Mauro Spera, Elena Zizioli

Esempi

Studiamo Q_A : $X^TAX = 0$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = 0$$

$a_{33} = 1 > 0$; $\alpha_{11}^{\infty} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$

$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \alpha_{11}^{\infty} = -3 < 0$

α	α_{00}	α_{11}^{∞}	a_{33}
$-$	$-$	$-$	$+$

$\alpha = 1 \cdot \alpha_{00} = -3 < 0$

quadrica generale

$\Rightarrow$ segnatura $(1,3) \longrightarrow$ punti ellittici $\Big\}$ classificazione proiettiva

La segnatura di $\mathscr{C}_\infty$ è $(1,2)$, $\mathscr{C}_\infty$ è dunque reale (o meglio, a punti reali)

$\Rightarrow$ Q_A è un iperboloide ellittico $\leftarrow$ tipo affine

(a due falde, non rigato)

Determiniamone il centro(+) C in modo diretto:

(+) in generale C si determina come intersezione di tre piani polari corrispondenti a punti impropri (piani diametrali)

$C : [x_0, x_1, x_2, x_3]$ è il polo del piano improprio π_∞ : $x_0 = 0$. Pertanto

$$(x_0 \; x_1, \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{00} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix}}_{\pi_\infty} = 0$$

ossia

$$(x_0 \; x_1, \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ A_{00}\,\underline{l} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall\, \underline{l} \neq \underline{0} \qquad \forall\, \underline{l} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Ma, dato che A_{00} è non singolare, si ha

$$(x_0\ x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \underline{m}\\ \vdots\end{pmatrix} = 0 \qquad \forall\, \underline{m} \neq \underline{0}$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \qquad \forall\, \underline{m} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \text{e } x_0 \text{ arbitrario}, \neq 0$$

$\Rightarrow \quad C = [1, 0, 0, 0]$, ossia l'origine

[ciò si poteva accertare subito osservando che $a_{0i} = 0 \quad i = 1,2,3$]

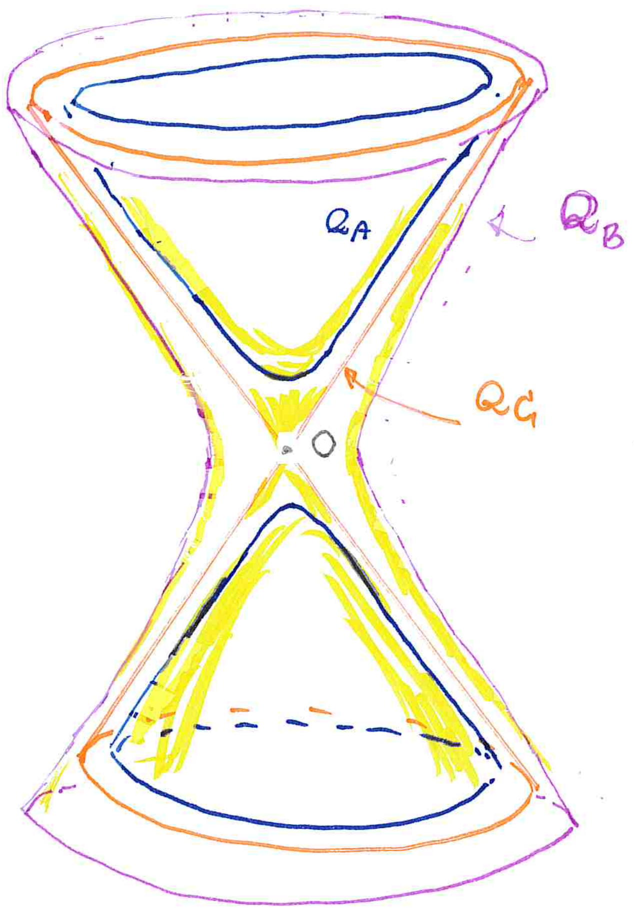
★ Stesso esercizio con Q_B $\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0\ 0\ 0 \\ \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{A_{00}} \end{pmatrix}$

Stavolta troviamo (verificarlo...) Q_B generale, a punti iperbolici e, apparentemente, un iperboloide iperbolico (a una falda, rigato). Il centro è ancora $C = O : [1, 0, 0, 0]$

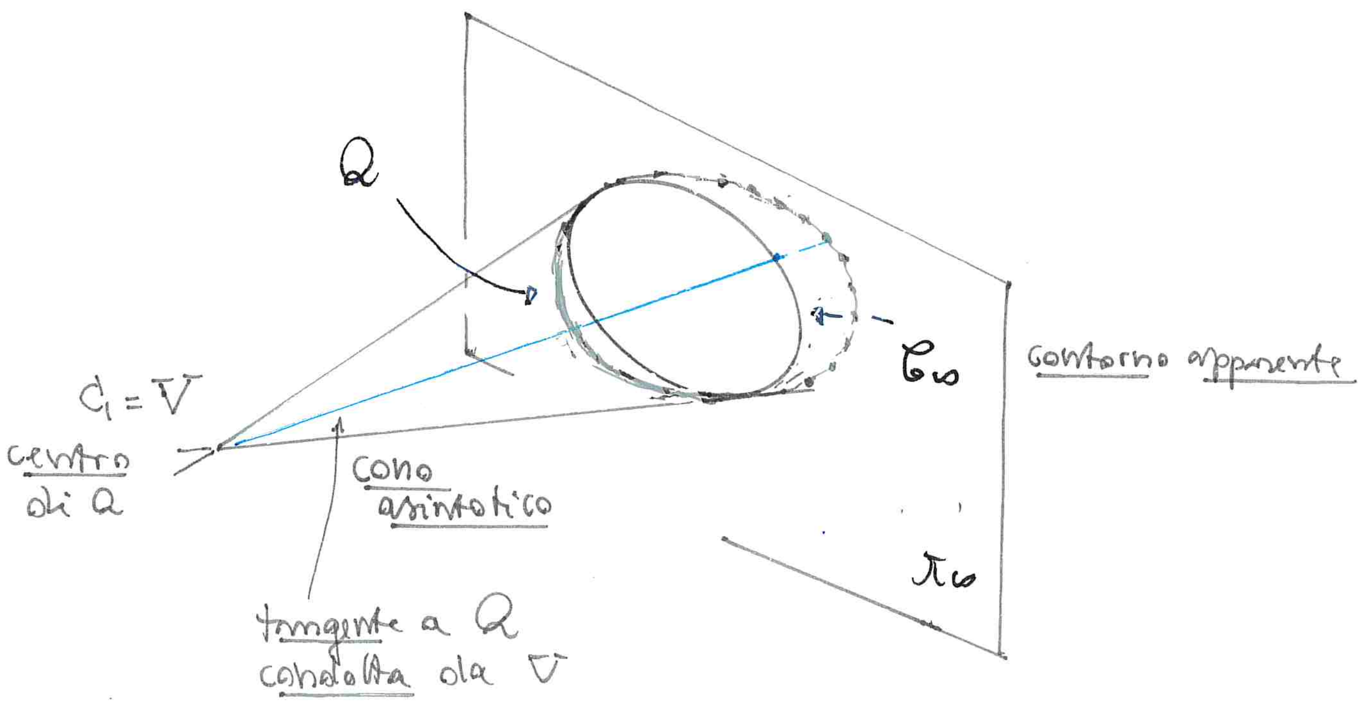
Se infine prendiamo Q_C $\qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0\ 0\ 0 \\ \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{A_{00}} \end{pmatrix}$

otteniamo un cono reale, di vertice $V = O$, come è subito visto.

Notare che Q_A, Q_B, Q_C hanno la stessa conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$: Q_C è il loro cono asintotico comune, e $\mathcal{C}_\infty$ è il contorno apparente di Q_A, Q_B, viste da V.



Q_A
Q_B
Q_G
O



Q
C_∞
contorno apparente
$C_1 = V$
centro di Q
cono asintotico
π_∞
tangente a Q condotta da V

Esercizio: Classificare, dal punto di vista affine, le quadriche del fascio

$$\mathcal{F}: (1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (1-k)z^2 - 2(1-k)x - 2(1+k)z = 0$$

$$\underbrace{(x^2+y^2+z^2-2x-2z)}_{Q_0} + k\underbrace{(x^2+y^2-z^2+2x-2z)}_{Q_\infty} = 0$$

$Q_k \in \mathcal{F}$

Notiamo che, in questa forma, per $k=\infty$ abbiamo

$\boxed{Q_\infty: \ x^2+y^2-z^2+2x-2z=0}$, che è un cono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 3$$

A_∞

vertice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_0 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_0 + x_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{V: [1, -1, 0, -1]}$ (V è proprio: A_∞ è non singolare)

In altro modo, elementare:

$$\underbrace{x^2+2x+1}_{} + y^2 - (\underbrace{z^2+2z+1}_{}) - 1 + 1 = 0$$

$$\boxed{(x+1)^2 + y^2 - (z+1)^2 = 0} \Rightarrow V: (-1, 0, -1)$$

$[1, -1, 0, -1]$

Analogamente

$$Q_0: \quad x^2+y^2+z^2-2x-2z=0$$

$$\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1+y^2+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1=0$$

$$\boxed{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2-2=0}$$

$\Rightarrow$ dal punto di vista affine si ha un ellissoide e metricamente una sfera di centro $C: (1,0,1)$ e raggio $R=\sqrt{2}$.

In modo standard: $\quad Q_2$ è a punti reali: $O:(0,0,0) \in Q_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Omega = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\rightsquigarrow A_{00}$

$$= -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} + (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} = -2$$

$\mathcal{C}_\infty$: conica a punti immaginari, di più, è l'assoluto π_∞

$\Omega < 0$

che conferma quanto già trovato.

Studiamo $Q_k \in \mathcal{F}$

$$\boxed{A_k = \begin{pmatrix} 0 & -1+k & 0 & -1-k \\ -1+k & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ -1-k & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}}$$

Si ha:

$$\boxed{a_{33} = 1 - k}\ ,\ \boxed{a^{\infty}_{11} = (1+k)(1-k)}$$

$$\boxed{a_{00} = (1+k)^2(1-k)},$$

$$\boxed{a} = (1+k)\begin{vmatrix} 0 & -1+k & -1-k \\ -1+k & 1+k & 0 \\ -1-k & 0 & 1-k \end{vmatrix} =$$

Sarrus

$$(1+k)\Big[-(1+k)^3 - \underbrace{(-1+k)^2}_{(1-k)^2}(1-k)\Big]$$

$$= -(1+k)\left[(1+k)^3 + (1-k)^3\right] =$$

$$= -(1+k)\left\{ 1 + 3k^2 + \cancel{3k} + \cancel{k^3} + 1 - \cancel{3k} + 3k^2 - \cancel{k^3} \right\}$$

$$= -(1+k)\left\{2 + 6k^2\right\} = \boxed{-2(1+k)(1+3k^2)}$$

* Capisaldi della discussione: $\boxed{k = -1, +1}$

Quadriche degeneri: $k = -1$ $\left(e\ k = \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \right)$ le scartiamo

$(e\ k = \infty)$ Si ha pure

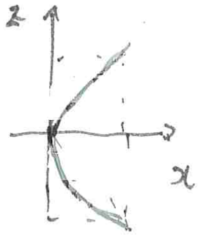
$$a_{00} = 0 \qquad A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad r(A_{-1}) = 3$$

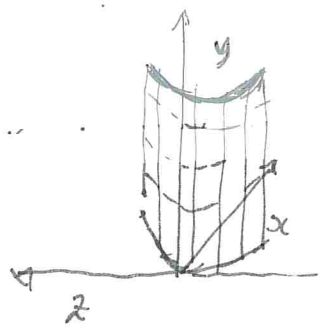
Si tratta di un cilindro: $V_\infty : \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -2x_0 = 0 \\ +2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad x_1 = 0$, $x_0 = 0$, $x_3 = 0$ $\quad (+)$

$$\Rightarrow V_\infty : [0, 0, 1, 0] = Y_\infty$$

L'equazione è $-4x + 2z^2 = 0$, $z^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow$ è un cilindro <u>parabolico</u>





(+) si risolve $AV = 0$

o, equivalentemente, si impone $F_0^0 = F_1^0 = F_2^0 = F_3^0 = 0$

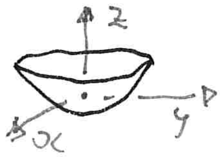
in $F(x_0 - x_3) = 0$

Analizziamo gli altri casi. Studiamo Q_∞ (governata da A_{00}). Per $\boxed{k = 1}$ si ha $\boxed{a_{00} = 0}$,

$\boxed{a < 0}$ $\Rightarrow$ <u>paraboloide ellittico</u>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \overset{1}{\cancel{-2}} \\ 0 & \overset{1}{\cancel{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{1}{\cancel{2}} & 0 \\ \underset{1}{\cancel{-2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2z = 0$$

(già in forma canonica; è un paraboloide di rotazione



Se $\boxed{k \neq -1, 1}$ quadrica generale

$$\begin{cases} a < 0 & -1 < k \quad + \text{ a punti ellittici} \\ a > 0 & k < -1 \quad + \text{ a punti iperbolici} \end{cases}$$

$-k > 1$

Si osservi sempre che $0 \in Q$ (quadriche a pti reali)

iperboloide iperbolico (a una falda, rigato)

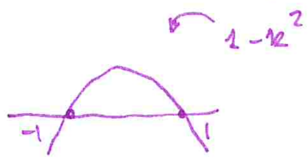
★ oppure si noti che

$a_{33} = 1 - k > 1 + 1 = 2 > 0$

$a^{00}_{11} = (1+k)(1-k) = 1 - k^2 < 0$

$a_{00} = (1+k)^2(1-k) > 0$

$a > 0$



$+ \; + \; - \; +$ non è la sequenza di un ellissoide immaginario

Se ora $\boxed{\Omega < 0}$

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} (1+k)(x_1^2+x_2^2) + (1-k)\,x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{-1 < k < 1}$

$1+k > 0$

$1-k > 0$

$-1 \quad k \quad 1$

$\mathcal{C}_\infty$ immaginaria

$\Rightarrow$ ellissoide a punti reali

$\boxed{k > 1}$

$-1 \quad 1 \quad k$

$k+1 > 0$

$1-k < 0$

$\mathcal{C}_\infty$ reale $\Rightarrow$ iperboloide ellittico
(a due falde, non rigato)

Riassumendo

classificazione proiettiva

$k < -1$ a punti iperbolici

cono

$k > -1$ a punti ellittici

0

-1

1

$k = \infty$ cono

classificazione affine

iperboloide iperbolico

cilindro parabolico

ellissoide

paraboloide ellittico (di rivoluzione)

iperboloide ellittico

proprietà metrica

$k = 0$ metricamente: sfera

non è un corpo solido della classificazione proiettiva e affine