Lezione XXV

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Zizioli

* Polarità

Consideriamo una quadrica irriducibile, generale per il momento $\boxed{Q: \ X^T A X = 0}$

$A = A^T \quad \alpha \neq 0$

Sia $P \in \mathbb{P}^3$. Il piano π_P di equazione

$$\boxed{X^T A P = 0}$$

(equivalentemente $P^T A X = 0$)

è detto piano polare di P rispetto a Q

$$\boxed{P \in Q \iff \pi = \tau_P}$$

Si ha anche in questo caso il teorema di reciprocità

$$\boxed{P \in \pi_Q \iff Q \in \pi_P} \qquad \forall P, Q \in \mathbb{P}^3$$

che discende immediatamente dalla simmetria di A:

se $\quad Q^T A P = 0 \iff (Q^T A P)^T = 0$

$\iff P^T A^T Q = 0 \iff P^T A Q = 0$

vogliamo arrivare ad un interpretazione geometrica di detto piano, sulla falsariga della corrispondente teoria delle coniche

Sia $\boxed{X = \lambda Y + \mu Z}$ $\quad X = (x_0 - x_3)$ ecc.

$Y \neq Z \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

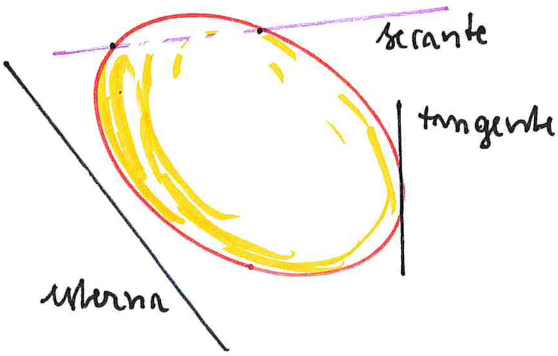
l'equazione di una generica retta nello spazio.

Sostituendola in $X^T A X = 0$ troviamo $\qquad X \equiv [X]$ abuso di notazione

$$(4) \quad \boxed{\lambda^2 \, Y^T A Y + 2\lambda\mu \, Y^T A Z + \mu^2 \, Z^T A Z = 0}$$

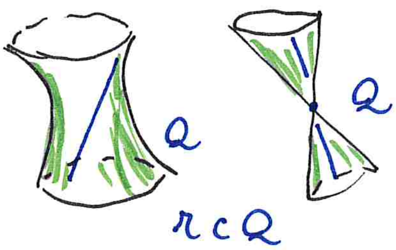
che è un'equazione di secondo grado in $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$

(se $\mu \neq 0$). Se questa è identicamente soddisfatta, è $r \subset Q$, se si hanno due soluzioni reali e distinte, r è secante, se si hanno due soluzioni reali e coincidenti, r è tangente, se si hanno due soluzioni complesse coniugate, r è non secante (o esterna)



Sia ora $Y \notin Q$

Determiniamo l'equazione del cono tangente a Q di vertice Y, $\quad C_Y$



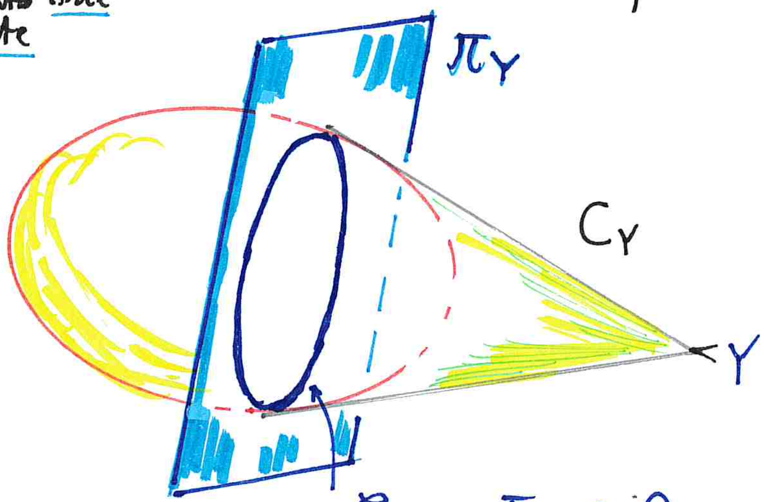
Ponendo, in (4), $\mu = 1$ per fissare le idee e imponendo la presenza di una radice doppia troviamo (mutando Z in X)

$$C_Y : \quad \boxed{(Y^T A X)^2 - (X^T A X)(Y^T A Y) = 0} \quad (\star)$$

cono tangente a Q di vertice $Y \notin Q$

piano polare contato due volte

quadrica



$$\mathscr{C}_Y = \pi_Y \cap Q = \pi_Y \cap C_Y$$

$\star$ Contorno apparente (da Y)

$$\mathscr{C}_Y : \begin{cases} X^T A X = 0 \\ Y^T A X = 0 \end{cases}$$

(conica)

Verifichiamo che C_Y è effettivamente un cono in altro modo.
Senza perdere in generalità supponiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

(Q è a punti reali) e $Y : [1, 0, 0, 0]$ (origine). Si ha

$$x_0^2 - (x_0^2 + x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2 = 0}$$

che è appunto un cono, con vertice in Y e generatrici reali

La $(\star)$ ci dice che Q, π_Y^2 (due volte), C_Y appartengono allo stesso fascio di quadriche.

★ Se il cono C e il piano $\pi \not\ni \bar{V}$, vertice di C sono fissati (sicché è fissata $\mathscr{C} = C \cap \pi$), C e π^2 ← notare generano un fascio di quadriche, che sono tutte e sole le quadriche Q aventi $\mathscr{C}$ come contorno apparente

[si confronti il tutto con la situazione nel piano: fascio di coniche bitangenti a due rette fissate in due punti fissati]

★ Si noti altresì che se in (★) $y \in Q$, si ottiene il piano tangente a Y contato due volte

Si ricordi:

★ Nel piano, mutatis mutandis, la (★) fornisce il complesso delle rette tangenti ad una conica condotte da un punto generico del piano. Se il punto appartiene alla conica, si ottiene la retta tangente alla conica in quel punto contata due volte.

★ - La seguente affermazione torna utile nel seguito

[v. capitoli sulle quadriche confocali]

→ $\boxed{\text{Se } P \in \pi^Q_Y \text{, è } \pi^Q_P = \pi^{C_Y}_P}$

Senza perdere in generalità, dimostriamolo nel caso

$Q \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad Y = [1,0,0,0]$ $\quad C_Y \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

$\pi^Q_Y : (x_0\ x_1\ x_2\ x_3)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi^Q_Y : x_0 = 0$

$P \in \pi^Q_Y \Leftrightarrow p_0 = 0$.

$\pi^Q_P : (x_0\ x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$

v. anche oltre

$\pi^Q_P :$
$p_1 x_1 \pm p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0$
$\parallel$
$\pi^{C_Y}_P$

★ Ancora sui coni quadrici

Sia $\mathcal{C}$ un cono di vertice Y : $X^T B X = 0$

$BY = \underline{0}$ $\quad rk(B) = 3$

Se $Z \neq Y$, il piano polare $\pi_Z^{\mathcal{C}}$ è ancora, per definizione

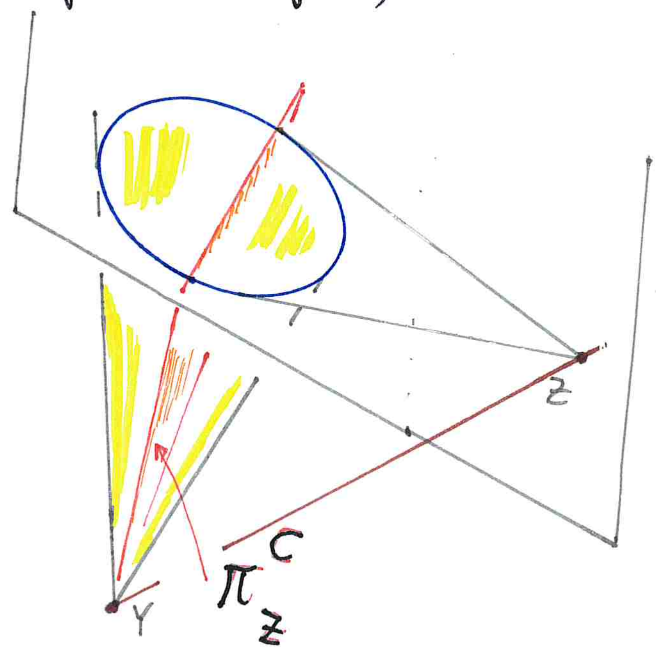
$$\pi_Z^{\mathcal{C}} : \quad Z^T B X = 0$$

Se $U \in YZ$, $U = \lambda Z + \mu Y \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

si ha

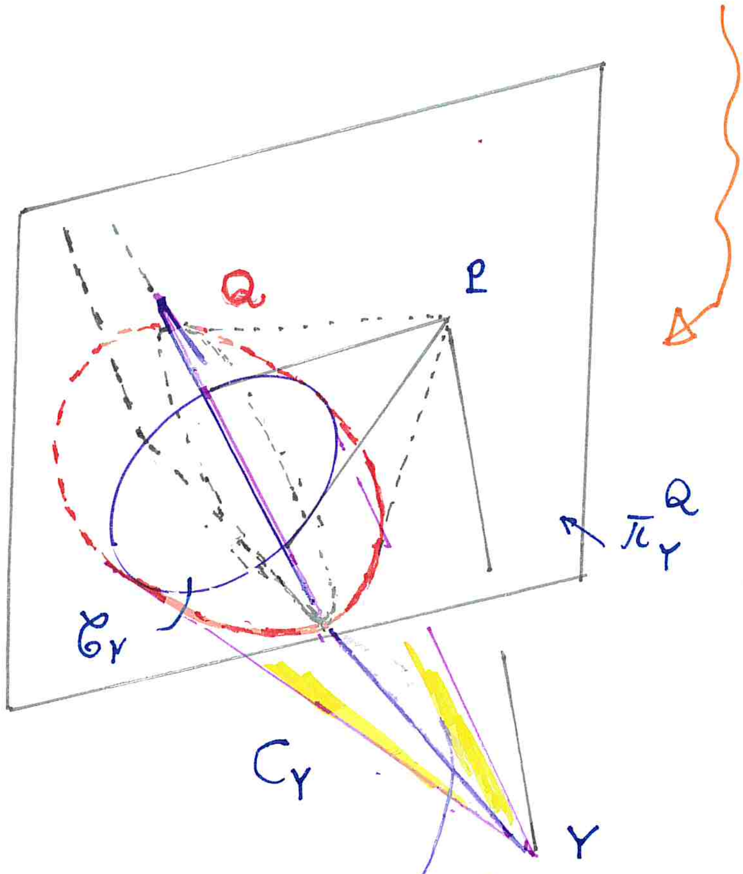
$$U^T B X = \lambda \underbrace{Z^T B X}_{\shortparallel \atop 0} + \mu \underbrace{Y^T B X}_{\shortparallel \atop 0} = 0$$

Pertanto, tutti i punti di una retta passante per il vertice Y hanno lo stesso piano polare (che, ovviamente, passa per Y). In particolare, i punti di una generatrice hanno lo stesso piano tangente (già lo si sapeva)



In forza della discussione precedente, si ha la seguente interpretazione geometrica del risultato

$$\boxed{P \in \pi_Y^Q \Rightarrow \pi_P^Q = \pi_P^{C_Y}}$$



$$\boxed{\pi_P^Q = \pi_P^{C_Y}}$$

Nel caso in cui $\quad Q: \; x_0^2 + x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2 = 0$

$Y = [1, 0, 0, 0] \qquad C_Y: \; x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2 = 0$

$$\mathcal{C}_Y: \begin{cases} x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$P: [0, p_1, p_2, p_3]$, la giacitura di $\pi_P^Q = \pi_P^{C_Y}$

$p_1 x_1 \pm p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0$ è data dalla polare $\pi^{\mathcal{C}_Y}$ di P rispetto a $\mathcal{C}_Y$, conica all'infinito (contorno apparente) comune a Q e C_Y