

Criterio di Sylvester

Lezione XXVIII

APPROFONDIMENTI
DI
GEOMETRIA V2

Muro Spina, Elementi

Sia data la forma quadratica

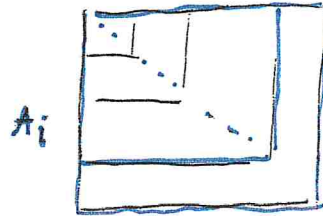
q_A

$$A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$$

in caso

q_A è definita positiva \Leftrightarrow

$$\det A_i > 0$$



$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \dots \quad A_n = A$$

Dim: Innanzitutto, q_B definita positiva $\Rightarrow \det B > 0$

$$(\Rightarrow) \text{ è ovvia: da } q_A(v) = v^T A v > 0$$

$$\forall v \neq 0 \text{ segue, posto } v_i = \begin{matrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \Bigg\}^i_{m-i}$$

che q_{A_i} è def. positiva $\Rightarrow \det A_i > 0 \quad \forall i=1..n$

(\Leftarrow) Proviamo l'asserto per induzione su n .

Per $n=1$ esso è banalmente vero.

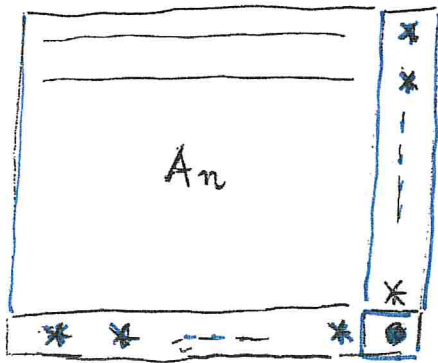
Supponiamolo vero per n , proviamo per $n+1$

$$\text{Sia } \det A_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, n+1$$

$$(\dagger) \quad q_A \text{ è definita negativa } \Leftrightarrow \boxed{(-1)^i \det A_i > 0}$$

$$\forall i=1, 2, \dots, n \quad a_{11} < 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \dots$$

segue subito da q_A definita negativa $\Leftrightarrow q_{-A}$ è definita positiva



A_{n+1}

A_n ha rango n

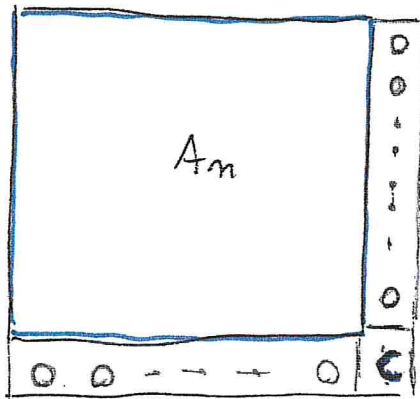
\Rightarrow $\boxed{* * \dots *}$ = col. delle
righe di $A_n \Rightarrow$

(simmetria) $\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$ \in cl.

delle colonne di A_n con gli stessi coefficienti

Pertanto, è possibile trasformare A_{n+1} nella
forma

[algoritmo di
Gauss simmetrico:
costruisce
passo passo
matrici congruenti
alla data



A_{n+1} \leftarrow abuso di
notazione

senza mutare
il segno del determinante

$$\Rightarrow 0 < \det A_{n+1}$$

$$= \det A_n \cdot c$$

$$\Rightarrow c > 0$$

Sicché

$$q_{A_{n+1}}(v) = \underbrace{x^T A_n x}_v + \underbrace{c x_{n+1}^2}_v$$

\downarrow
 se $x \neq 0$
 per l'ipotesi
 inattiva

e concludiamo \square

\downarrow
 \downarrow
 se $v \neq 0$

* Lemma Sia $A = (a_{ij})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^T$
 allora $A \approx B$ ponendo $B := a_{n-i, n-j}$

Demonstrazione: Sia dato il cambiamento di base $M: e_j \mapsto e_{n-j}$

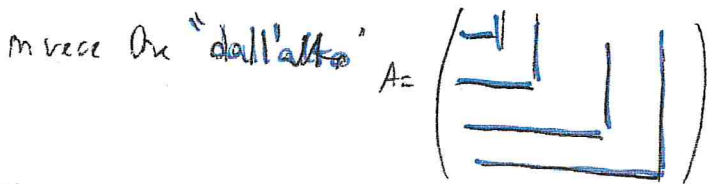
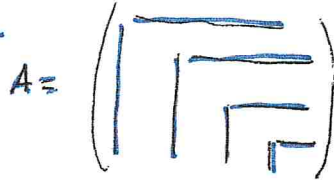
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{E' } M^T = M \text{ e}$$

$$M^T A M = B$$

(anche $M = M^T = M^{-1}$)
 $\Rightarrow \det A = \det B$

Di conseguenza, A e B hanno la stessa segnatura.
 (di più, sono simili)

* Corollario La matrice di una quadratica può essere studiata "dal basso"



Studiare A
 in questo modo
 equivale a studiare
 la matrice B
 col base associata
 il tutto unito per la
 matrice "partiale"

$$A \approx B$$

ex:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

matrice

$$a_{44} = a_{44}$$

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{44} & a_{43} \\ a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{44} & a_{43} & a_{42} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

e $\det A = \det B$

★ classificazione affine delle quadriche

⚠ si prendano i segni superiori e inferiori contemporaneamente

Algoritmo per le quadriche generali ($\mathbb{R} \neq 0$)

quadrica	conica all'1°	\mathcal{O}_2	$\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_0$	$\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1$	\mathcal{O}_3
Q	\mathcal{C}_{00}	\mathcal{O}_2	$\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_0$	$\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1$	\mathcal{O}_3
sgn(A)	sgn(A ₀₀)	det A	det A ₀₀	det A ₁₁	a_{33}
segno	segno				
(4, 0)	(3, 0)	+	±	+	±
(0, 4)	(0, 3)				

▲ test: Q è a pti reali? se ↗ \rightarrow ellissoide a pti immaginari (◆)

★ Se non si è nel caso (◆) Q è a pti reali

pti ellittici	conica generale				
(3, 1)	(3, 0)	-	±	+	±
(1, 3)	(0, 3)				

\rightarrow ellissoide (◆◆)

▲ sub-test: Q, a pti reali, è un ellissoide?

★ se non si è nel caso (◆◆)

pti iperbolici	conica generale				
(2, 2)	(2, 1)	+	±	\rightarrow	iperbolicoide (iperbolico) (a una falda)
(2, 2)	(1, 2)				
pti ellittici	conica generale				
(3, 1)	(2, 1)	-	±	\rightarrow	iperbolicoide ellittico (a due falde)
(1, 3)	(1, 2)				
pti ellittici	conica spuntata				
(3, 1)	(2, 0) (0, 2)	-	o	\rightarrow	parabolicoide ellittico
(1, 3)	(0, 2)				
(2, 2)	(1, 1)	+	o	\rightarrow	parabolicoide iperbolico
pti iperbolici					

* Coni e cilindri

$r(A) = 3$

$X^T A X = 0$

$\alpha = 0$

↓
vertice
proprio

↓
vertice
improprio

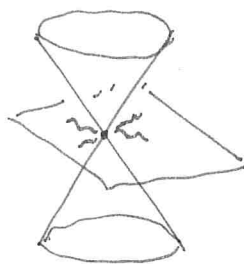
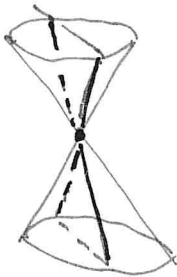
Ricordiamo che, a livello proiettivo, tagliando un cono con un piano per il vertice si ottengono o una coppia di generatrici (che possono risultare immaginarie se il cono è immaginario (il vertice è comunque reale)) o una coppia di rette complesse coniugate

si ha $\alpha_{00} \neq 0 \Leftrightarrow$

V è proprio. Infatti

$\alpha_{00} \neq 0 \Leftrightarrow$ la conica C_{00}

è generale $\Leftrightarrow \pi_{00}$ non contiene il vertice V



Si ha allora il seguente schema

α	α_{00}	α_{11}^{∞}	a_{33}	
0	+	+	+	} cono a generatrici immaginarie [il vertice V è reale]
0	-	+	-	
0	segno di C_{00} (1,2) o (2,1): cono reale			



Se $\alpha_{00} = 0$ si ha un cilindro:

$r(A) = 3 \quad r(A_{00}) = 2$

