Lezione XXIV

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

1 Problemi, esempi ed esercizi

- Come determinare i regoli di una quadrica a punti iperbolici?

Prima di tutto va verificato che $\mathcal{O} > 0$ e che la segnatura di A non sia $(4,0)$ o $(0,4)$ [i.e. q_A (forma quadratica) associata ad A sia definita positiva o negativa: a tale scopo si utilizza il criterio di Sylvester (v. anche oltre)]

Successivamente, tramite completamento dei quadrati, si può scrivere Q come

$$\boxed{LM' - L'M = 0}$$

L, L', M, M' forme lineari

e di conseguenza, i regoli sono rappresentati (descrizione affine) da

generazione proiettiva (Steiner)

$$\mathcal{R}' \ni r'_k : \begin{cases} L + kM = 0 \\ L' + kM' = 0 \end{cases} \qquad r'_k \subset Q$$

$$\mathcal{R} \ni r_h \begin{cases} L + hL' = 0 \\ M + hM' = 0 \end{cases} \qquad r_h \subset Q$$

è il regolo che contiene $q: \begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \end{cases}$ $(h = 0)$ e $r: \begin{cases} L' = 0 \\ M' = 0 \end{cases}$ $(h = \infty)$

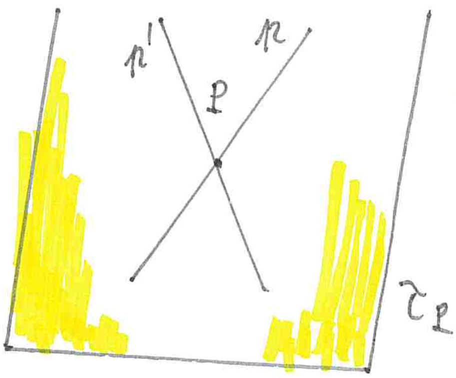
Al variare di k e h (incluso ∞) si trovano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$

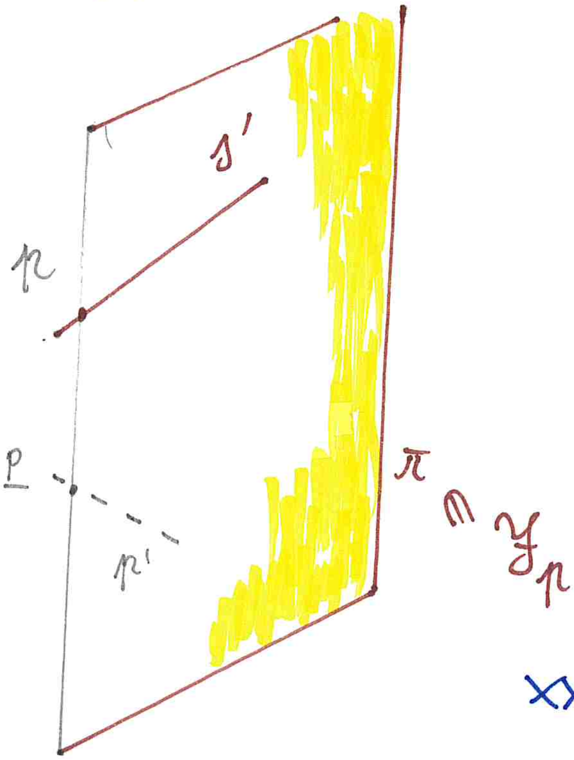
attenzione, si devono utilizzare coordinate omogenee, v. oltre per un esempio

• Altro metodo:

si fissa $P \in Q$, si trova τ_P e la coppia di rette $\tau_P \cap Q = r \cup r'$.

Si considera poi il fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r e se ne interseca il piano generico π con Q: si trova r e un'altra retta s', che è una generatrice, appartenente allo stesso regolo di r'. Al variare di $\pi \in \mathcal{F}_r$ si ottiene tutto il regolo $\mathcal{R}'$. Ripetendo la costruzione a partire da r', determino il regolo $\mathcal{R}$.

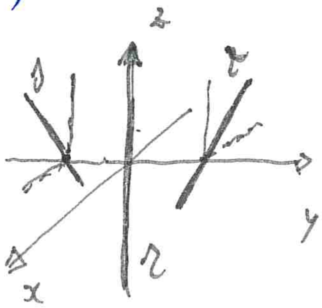




• Determiniamo la quadrica individuata dalle rette che si appoggiano a

$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = \xi \\ y = -1 \\ z = \xi \end{cases}$ $\quad \tau: \begin{cases} x = -\eta \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases}$

(asse z) (mutuamente sghembe)



Sia $P: (0,0,t)$ un punto generico di r. Il piano $\pi(s, P)$ si trova

così: $s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x - z + \mu(y+1) = 0$

passaggio per $P: (0,0,t)$: $-t + \mu = 0 \Rightarrow \mu = t$

Intersechiamo con τ : $\begin{cases} x - z + t(y+1) = 0 \\ x = -\eta \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases}$

$\Rightarrow \quad -\eta - \eta + 2t = -2\eta + 2t = 0 \Rightarrow \eta = t$

$P: (0, 0, t)$

si ottiene $Q: (-t, 1, t)$. Determiniamo quindi

$PQ: \begin{cases} x = 0 + \xi(-t) = -\xi t \\ y = 0 + \xi \cdot 1 = \xi \\ z = t + \xi \cdot 0 = t \end{cases}$ eliminando ξ $\quad PQ: \begin{cases} x + ty = 0 \\ z = t \end{cases}$

al variare di t, le varie rette sono // al piano xy

Eliminando infine t si ottiene

descrizione omogenea

$$\boxed{Q: \; x + yz = 0, \quad x_1 x_0 + x_2 x_3 = 0}$$

{ ne manca una, quale? v. pag successiva }

!

quadrica rigata a punti iperbolici

dal punto di vista affine risulterà essere un paraboloide iperbolico v. oltre

Variante: Sia $P \in r$: $\begin{cases} x = -\eta \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases}$ $\quad r: \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

$P: (-\eta, 1, \eta)$

Troviamo il piano di $\mathcal{F}_r$ passante per P: $\quad -\eta + k = 0$

$k = \eta$

$x + ky = 0$

$x + \eta \cdot y = 0$

Troviamo il piano di $\mathcal{F}_s$ passante per P:

$$x - z + h(y+1) = 0$$

$$-\eta - \eta + h \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \eta$$

$\Rightarrow h = k = \eta$. L'intersezione è data da

$$\begin{cases} x + \eta y = 0 \\ x - z + \eta(y+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \eta y = 0 \\ z - \eta = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{x + \eta y}_{0} - z + \eta$

è la retta di prima

⚠ quale retta si ottiene per $\eta = \infty$? Si omogeneizzi:

$$\begin{cases} \mu x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ \mu x_3 - \lambda x_0 = 0 \end{cases} \qquad \eta = \frac{\lambda}{\mu} \quad \mu \neq 0 \text{ temporaneamente}$$

Si faccia ora $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}}$

è la retta "mancante"

• Sia data la quadrica

$$Q: \quad x^2 + 4xy - y^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$-x_0^2 + x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 = 0$$

osserviamo che Q è a punti reali poiché $R: (1,0,0) \in Q$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \det A = \underbrace{-}_{-1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +1 > 0$$

R_{32}

$\Rightarrow$ Q è a punti iperbolici.

Dal punto di vista affine risulterà essere un iperboloide iperbolico (a una falda)

Determiniamone i regoli, in più modi.

1. (completamento dei quadrati)

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 4y^2}_{(x+2y)^2} - 4y^2 - y^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$(x+2y)^2 - (\underbrace{5y^2 + 2yz + 1}) = 0$$

$$\| $$

$$\underbrace{(\sqrt{5}\,y)^2 + 2\sqrt{5}\,y \cdot \frac{z}{\sqrt{5}} + \frac{z^2}{5}}_{\left(\sqrt{5}\,y + \frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{z^2}{5} + 1$$

In definitiva

$$\boxed{Q:\quad \underbrace{(x+2y)^2-\left(\sqrt{5}\,y+\frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2}_{\parallel}-\underbrace{\left(1-\frac{z^2}{5}\right)}=0}$$

$$\left(x+2y+\sqrt{5}\,y+\frac{z}{\sqrt{5}}\right)\left(x+2y-\sqrt{5}\,y-\frac{z}{\sqrt{5}}\right) \qquad \underbrace{\left(1+\frac{z}{\sqrt{5}}\right)}_{L'}\underbrace{\left(1-\frac{z}{\sqrt{5}}\right)}_{M}$$

$$\underbrace{\left(x+(2+\sqrt{5})y+\frac{z}{\sqrt{5}}\right)}_{L}\underbrace{\left(x+(2-\sqrt{5})y-\frac{z}{\sqrt{5}}\right)}_{M'} \qquad \boxed{LM'-L'M=0}$$

Regoli:

$$\mathcal{R}_k:\ \begin{cases} L-kM=0\\ L'-kM'=0\end{cases}$$

(lieve cambiamento di notazione, che non dovrebbe ingenerare confusione)

$$\mathcal{R}'_h:\ \begin{cases} L-h\cdot L'=0\\ M-h\cdot M'=0\end{cases}$$

Troviamo le generatrici passanti per $P:(1,0,0)$:
si ha subito $k=1$, $h=1$. Si ha allora

$\boxed{r_1\equiv r}$ $\quad L-M=\left(x+(2+\sqrt{5}y)+\frac{z}{\sqrt{5}}\right)-\left(1-\frac{z}{\sqrt{5}}\right)=0$

$$x+(2+\sqrt{5})y+\frac{2}{\sqrt{5}}z-1=0$$

$$L'-M'=1+\frac{z}{\sqrt{5}}-x-(2-\sqrt{5})y+\frac{z}{\sqrt{5}}=0$$

$$-x-(2-\sqrt{5})y+\frac{2}{\sqrt{5}}z+1=0$$

Sommando e sottraendo

$$\boxed{r:\ \begin{cases}\cancel{2}\sqrt{5}\,y+\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\sqrt{5}}z=0\\ \cancel{2}x+\cancel{4}_{2}y-\cancel{2}_{1}z=0\end{cases}\iff\cdots\begin{cases}5y+2z=0\\ x+2y-1=0\end{cases}}$$

Analogamente si trova

$$r' \equiv r'_1 : \begin{cases} y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

r e r' potevano determinarsi così:

$$\boxed{r \cup r' = Q \cap \tau_P} \; .$$

È infatti visto che $\tau_P : \; x+2y-1=0$

$$\tau_P : \; (x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x+2y-1=0$$

[ottenibile anche in altri modi]

$$\begin{cases} (x+2y)^2 - \left(\sqrt{5}\,y + \frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(1 - \frac{z^2}{5}\right) = 0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

$x+2y=1$

$$\begin{cases} \cancel{1} - \left(\sqrt{5}\,y + \frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2 \cancel{-1} + \frac{z^2}{5} = 0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{z}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\,y + \frac{z}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{z}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\,y - \frac{z}{\sqrt{5}}\right) = 0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,z + \sqrt{5}\,y\right)(-\sqrt{5})\,y = 0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2z+5y)\,y = 0 \\ x+2y+1=0 \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} 5y+2z=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

Ora, partiamo da r e r' e determiniamo i regoli nel seguente modo:

$$\mathcal{R} \ni \tilde{r} = Q \cap \alpha \quad , \alpha \in \mathcal{F}_{r'}$$ fascio di piani di asse r'

$$\mathcal{F}_{r'}: \quad ky + (x+2y-1) = 0$$

su $Q: \quad (x+2y)^2 - (5y^2+2yz+1) = 0$

poniamo $\quad x+2y = 1-ky$

$$(1-ky)^2 - 5y^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$\cancel{1} - 2ky + k^2y^2 - 5y^2 - 2yz - \cancel{1} = 0$$

$$(k^2-5)y^2 - 2ky - 2yz = 0$$

$$y\left[(k^2-5)y - 2k - 2z\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

1 $\begin{cases} x+2y-1+ky=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\equiv$$

$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\leftarrow \tau_k$ variabile con k

$\begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases}$

è la r', indip. da k

2 $\begin{cases} x+(2+k)y-1=0 \\ (k^2-5)y-2z-2k=0 \end{cases}$

per $k=0$ si ha $r: \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 5y+2z=0 \end{cases}$ τ_k

come era ovviamente da aspettarsi

- **Problema**: date quattro rette s, p, q, r a due a due sghembe, determinare le rette che si appoggiano ad esse

Soluzione. Consideriamo tre delle rette date, ad esempio p, q, r. Le rette che si appoggiano ad esse individuano una e una sola quadrica Q.

Se $s \subset Q$, farà parte del regolo $\mathcal{R}$ cui appartengono p, q, r, in quanto s è sghemba con ciascuna delle altre.

Se $s \not\subset Q$, intersecherà Q in due punti:

- reali e distinti (siano S_1 e S_2): le rette s_i' $i=1,2$ del regolo $\mathcal{R}'$ passanti per S_i risolvono il problema.

- reali e coincidenti (sia $S = S_1 = S_2$): la retta s' del regolo $\mathcal{R}'$ che passa per S risolve il problema.

- complessi coniugati: il problema non ammette soluzioni reali.