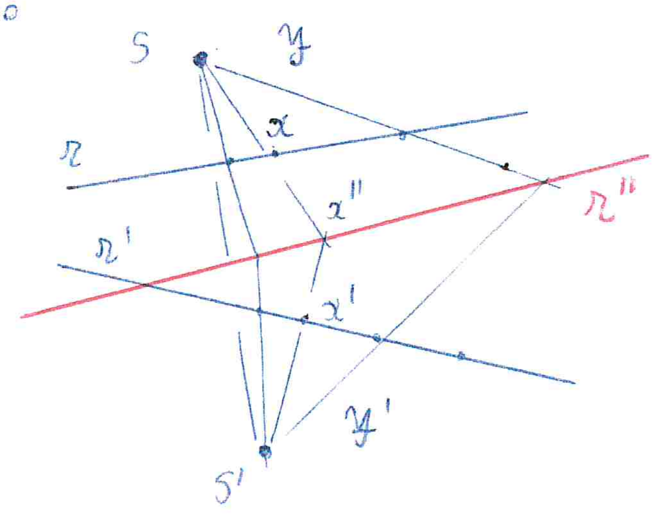
Date due rette <u>sghembe</u> a, b, si consideri ad esempio il fascio di piani di <u>asse b</u>: esso è <u>prospettivo</u> alla <u>punteggiata</u> a



r, s, a mutuamente sghembe.
$\mathcal{Y}$ ed r, $\mathcal{Y}$ e s, e così r ed s sono <u>forme di</u> prima specie <u>prospettive</u>

3. <u>Nel piano</u>

* <u>importante</u> <u>per il seguito</u>



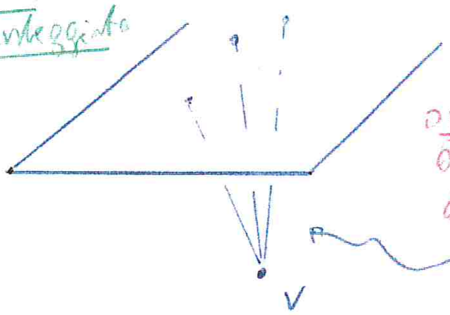
r e r' <u>riferite</u> <u>proiettivamente</u>
(legate da un'<u>omografia</u>, o <u>collineazione</u>, o <u>proiettività</u>, v. oltre)

infatti risultano <u>prospettive</u> ad una medesima retta r''

$x \leftrightarrow x'' \leftrightarrow x'$

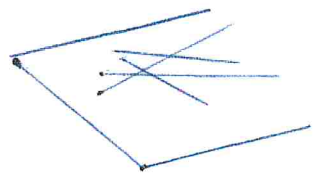
Deduciamo la dualità piana dalla dualità nello spazio
pto ↔ retta

punto ↔ piano
retta ↔ retta



proiezione da V: stella di rette

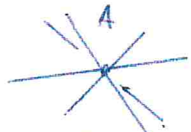
dualità spaziale
rette per un pto → rette su un piano



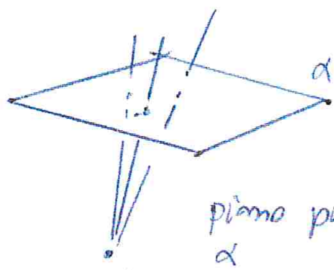
piano punteggiato $\xrightarrow{\text{proiezione}}$ $\boxed{\text{stella di rette}}$ $\xrightarrow{\text{dualità spaziale}}$ piano rigato

viceversa

$\xrightarrow{\text{dualità}}$



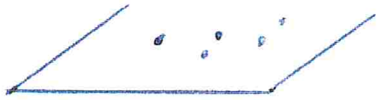
$\xrightarrow{\text{sezione}}$



piano rigato $\xrightarrow{\text{dualità}}$ $\boxed{\text{stella di rette}}$ $\xrightarrow{\text{sezione}}$ piano punteggiato

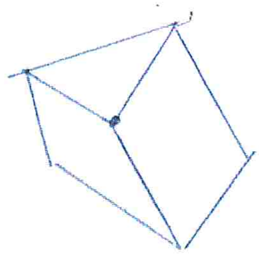
★ La dualità piana pti ↔ rette è stata ottenuta invocando una forma di 2ª specie (spaziale), la stella di rette

Ancora:



piano punteggiato

dualità →



stella di piani

sezione →

piano rigato

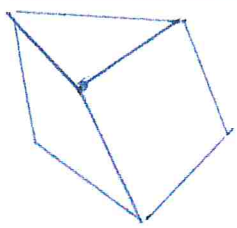
piano punteggiato $\xrightarrow{\text{dualità}}$ $\boxed{\text{stella di piani}}$ $\xrightarrow{\text{sezione}}$ piano rigato

viceversa

piano rigato

proiezione →

stella di piani



dualità →

piano punteggiato

piano rigato $\xrightarrow{\text{proiezione}}$ $\boxed{\text{stella di piani}}$ $\xrightarrow{\text{dualità}}$ piano punteggiato

Sussiste la

★ **Legge di dualità nello spazio** ("metateorema") (Gergonne)

agli assiomi grafici andrebbero aggiunti assioma d'ordine, movimento, continuità non discussi qui

Ad ogni teorema dedotto da I — V corrisponde un teorema correlativo (duale, o reciproco) ottenuto scambiando le parole punto e piano e lasciando inalterata la parola retta, e le operazioni di proiezione e sezione

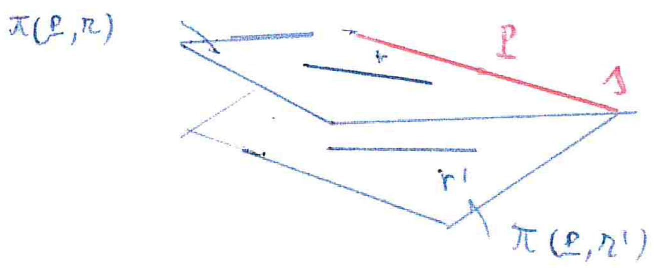
[la dualità non riguarda proprietà metriche]

Esempio

Siano r, r' sghembe, $P \notin r$, $P \notin r'$.
Esiste una retta (ed una sola) per P che si appoggia alle altre due

Siano r e r' sghembe, $\alpha \not\supset r$, $\alpha \not\supset r'$.
Esiste una (e una sola) retta $s \subset \alpha$ incidente le altre due

Dim Proiettiamo le due rette da P, ottenendo piani $\pi(P,r)$ e $\pi'(P,r')$ che si intersecano nella retta richiesta s: r e s sono complanari e così r' ed s, e sono pertanto incidenti



Dim La retta cercata è $s = RR'$
$R = \alpha \cap r$ $R' = \alpha \cap r'$

abuso di notazione $\{R\} = \alpha \cap r$ ecc.