APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Marco Spera, Elena 2:2:06

Interpretazione geometrica del teorema di Sylvester per le quadriche

(forma canonica proiettiva)

⟿ costruzione di un tetraedro autopolare

(il piano opposto ad un vertice è il piano polare di quest'ultimo, relativamente alla quadrica in questione.

La discussione precedente mostra come lo si possa costruire.

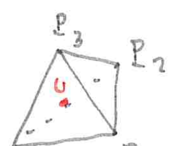
Si fissi $P_0 \notin Q$ e si consideri $\pi^{Q}_{P_0}$:

questo segherà Q in una conica $\mathcal{C}$;

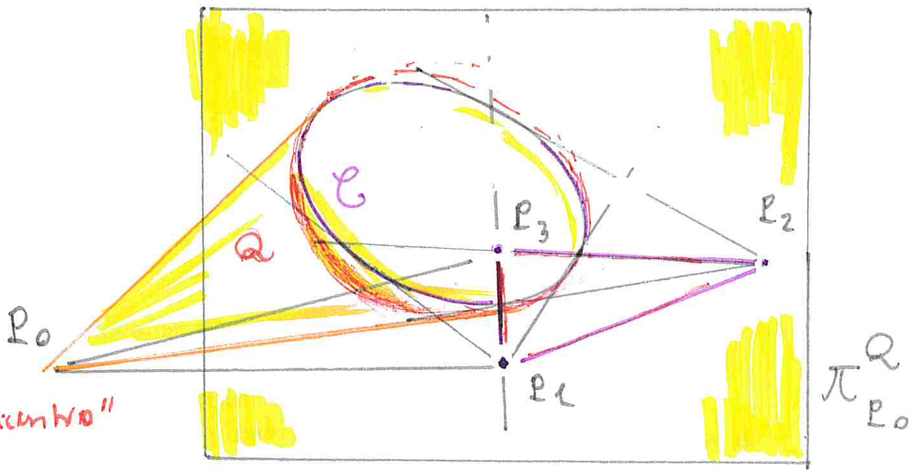
relativamente a quest'ultima si costruisca un triangolo autopolare $P_1 P_2 P_3$.

→ Il tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ è quello richiesto (†).

La costruzione funziona sia per una quadrica generale che per un cono: in quest'ultimo caso come P_0 si prende il vertice V .



(†) Il riferimento proiettivo è poi completato dall'aggiunta di un punto unità ("baricentro" del tetraedro)



Lezione XXVI

Analiticamente si hanno le forme canoniche proiettive

$\Omega \neq 0$

$(4,0)\,((0,4))$ $\quad \boxed{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0}$

quadrica generale totalmente immaginaria

$(3,1)\,((1,3))$ $\quad \boxed{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0}$

quadrica generale a punti ellittici

$(2,2)$ $\quad \boxed{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0}$

quadrica generale a punti iperbolici

$\Omega = 0 \quad r(A) = 3$

$(3,0)\,((0,3))$ $\quad \boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0}$

cono immaginario ($\bar{V}$ è reale)

$(2,1)\,(1,2)$ $\quad \boxed{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0}$

cono reale (a generatrici reali)

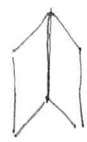
$r(A) = 2$

$(2,0)\,((0,2))$ $\quad \boxed{x_1^2 + x_2^2 = 0}$

coppia di piani complessi coniugati

$(1,1)$ $\quad \boxed{x_1^2 - x_2^2 = 0}$

coppia di piani reali



$r(A) = 1$

$(1,0)\,((0,1))$ $\quad \boxed{x_1^2 = 0}$

coppia di piani coincidenti

richiamo rapido:

$4 = p + q + \nu$

p: indice di positività = # autovalori positivi

q: indice di negatività = # autovalori negativi

$p + q = r$

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \; \cdots \; 1}^{p} & & 0 \\ & \overbrace{-1 \; \cdots \; -1}^{q} & \\ 0 & & \overbrace{0 \; \cdots \; 0}^{\nu} \end{pmatrix}$$

← forma canonica di Sylvester

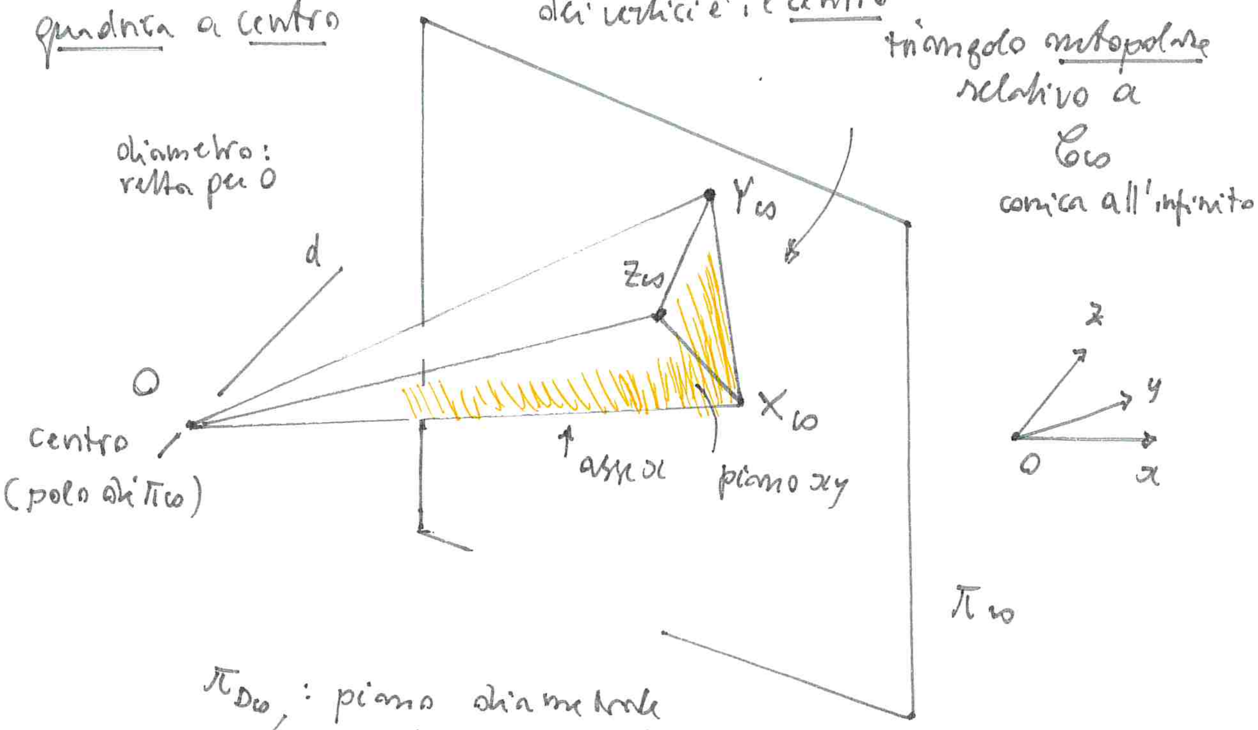
calcolabile in vari modi: eliminazione di Gauss simmetrica, completamento dei quadrati..

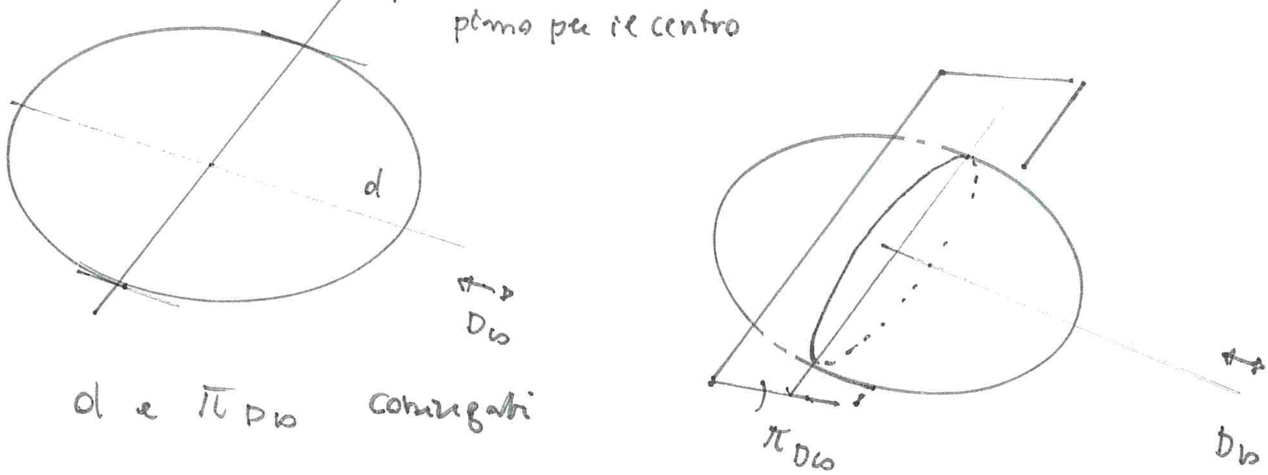
non è necessario calcolare gli autovalori di A

* Quadriche a centro : equazioni canoniche affini
dettagli geometrici

teoria di Sylvester (geometrica) :
tetraedro autopolare in cui uno dei vertici è il centro

Q quadrica a centro





* piani diametrali coniugati :
polo dell'uno contenuto nell'altro

Esempio: i piani xy , yz ecc. sono mutuamente coniugati : polo di $xy = Z_\infty$, che è contenuto nel piano yz (piano per O, Y_∞, Z_∞) ecc.

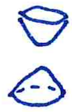
gli assi del riferimento (obliquo) emergono come intersezione di piani diametrali coniugati.

asse $x = OX_\infty \equiv \begin{cases} y=0 & \to xz \ , \ OX_\infty Z_\infty \\ z=0 & \to xy \ , \ OX_\infty Y_\infty \end{cases}$ coniugati

Si trovano così le equazioni canoniche affini

($x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ellissoide immaginario)

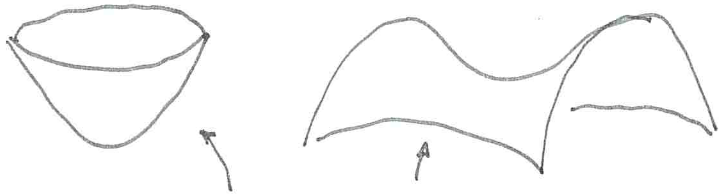
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ iperboloide iperbolico 

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ iperboloide ellittico 

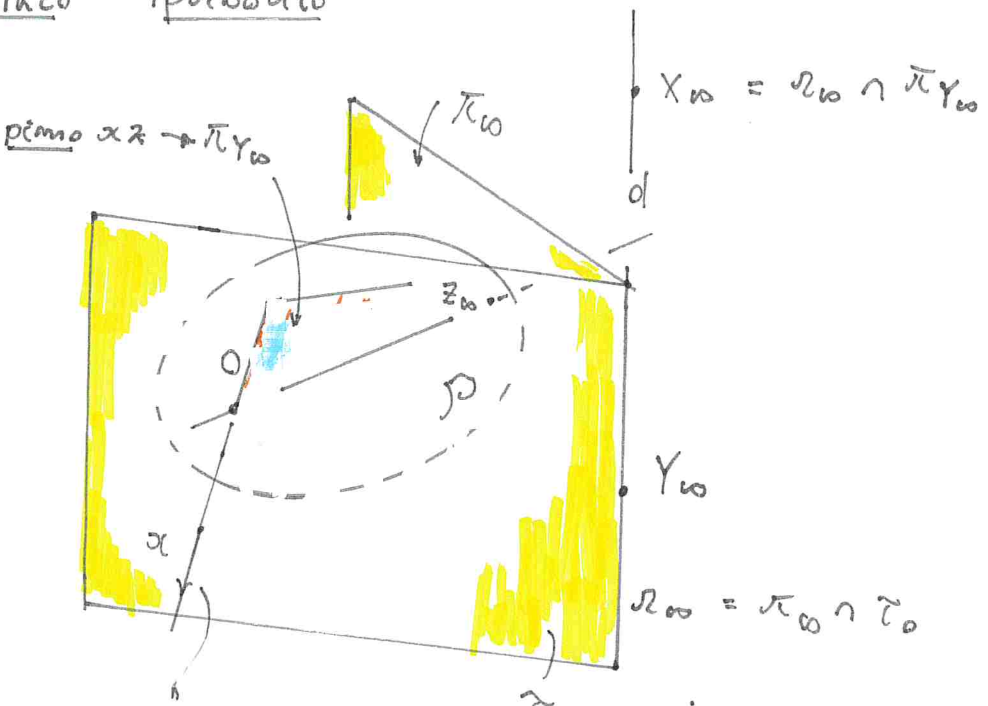
⇝ analisi della conica all'infinito
(v. oltre)

✱ paraboloidi: equazioni canoniche affini

tangenti al piano improprio — dettagli geometrici

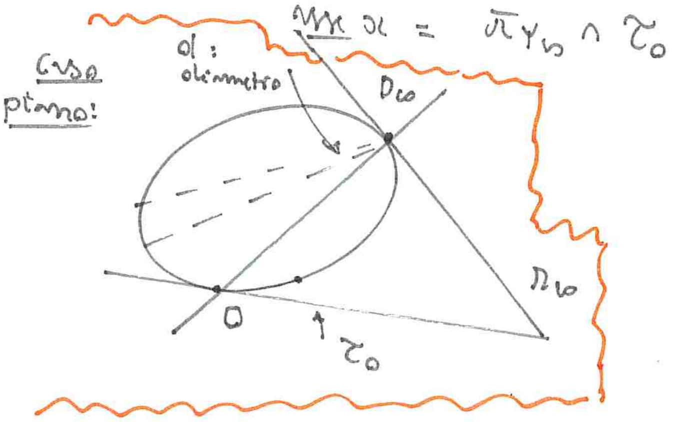


paraboloide ellittico — iperbolico



τ_0 ⟵ piano xy

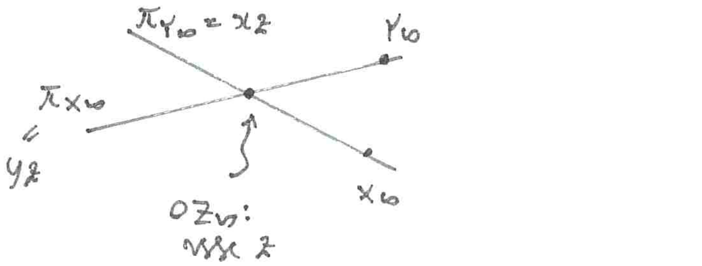
asse $x = \pi_{Y_\infty} \cap \tau_0$



asse y: $\pi_{X_\infty} \cap \tau_0$

X_∞ : polo di yz $\in \pi_{Y_\infty}$

Y_∞ : polo di xz $\in \pi_{X_\infty}$



costruzione del sistema di riferimento $(x^2 \pm y^2 = 2z)$

d: diametro arbitrario (retta per Z_∞, punto di tangenza di Γ col piano improprio.

O : origine : l'altra intersezione di d con $\mathcal{P}$
OZ_∞ è l'asse z.
Gli assi x e y si determinano così:

Sia $Y_\infty \in \tau_0 \cap \pi_\infty \equiv \Omega_\infty$. Il primo polare πY_∞ è diametrale (ossia contiene d); l'asse x è allora la retta $\pi Y_\infty \cap \tau_0$. Se si interseca πY_∞ con Ω_∞, si ottiene un punto X_∞, e l'asse x è OX_∞.
Il primo polare πX_∞ è pure diametrale, e l'asse y (OY_∞) è l'intersezione di πX_∞ con τ_0.

In definitiva

piano	xy :	τ_0	asse	x :	OX_∞
"	xz :	πY_∞	"	y :	OY_∞
"	yz :	πX_∞	"	z :	OZ_∞
					$\parallel d$

Notiamo che sussiste una proiettività $\mathcal{F}_d \leftrightarrow \Omega_\infty$
fascio di piani di asse d

che fa corrispondere ad ogni punto di Ω_∞ il suo piano polare rispetto a $\mathcal{P}$; viceversa, ad ogni piano di $\mathcal{F}_d$ (diametrale) corrisponde un punto su Ω_∞

Analiticamente, si osservi che, dall'equazione del primo polare a $F=0$ in $X^0 : [x_0^{(0)} - x_3^{(0)}]$

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_i^0)\, x_i = 0 \quad \equiv \quad X^T A X^0 = 0 \quad \text{segue, se}$$

$X^0 = [0,1,0,0] = X_\infty$ $\qquad x_0 a_{01} + x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + x_3 a_{31} = 0$

che è l'equazione $f_x = 0$ in coordinate non omogenee.
Nel riferimento trovato geometricamente, le equazioni

$$f_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0$$
$$f_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0$$

diventano, rispettivamente, $\underset{yz}{x=0}$ e $\underset{xz}{y=0}$

$$\Rightarrow \quad a_{01} = a_{02} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

Tuttavia, le intersezioni del paraboloide con l'asse z (ovvero d) cadono in $O: [1,0,0,0]$ e $Z_\infty: [0,0,0,1]$ cosicché l'equazione

$$\boxed{a_{33} z^2 + 2 a_{03} z + a_{00} = 0}$$

deve essere equivalente a $z = 0$ (l'altra radice essendo infinita), e ciò porge

$$a_{00} = a_{33} = 0$$

Si giunge infine a

$$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{03} z = 0}$$

che, con semplici cambiamenti di scala, si riduce alla forma

$$\boxed{x^2 \pm y^2 - 2z = 0}$$

$+$: paraboloide ellittico

$-$: paraboloide iperbolico

[il fattore 2 si lascia in genere per ragioni metriche]