4 Studiamo $\boxed{Q: \; 2xy + 2xz + 2yz = 1}$

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Lezione XXXI

Marco Spera, Elena Zizioli

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_{00}

$$\alpha = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\left(1+1\right) = -2 < 0$$

quadrica a punti ellittici

$\alpha_{00} = 2 > 0$ ... è a pti reali

$\alpha_{11}^{00} = -1 < 0 \Rightarrow$ iperboloide ellittico

$a_{33} = 0$ (a due falde, non rigato)

ha centro in O

[mancano i termini di primo grado]

Calcoliamone gli invarianti ortogonali.

$(\alpha = -2)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 - 1 + \lambda + \lambda + \lambda = $$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$\boxed{\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0}$ $\qquad$ $\boxed{\lambda^3 - \mathcal{Y}\lambda^2 + \mathcal{J}\lambda - \alpha_{00} = 0}$

$\boxed{\mathcal{Y} = 0 \; ; \; \mathcal{J} = -3 \; ; \; \alpha_{00} = 2}$

radici $\lambda = -1$ doppia $\qquad 3\lambda^2 - 3 = 0$

$\lambda = 2$ semplice $\qquad$ * trovate tra i divisori di -2

l'iperboloide è di rotazione

Troviamone l'asse, di direzione $V_2^{A_{00}}$

(e passante per O)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{cases} -2l + m + n = 0 \\ l - 2m + n = 0 \\ l + m - 2n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -l \cancel{-m} + 2n = 0 \\ 2l - \overset{2}{2}m + \overset{2}{n} = 0 \\ l + m - 2n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{3}m + \cancel{3}n = 0 \\ \cancel{3}l - \cancel{3}m = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} m = n \\ m = l \end{matrix} \qquad \leadsto \bar{V}_2^{A_{00}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

asse: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Alternativamente, si trova una base ortogonale di $V_1^{A_{00}}$, si trovano i piani polari dei corrispondenti punti all'infinito: la loro intersezione è l'asse di rotazione.
Il centro è dato poi dall'intersezione di tre piani polari (relativi ad una base ortogonale di autovettori di A_{00}

l'equazione canonica è

$$\frac{\rho}{\alpha}x^2 + \frac{\rho}{\beta}y^2 + \frac{\rho}{\gamma}z^2 = \rho$$

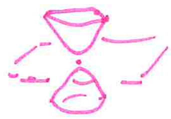
$$\boxed{\Omega = -2\,, \quad \rho = -\frac{\Omega}{\Omega_{00}} = 1}$$

Poniamo $\beta = \gamma$

$$\frac{\rho}{\alpha} = 2 \qquad \frac{\rho}{\beta} = \frac{\rho}{\gamma} = -1$$

radice doppia

$$\Rightarrow \boxed{2x^2 - (y^2 + z^2) = 1}$$



[iperboloide ellittico, di rotazione]

controllo rapido:
sezionando con $x = 0$ troviamo una conica immaginaria

★ Determiniamo il tipo metrico di

$$\boxed{Q:\ x^2+y^2+z^2+2yz+2y-2z=0}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$$

utilizziamo il il metodo degli invarianti

$$\alpha=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{\text{Sarrus}}{=}-1-1-1-1=-4<0$$

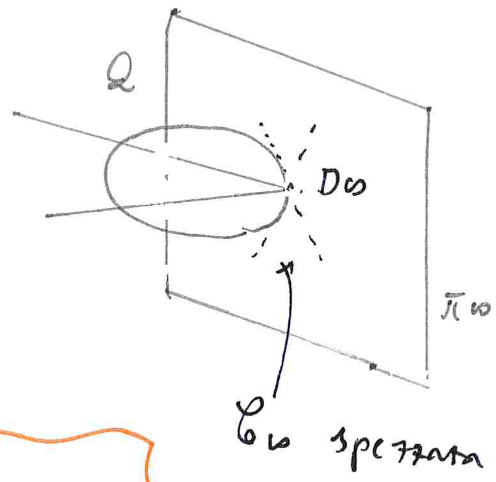
$\rightsquigarrow$ Q è a punti ellittici

$$\alpha_{00}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$$

uguali

$\rightsquigarrow$ Q è un paraboloide ellittico

Troviamo la direzione dei diametri $D_\infty = V_0^{A_{00}} = \ker A_{00}$



$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}l=0\\m+n=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{V_0^{A_{00}}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}$$

$$\boxed{D_\infty:\ [0,0,1,-1]}$$

$$p_c^{A_{00}}(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]$$

$$=(1-\lambda)(\cancel{1}-\lambda\cancel{-1})(1-\lambda+1)$$

$$=-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda=0,\ \lambda=1,\ \lambda=2$

$$V_1^{A_{00}}:\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow m=n=0,\ l\neq0$$

$$\boxed{V_1^{A_{00}}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}$$

$$\bar{V}_2^{A_{\infty}}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l = 0 \\ m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{V}_2^{A_{\infty}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

4 piani principali π_1, π_2 piani polari di $D^1_\infty : [0, 1, 0, 0]$ e $D^2_\infty : [0, 0, 1, 1]$

$\boxed{\text{asse} : \pi_1 \cap \pi_2}$

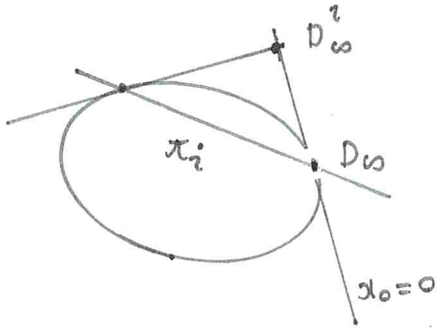
$D_\infty, D'_\infty, D^2_\infty$ no triangolo autopolare rispetto all'assoluto A_∞

$$\pi_1: \quad (x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 = 0 \qquad \boxed{\pi_1 : x = 0}$$

$$\pi_2: \quad (x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \cancel{2}x_2 + \cancel{2}x_3 = 0 \qquad \boxed{\pi_2 : y + z = 0}$$



asse: $a = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

vertice del paraboloide

$V = a \cap Q$; $V = O : (0,0,0)$

al finito

XXXI – 4

Infatti, da $x=0$, $y+z=0$ ($z=-y$) si ha

$$2y^2-2y^2+2y+2y=0 \Rightarrow y=0$$

(e $z=0$, $x=0$)

[l'altra intersezione è D_∞]

asse del paraboloide $a = \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$

vertice $V: (0,0,0)=O$

Equazione canonica metrica

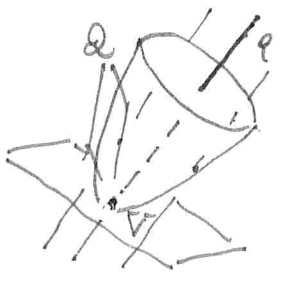
$$\rho = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \pm\sqrt{2} \qquad \frac{\rho}{\alpha}=1 \qquad \frac{\rho}{\beta}=2$$

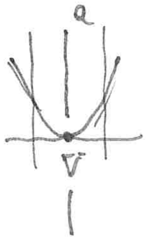
$$\left[\rho\frac{X^2}{\alpha}+\rho\frac{Y^2}{\beta}-2\rho Z=1\right]$$

scegliamo $+$:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}X^2+\sqrt{2}\,Y^2=2Z\right]$$

(e ritroviamo un paraboloide ellittico)





variante:
In alternativa, a partire dall'equazione di un generico diametro, si trova l'intersezione con Q e si impone che il piano tangente in quel punto sia ortogonale al diametro.
Il diametro trovato è l'asse e il punto è il vertice (v. figure)