* Quadriche a **centro**: equazioni canoniche **metriche** (†)

dettagli geometrici

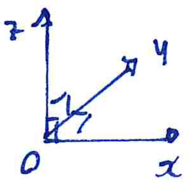
"Riduzione agli assi principali"

Gli assi diventano mutuamente **ortogonali**:

$X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ diventano i **vertici** di un triangolo **autopolare** su π_∞ **comune** a C_∞ e all'assoluto A_∞.

(†) Due quadriche sono metricamente equivalenti se sono trasformabili l'una nell'altra tramite un **movimento rigido**

I piani xy, xz, yz sono detti piani **principali** (e sono mutuamente ortogonali)



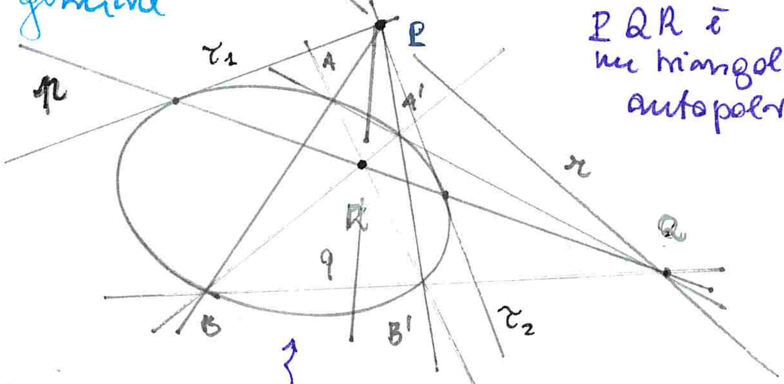
$X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ provengono da una base **ortonormale** di A_{00} costituita da **autovettori** di A_{00}

[ciò è possibile in virtù del **teorema spettrale**]

Notare che l'equazione $\boxed{P_C^{A_{00}}(\lambda) = \det(A_{00} - \lambda I) = 0}$ è quella che determina le coniche **degeneri** del fascio generato da C_∞ e A_∞.

assi di Q ≡ **direzioni degli autospazi di A_{00}** (nel caso di molteplicità 1, altrimenti sono individuati da una **base ortonormale** dell'**autospazio** in questione)

Prima di procedere oltre richiamiamo, senza entrare nei dettagli, la seguente costruzione della polare di un punto rispetto ad una conica generale



PQR è un triangolo autopolare

ABB'A' + diagonali: quadrangolo completo

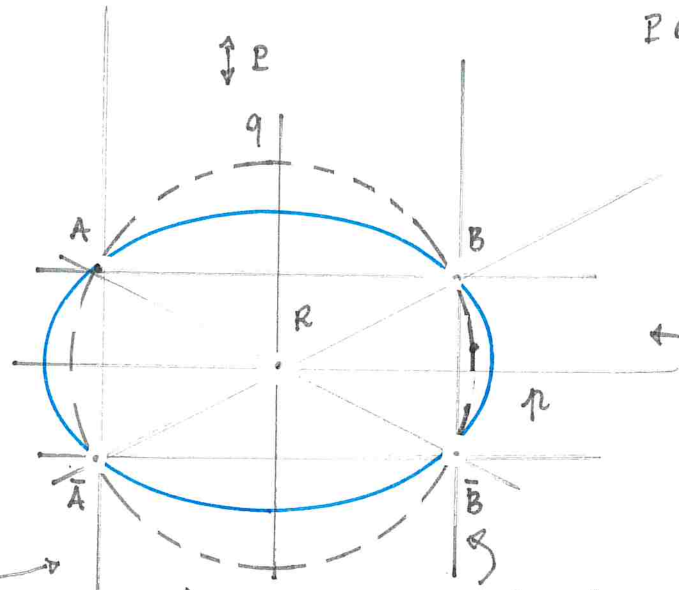
APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Marco Spera, Elena Zizioli

Lezione XXX

$PQ = r$

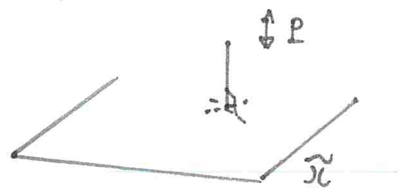
$A\bar{A}$, $B\bar{B}$:
giacitura delle
sezioni circolari



$A_\omega \rightsquigarrow$ governa le relazioni di perpendicolarità

p: giacitura con direzione perpendicolare individuata da P

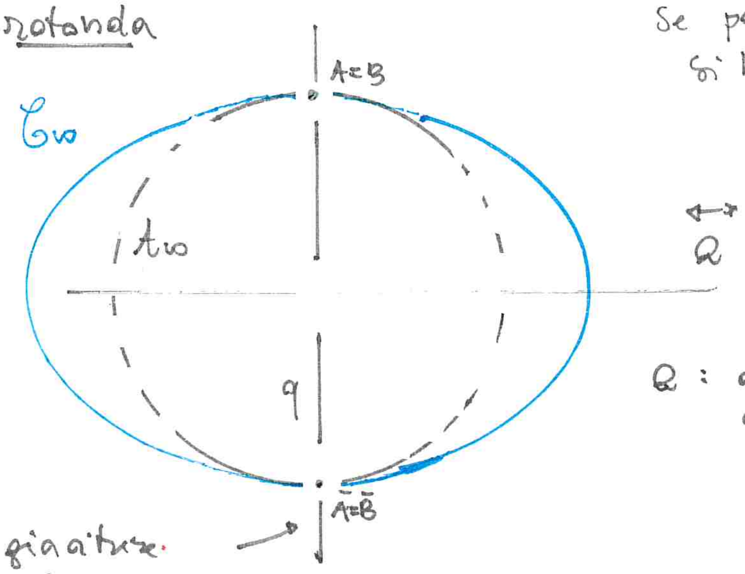
ecc.



$r^{\omega}_{\pi} = p$

Nel caso si abbia $A \equiv B$ si ha una quadrica rotonda

Se poi $C_\omega = A_\omega$ si ha una sfera



Q: direzione dell'asse di rotazione

le due giaciture che individuano le sezioni circolari coincidono

★ Il metodo degli invarianti (ortogonali) per le quadriche

Riprendiamo l'equazione caratteristica

$$\boxed{P_C^{A_{00}}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0}$$

che prende la forma

$$\boxed{\lambda^3 - \mathcal{I}\lambda^2 + \mathcal{J}\lambda - \Omega_{00} = 0} \qquad (★)$$

sussiste l'invarianza rispetto a $O(3)$ (trasformazioni ortogonali) più in generale, rispetto ai movimenti rigidi, quindi includendo le traslazioni

con

invarianti ortogonali

$$\begin{cases} \mathcal{I} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathrm{Tr}\, A_{00} & \text{invariante lineare} \\ \mathcal{J} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \text{invariante quadratico} \\ \Omega_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A_{00} & \text{invariante cubico} \end{cases}$$

($\Omega = \det A$: invariante biquadratico (non è un invariante ortogonale, il suo segno è un invariante proiettivo

(★) ha tre soluzioni reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (per il teorema spettrale), contate con la loro molteplicità.

Si ha $\boxed{\mathcal{I} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$, $\mathcal{J} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, $\Omega_{00} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

✱ Quadriche a centro: $\boxed{\Omega \neq 0 \,,\ \Omega_{00} \neq 0}$

Il sistema di riferimento ha origine nel centro e assi mutuamente ortogonali aventi come direzioni i vertici di un triangolo autopolare comune alla conica all'infinito $\mathcal{C}_\infty$ e all'assoluto $\mathcal{A}_\infty$

L'equazione canonica può essere scritta nella forma

$$\boxed{\rho\,\frac{x^2}{\alpha} + \rho\,\frac{y^2}{\beta} + \rho\,\frac{z^2}{\gamma} - \rho = 0 \qquad \rho \neq 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{I} &= \rho\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ \mathcal{J} &= \rho^2\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right) = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3 \\ \Omega_{00} &= \rho^3\,\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \qquad\qquad \Omega = -\rho^4\,\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho = -\frac{\Omega}{\Omega_{00}} \qquad (\blacklozenge)}$$

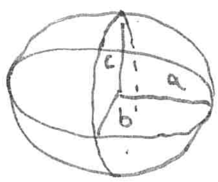
Le radici $\lambda_1 = \frac{\rho}{\alpha}$, $\lambda_2 = \frac{\rho}{\beta}$, $\lambda_3 = \frac{\rho}{\gamma}$ si ottengono risolvendo (✱). Dalla ($\blacklozenge$) si risale ad α, β, γ e quindi ai semiassi (†)

Notiamo che ($\blacklozenge$) ci dice che ρ non può essere scelto direttamente uguale a 1 (e quindi, di fatto, risultare irrilevante)

(†) $\alpha = \pm a^2$, $\beta = \pm b^2$, $\gamma = \pm c^2$ $\quad a, b, c$ semiassi

esempio: ellissoide

qui $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$ $\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$



★ <u>Paraboloidi</u> : $\mathcal{A} \neq 0 \quad \mathcal{A}_{00} = 0$

Equazione canonica :

$$\boxed{\rho \frac{x^2}{\alpha} + \rho \frac{y^2}{\beta} - 2\rho z = 0} \qquad \rho \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{Y} = \rho\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)}, \quad \mathcal{J} = \rho^2 \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{A}_{00} = 0$$

$$\boxed{\mathcal{A} = -\frac{\rho^4}{\alpha\beta}}$$

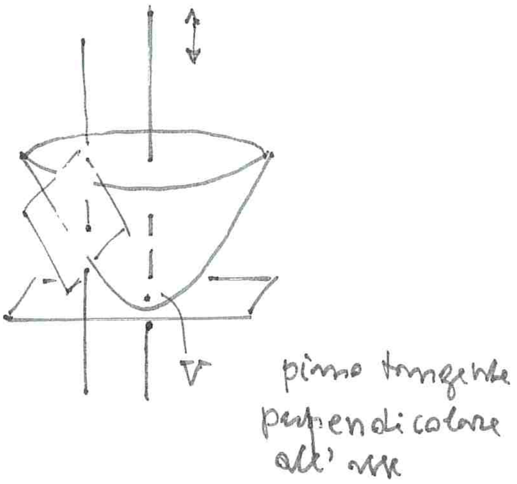
$$\Rightarrow \quad \rho = \pm\sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Y}}} \qquad (\blacklozenge)$$

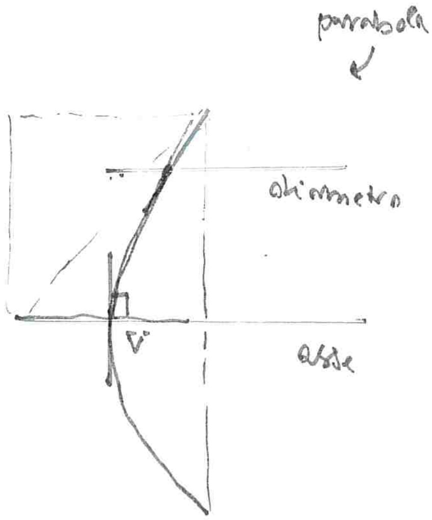
$\frac{\rho}{\alpha}$ e $\frac{\rho}{\beta}$ divengono le radici <u>non nulle</u> di (★)

e, tramite ρ, fornito da ($\blacklozenge$), si risale ad α e β.

di nuovo necessario

L'<u>asse</u> del paraboloide ha direzione individuata dal punto doppio di $\mathcal{C}_\infty$ (spezzata in due rette) e passa per il <u>vertice</u> : in tale punto il piano tangente risulta <u>perpendicolare</u> all'<u>asse</u>





* Coni $\{\Omega = 0 \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0\}$

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 0}$$

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}$$

$$\Omega_{00} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\boxed{\lambda^3 - \mathcal{Y}\lambda^2 + \mathcal{J}\lambda - \Omega_{00} = 0}$$

Le radici $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità.

Il vertice del cono è l'origine; gli assi hanno come direzioni i vertici di un triangolo autopolare comune a Γ_∞ e a A_∞.