4 Classificazione affine delle quadriche (reali)

Mauro Spera, Elena Accioli

Proviene dall'analisi della conica all'infinito, intersezione della quadrica con il piano improprio
$\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$

Richiamo: proiettivamente avevamo trovato:

- immaginaria $(4,0)$ o $(0,4)$
- pti ellittici $(3,1)$ o $(1,3)$
- punti iperbolici $(2,2)$

1. quadrica generale $r(A)=4$, $\mathcal{D}\neq 0$
2. cono $r(A)=3$

} quadriche irriducibili → $\mathcal{C}_\infty$ generale

3. coppia di piani distinti $r(A)=2$
4. coppia di piani coincidenti $r(A)=1$

quadriche degeneri o specializzate

Esaminiamo i casi 1 e 2 (quadriche irriducibili)

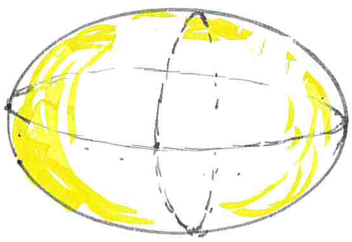
Se $\mathrm{sgn}(A) = (4,0)$ o $(0,4)$ si ha una

q_A definita positiva — q_A definita negativa

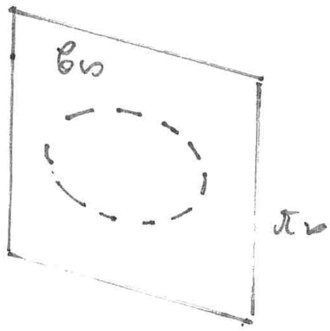
- quadrica <u>immaginaria</u> ("ellissoide a pti immaginari")

Successivamente si ottengono le quadriche seguenti:

- <u>ellissoide</u>

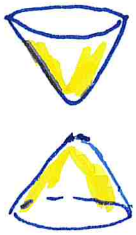


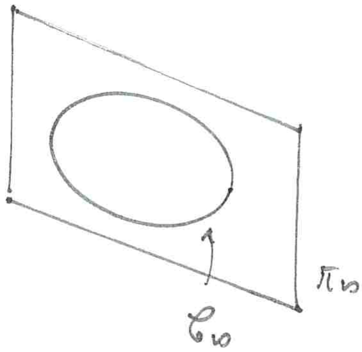
Segnatura di A: $(3,1)$ o $(1,3)$
(pti <u>ellittici</u>)



$Q\cap\pi_\infty = \mathcal{C}_\infty$ immaginaria
segnatura di A_{00}: $(3,0)$ o $(0,3)$

- **iperboloide ellittico**
(a due falde, non rigato)
Segnatura : $(3,1)$ o $(1,3)$
(pti ellittici)





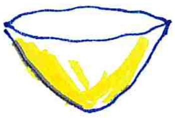
generale, a punti reali
segnatura di A_{00} : $(2,1)$ o $(1,2)$
$sgn(A_{00})$

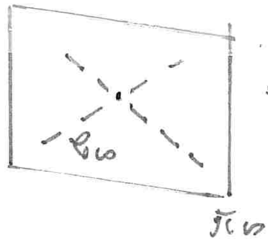
- **iperboloide iperbolico**
(a una falda, rigato)

$sgn(A) = (2,2)$
punti iperbolici

- **paraboloidi** tangenti a π_∞ : C_∞ spezzata in due rette

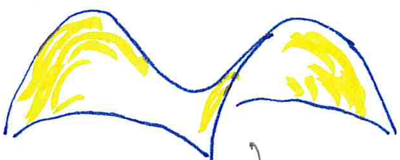
p. ellittico $(3,1)$ o $(1,3)$

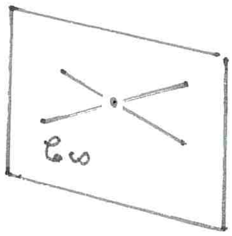




complesse coniugate

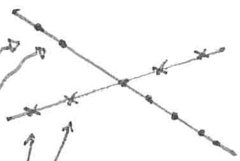
p. iperbolico (rigato) $(2,2)$





reali e distinte

Può esistere un paraboloide... parabolico ? NO . Perché ?

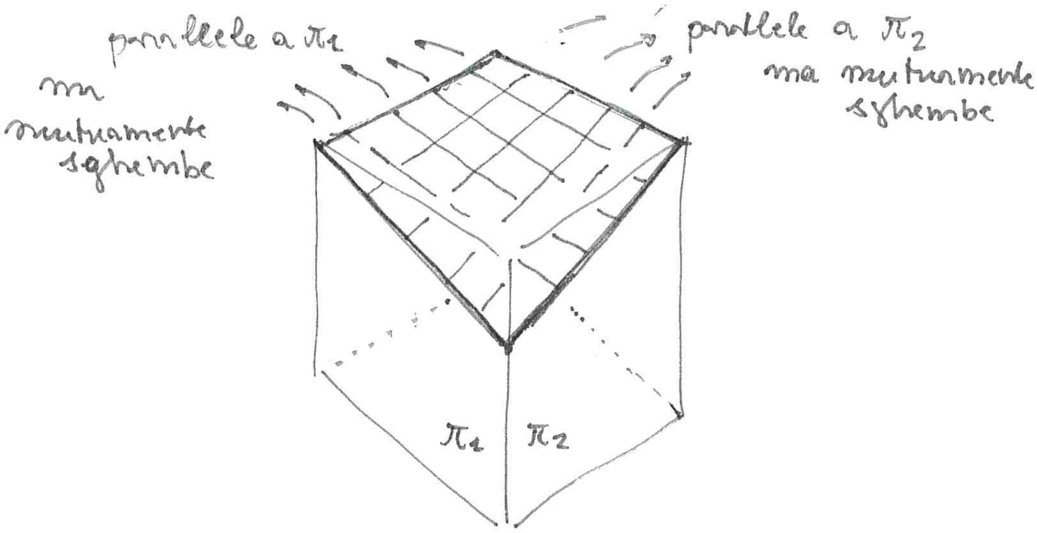


direzioni delle rette di un regolo (mutuamente sghembe)

In questo caso le due rette in cui si spezza C_∞ rappresentano le giaciture di due piani cui sono parallele le due schiere di rette del paraboloide

★ Applicazione: architetture HYPAR (hyperbolic paraboloid)

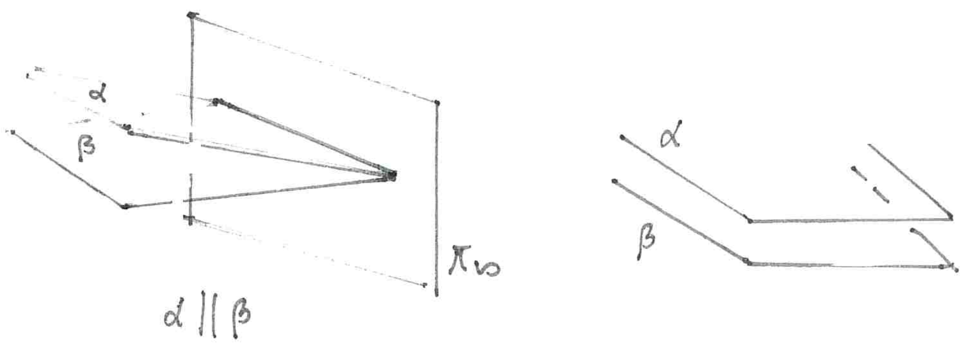
si ottengono risultati di estrema eleganza (v. www)



I coni quadrici si differenziano ulteriormente, dal punto di vista affine, in coni (propriamente detti, con vertice proprio) e cilindri con vertice improprio

◆ ◆ ◆

Nei casi riducibili una coppia piani distinti può essere costituita da piani paralleli (la loro retta intersezione è impropria)

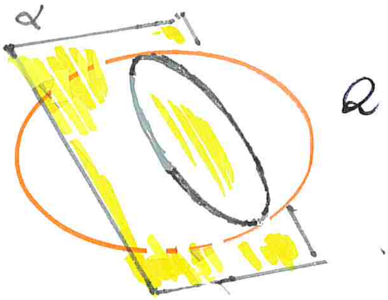


◇ ◇ ◇ ◇

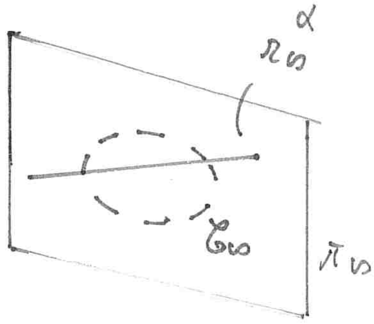
Dal punto di vista metrico due quadriche sono equivalenti se sono la stessa quadrica a meno di un movimento rigido.
La nozione di sfera ($\mathcal{C}_\infty = A_\infty$) e la nozione di quadrica rotonda (di rotazione) sono metriche

* Sezioni di una quadrica Q con un piano generico α

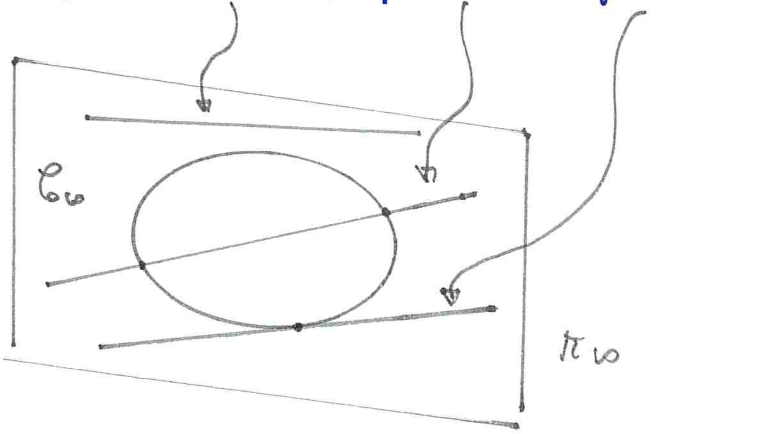
* ellissoide : ellissi (eventualmente immaginarie)

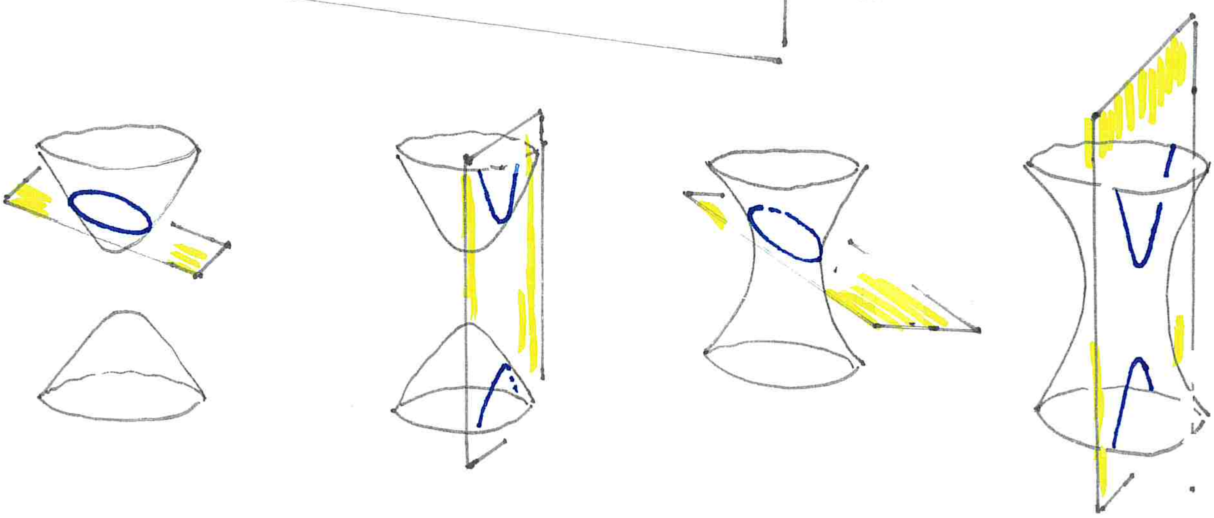


$Q \cap \alpha$ è in generale una conica non degenere che non può avere punti reali all'infinito



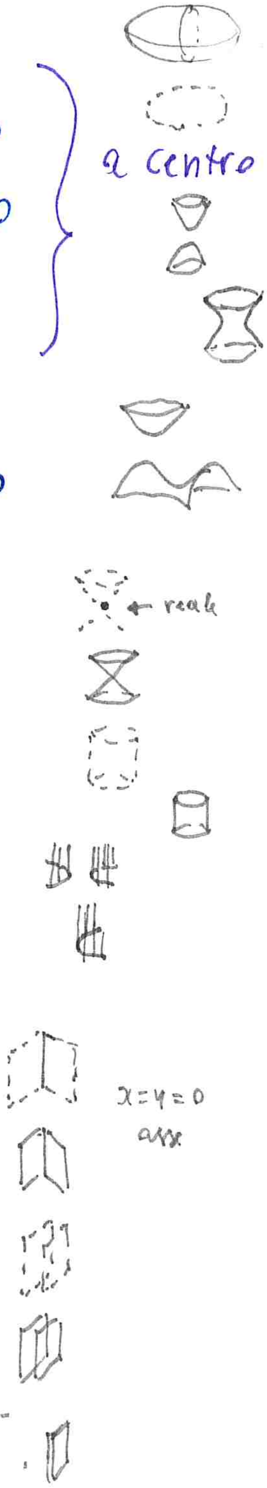
* iperboloidi : ellissi, iperboli, parabole





Equazioni canoniche affini delle quadriche
quadro riassuntivo

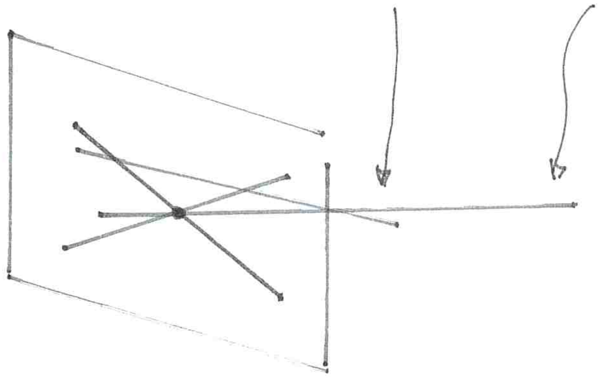
non degeneri (irriducibili), $r=4$	1.	ellissoide reale	$x^2+y^2+z^2-1=0$	a centro
	2.	ellissoide immaginario	$x^2+y^2+z^2+1=0$	a centro
	3.	iperboloide ellittico (a due falde)	$x^2+y^2-z^2+1=0$	a centro
	4.	iperboloide iperbolico (rigato; a una falda)	$x^2+y^2-z^2-1=0$	a centro
	5.	paraboloide ellittico	$x^2+y^2-z=0$	
	6	paraboloide iperbolico (rigato)	$x^2-y^2-z=0$	
degeneri o specializzate (irriducibili), $r=3$	7.	cono immaginario	$x^2+y^2+z^2=0$	
	8.	cono reale	$x^2+y^2-z^2=0$	
	9.	cilindro immaginario	$x^2+y^2+1=0$	
	10.	cilindro ellittico	$x^2+y^2-1=0$	
	11.	cilindro iperbolico	$x^2-y^2-1=0$	
	12.	cilindro parabolico	$x^2-y=0$	
degeneri o specializzate (riducibili), $r=2$	13.	piani complessi incidenti	$x^2+y^2=0$	
	14.	piani reali incidenti	$x^2-y^2=0$	
	15.	piani complessi paralleli	$x^2+1=0$	
	16.	piani reali paralleli	$x^2-1=0$	
	17.	piani coincidenti	$x^2=0$	

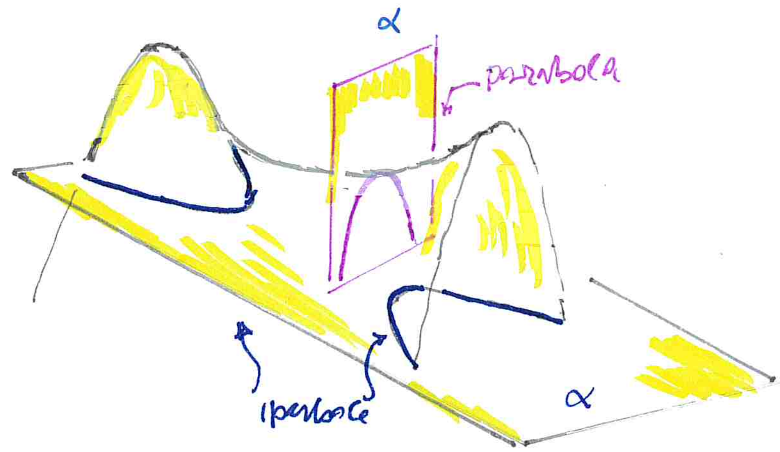


* paraboloidi

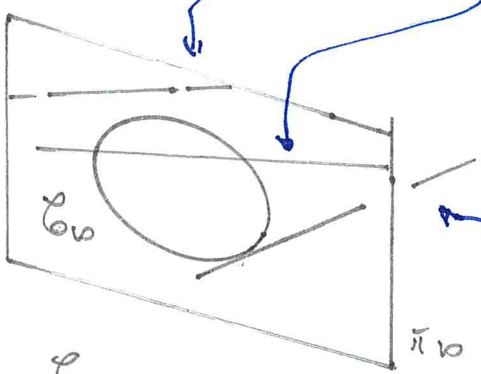
ellittico: ellissi o parabole

iperbolico: iperboli o parabole





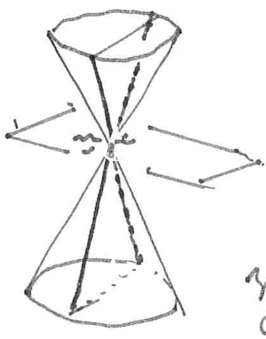
★ coni (reali) : ellissi, iperboli, parabole



cf la definizione originale di Apollonio

[sezioni con un piano non passante per il vertice]

$\pi_\infty \cap Q = \mathcal{C}_\infty$
irriducibile, a pti reali

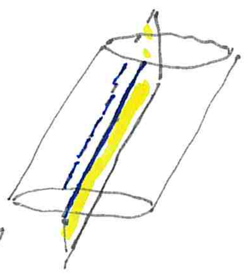


sezioni con un piano per il vertice: coppia di generatrici o rette complesse coniugate

★ cilindri (coni con vertici impropri)

direttrici : ellissi, iperboli, parabole

piano per il vertice (improprio)



coppia di generatrici o rette complesse coniugate