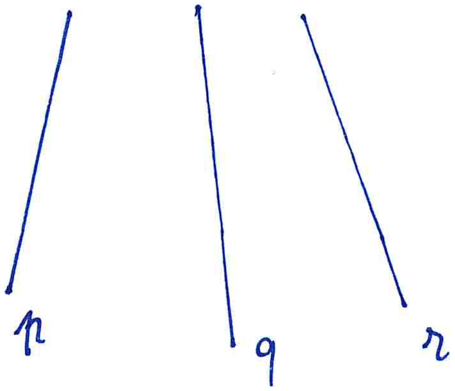
Lezione XXIII

APPROFONDIMENTI
DI
GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

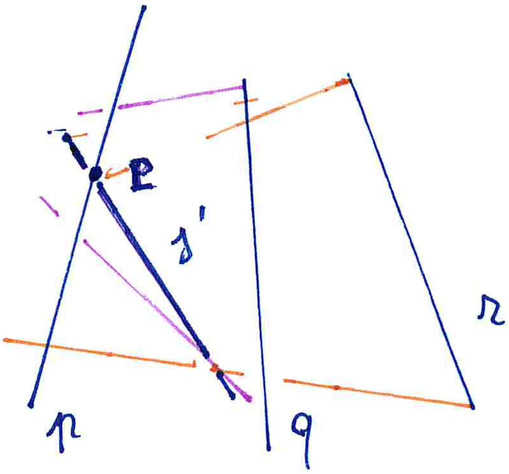
§4 Generazione proiettiva delle quadriche
(Steiner, 1832)



p, q, r mutuamente sghembe: direttrici di una quadrica rigata.

Per costruire le generatrici si può procedere in due modi duali

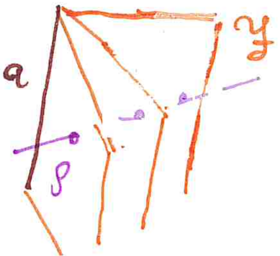
① Sia $P \in p$ variabile. Si considerino i piani $\pi(q, P)$, $\pi(r, P)$ dei fasci di piani $\mathcal{F}_q$ e $\mathcal{F}_r$, di rispettivi assi q ed r e se ne consideri la retta intersezione



$$s' = \pi(q, P) \cap \pi(r, P) \quad (\ni P)$$

Al variare di $P \in p$ viene descritto un reggolo (sistema di generatrici) della quadrica, $\mathcal{R}'$, di cui non fanno parte p, q, r (esse appartengono a $\mathcal{R}$).

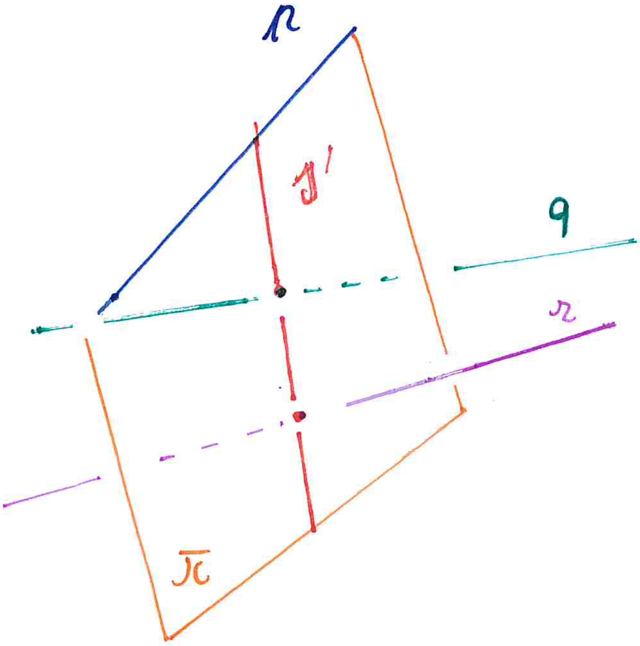
$\mathcal{F}_q$ e $\mathcal{F}_r$ sono proiettivi, in quanto prospettivi ad una stessa punteggiata



$\mathcal{F}$ e ρ sono prospettivi: da ρ ricavo $\mathcal{F}$ proiettando dall'asse a

② **Dualmente**, conduciamo per p un piano variabile π $(\pi \in \mathcal{F}_p)$, che intersecherà q ed r in due punti distinti. La retta g' che li congiunge taglia p.

Al variare di π in $\mathcal{F}_p$ (fascio di piani di asse p) si ottiene un regolo $\mathcal{R}'$



q ed r sono punteggiate proiettive in quanto sezioni di uno stesso fascio di piani

Ricapitolando, si ha il seguente prospetto:

★★ Regolo (o sistema di regoli) per una quadrica rigata

insieme delle rette intersezione di due fasci di piani proiettivi aventi per sostegno due rette sghembe

regoli dell'altro sistema

proiezioni da una stessa punteggiata

insieme delle rette congiungenti i punti omologhi di due punteggiate proiettive tra loro sghembe

sezioni di uno stesso fascio di piani

viceversa: due fasci proiettivi di piani ad assi sghembi, oppure due punteggiate proiettive a sostegni sghembi, generano un sistema di regoli di una quadrica rigata, alla quale appartengono, come rette dell'altro sistema di regoli, i due assi o i due sostegni.

★ Approccio analitico: L : piano eq.: $L = 0$ ecc.

$\mathcal{F} : L + \lambda M = 0 \qquad \mathcal{F}' : L' + \lambda M' = 0$

$L \leftrightarrow L' \quad \lambda = 0$

$M \leftrightarrow M' \quad \lambda = \infty$

$L+M \leftrightarrow L'+M' \quad \lambda = 1$

fasci di piani proiettivi

per λ fissato ho piani omologhi

Eliminando λ si arriva subito a   {vedi oltre per ulteriori sui luoghi}

$$(★) \quad \boxed{LM' - L'M = 0} \leftarrow \text{quadrica}$$

Assi dei due fasci: $\begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} L' = 0 \\ M' = 0 \end{cases}$ ⇝ sistema di regoli

Ora, (★) è pure individuata da $L + \mu L' = 0$, $M + \mu M' = 0$

con assi $\begin{cases} L = 0 \\ L' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} M = 0 \\ M' = 0 \end{cases}$ ⇝ dell'altro regolo

Nota: se gli assi fossero incidenti, si otterrebbe un cono.

† Cambiamenti di coordinate proiettive † Inciso

Ricordiamo che, nello spazio proiettivo reale (ma all'occasione complessificato), i cambiamenti di coordinate ammissibili si effettuano per mezzo di trasformazioni lineari in $\mathbb{R}^4$, precisamente
invertibili

$$\boxed{\underset{\neq 0}{\rho}\, X' = M X} \qquad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

oppure $X' = \overset{\neq 0}{\xi} M X$ $\qquad [X'] = \mathcal{M} \cdot [X]$ $\qquad X' = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

$M \in Gl(4, \mathbb{R})$

$(\det M \neq 0)$

i.e. M non singolare

una matrice $A \in Gl(n+1, \mathbb{R})$ dipende da $(n+1)^2$ parametri. A livello proiettivo, si hanno

$$(n+1)^2 - 1 = n \cdot (n+2)$$

parametri effettivi. un punto di $\mathbb{R}^n$ dipende da n parametri effettivi. In definitiva,

una trasformazione proiettiva viene individuata fissando le immagini di $\left\{ n(n+2)/n = n+2 \right\}$ punti in posizione generale.

Nel nostro caso $n = 3$, sicché basta fissare le immagini di 5 punti in posizione generale (ovvero, a tre a tre non allineati, a quattro a quattro non complanari); in particolare, è sufficiente fissare le immagini dei punti fondamentali $O: [1, 0, 0, 0]$ (origine)

$X_\infty: [0, 1, 0, 0]$, $Y_\infty: [0, 0, 1, 0]$,

$Z_\infty: [0, 0, 0, 1]$ (direzioni degli assi),

$U: [1, 1, 1, 1]$ punto unità

$$\underset{\text{fissati}}{\underset{\uparrow}{P_i'}} = \overset{\text{incognita}}{\overset{\downarrow}{A}} \cdot \underset{\uparrow}{P_i}$$

"baricentro"

* Classificazione proiettiva delle quadriche

Sia data una quadrica $Q_A : X^T A X = 0$

Operando una trasformazione di coordinate

$$\boxed{X = M X'} \qquad M \in GL(4, \mathbb{R})$$

l'espressione precedente diviene

$$(MX')^T A M X' = 0 \qquad \text{ossia}$$

$$X'^T \underbrace{M^T A M}_{B} X' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M^T A M = B \\ A \simeq B \end{array} \right\}$$

A livello proiettivo: due quadriche

Q_A e $Q'_{A'}$: $X^T A' X = 0$ sono dette

proiettivamente equivalenti se

$$\boxed{A \simeq \rho A'}$$

congruenza $\nearrow$ $\qquad \rho \neq 0$

Ciò significa che, a prescindere da un cambiamento di riferimento proiettivo, esse sono la stessa quadrica

Si osservi in particolare che $\det A = \det(M^T \rho A' M)$

$$= \rho^4 \det(M^T A' M) = \underbrace{\rho^4 (\det M)^2}_{>0} \det A'$$

In virtù del teorema di Sylvester, abbiamo i casi seguenti:

quadriche irriducibili

* quadrica generale $\mathfrak{A} := \det A \neq 0$

segnatura di A:

$(4,0)$ o $(0,4)$: quadrica totalmente immaginaria

$++++$ $----$

$\boxed{\mathfrak{A} > 0}$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$(\pm)\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

o a punti immaginari

$(3,1)$ o $(1,3)$: quadrica a punti ellittici $\boxed{\mathfrak{A} < 0}$

$+++-$ $-+++$

da dimostrarsi a breve

$(2,2)$ $++--$ $(--++)$: quadrica a punti iperbolici (rigata) $\boxed{\mathfrak{A} > 0}$

* cono $\boxed{\mathfrak{A} = 0}$, $rk(A) = 3$

segnatura: $(3,0)$ o $(0,3)$ cono a generatrici immaginarie [il vertice è comunque reale]

$(2,1)$ o $(1,2)$ cono a generatrici reali → punti semplici parabolici

* $\boxed{\mathfrak{A} = 0}$ $rk(A) = 1$ o 2 : quadriche spezzate (riducibili)

Notare che $\boxed{\mathrm{sgn}(\mathfrak{A})}$ (segno di $\mathfrak{A}$) è un invariante proiettivo; nel caso delle quadriche generali a punti reali le distingue in quadriche a punti ellittici e iperbolici

Precisamente, si ha il

44 Teorema Sia Q una quadrica irriducibile, a punti reali. Allora, detto $\Omega := \det A$

$X^TAX = 0$

si ha:

$$\boxed{\Omega \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \iff Q \text{ è a punti } \begin{matrix}\text{iperbolici} \\ \text{parabolici} \\ \text{ellittici}\end{matrix} \text{ risp.}}$$

il segno di Ω è dunque un invariante proiettivo, completo se ci si limita alle quadriche a punti reali

inciso

Si noti che, dal punto di vista geometrico-differenziale il segno della curvatura gaussiana di Q è altresì un invariante proiettivo

Dimostrazione. Sia Q irriducibile e a punti reali, sia $P_0 \in Q$ uno di questi punti e lo si assuma come origine $P_0 \equiv 0$. Possiamo scegliere un sistema di coordinate cartesiane x, y, z per il quale $z = 0$ è il piano tangente in $P_0 \equiv 0$ τ_0

P_0 deve essere semplice, ma tale scelta è ovviamente possibile.

Si trova

$$f = f(x,y,z) = a_{00} + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z = 0$$

$X^TAX = 0$

$\tau_{P_0}: \; X_0^TAX = 0$

$P_0 = [X_0]$ $\quad [X_0] = [1, 0, 0, 0]$

$f = f(x,y,z) = 0$

$\tau: \; f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + f_z^0(z - z_0) = 0$

Si ha $\boxed{a_{00} = 0}$ e τ_0 è dato da

$$a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z = 0$$

$\Rightarrow$ (dovendo coincidere con $z = 0$)

$$\boxed{a_{01} = a_{02} = 0}, \quad \boxed{a_{03} \neq 0}$$

Pertanto

$$Q \cap \tau_0 = \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

↖ coppia di rette

Posto, ad esempio $y = mx$, $x \neq 0$, $\boxed{a_{22} \neq 0}$, è

$$\boxed{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$$

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

$\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$

- reali e distinte
- coincidenti
- complesse coniugate

Pertanto se

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

punto iperbolico
parabolico
ellittico

Ma

$$\Omega = -\underbrace{a_{03}^2}_{\substack{\vee \\ 0}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{(Laplace)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{a_{03}} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

da cui l'asserto.

Si noti che, come è giusto che sia, la condizione sul segno di Ω (o sul suo annullarsi) non dipende dal punto semplice (reale) scelto su Q