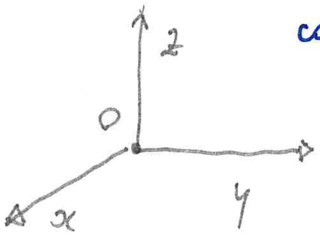
★ Determinare le quadriche contenenti gli assi coordinati

Lezione XXXII



trovaremo $\infty^{9-7} = \infty^2$ quadriche

Si impongono 7 condizioni lineari:

- passaggio per O (1)
- passaggio per 2 ulteriori punti dell'asse x (sicché quest'ultimo è contenuto nella quadrica. (2)

ecc.

In tutto $1 + 3 \cdot 2 = 1 + 6 = 7$.

O è sicuramente un punto doppio, altrimenti il piano tangente conterrebbe i tre assi.

L'equazione sarà intanto del tipo

$$Q: \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + pxy + qxz + ryz = 0$$

Ma, poiché l'asse z $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ è contenuto in Q, si avrà

$$cz^2 \equiv 0 \Rightarrow c = 0 \quad \text{e, analogamente,} \quad a = b = 0.$$

Pertanto

$$\boxed{Q: \quad pxy + qxz + ryz = 0}$$ 3 due parametri effettivi

Troviamo effettivamente $\infty^{9-7} = \infty^2$ quadriche, in generale coni con vertice in O, se $r(A) = 3$

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & p & 0 & r \\ 0 & q & r & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\alpha = 0 \\ &\alpha_{00} = 2pqr \neq 0 \text{ se } \begin{cases} p \neq 0 \\ q \neq 0 \\ r \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

vertice proprio (in α)

* Studiamo in particolare (notare)

$$Q: \; 2(xy + xz + yz) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = 0 \qquad r_{00} = 2$$

(in A, the block $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ is A_{00})

Esaminiamo A_{00}

$$p_c^{A_{00}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + \lambda + \lambda + \lambda$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$p_c^{A_{00}}(\lambda) = 0 \iff p := \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

Troviamo le eventuali radici razionali (di fatto, intere) tra i divisori di -2: $\pm 1, \pm 2$

Si vede che $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$ sono radici; derivando p rispetto a λ si ha $p' = 3\lambda^2 - 3$ e $\lambda = -1$ è radice di p', dunque è doppia.

Conclusione: $\lambda = 2$: radice semplice
$\lambda = -1$: radice doppia

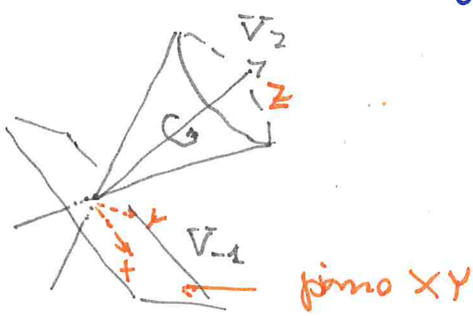
$\Rightarrow$ il cono è rotondo

$V_2^{A_{00}}$ e $V_{-1}^{A_{00}}$ sono ortogonali

$V_2^{A_{00}} \to$ asse

$V_{-1}^{A_{00}} \to$ giacitura dei piani $\perp$ asse

ortospazi



Determiniamoli:

$\overline{V}_{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 1 \qquad \nu = 2 \qquad (2+1=3)$

$\Rightarrow \overline{V}_{-1} : \quad x+y+z=0 \quad \sim$ piano XY

$\overline{V}_2 = \overline{V}_{-1}^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \sim$ asse Z

nuove coordinate

L'equazione canonica metrica sarà del tipo

$$\boxed{X^2 + Y^2 - \xi Z^2 = 0}$$

Determiniamo ξ col <u>metodo degli invarianti ortogonali</u>

$$\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} + \frac{Z^2}{\gamma} = 0 \qquad I = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

$$J = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}$$

$$\Omega_{00} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - \Omega_{00} = 0 \qquad A_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta} = -1 \\ \dfrac{1}{\gamma} = 2 \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \xi = 2$$

$$\boxed{X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 0}$$

<u>Equazione canonica metrica di Q</u>

4 Essendo il cono rotondo, le due giaciture che individuano le sezioni circolari (teorema di Apollonio), coincidono. Tuttavia è istruttivo determinarle ex novo.

La conica $\mathcal{C}_\infty$ è: $\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

L'assoluto $A_\infty = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

Sul piano improprio $x_0 = 0$, studiamo

in coordinate affini x, y

$$\begin{cases} xy + x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $xy = -(x+y)$.
Quadrando e utilizzando la seconda equazione si ha, successivamente:

$$x^2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2xy - 1,$$

ovvero

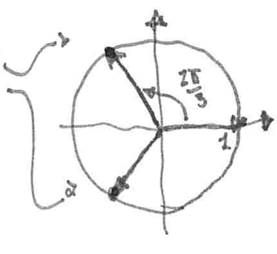
$$(xy)^2 - 2(xy) + 1 = 0$$

$$((xy) - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = 1 \quad \text{doppia}$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x}$. Risostituendo nella prima equazione si trova $1 + x + \frac{1}{x} = 0$, cioè

$$\boxed{x^2 + x + 1 = 0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

(le radici cubiche di 1 diverse da 1)



$$\Rightarrow x_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \overline{x_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

troviamo i punti di intersezione (ripetuti)

$$A : [0, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1] = [0, -\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

$$\bar{A} : [0, -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

La retta $A\bar{A}$ (contata due volte(+)) coincide con la retta passante per i punti reali $A+\bar{A}$ e $A-\bar{A}$

(+) ciò conferma che si tratta di una quadrica rotonda

$$A+\bar{A} : [0, -1, -1, 2]$$

$$A-\bar{A} : [0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 0] = [0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0] = [0, 1, -1, 0]$$

$$A\bar{A} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = -\lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda - \mu \\ x_3 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e ritroviamo, ovviamente, il risultato precedente: il cono è di rotazione attorno alla retta per O perpendicolare ai piani $x + y + z + k = 0$ $k \in \mathbb{R}$

Se ora, ad esempio, $k = -3$, otteniamo il piano $x+y+z-3=0$, passante per i punti $P_1 : (3,0,0)$, $P_2 : (0,3,0)$, $P_3 : (0,0,3)$ ($P_i \in Q$). La circonferenza sezione avrà centro $C : (1,1,1)$ e raggio $r = d(P_1, C) = \sqrt{(-2)^2+1+1} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$.

Procediamo ora a ritroso, determinando la superficie ottenuta ruotando, ad esempio, l'asse z attorno alla retta $r: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

$s: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$ Sia π_t il piano per $\boxed{P_t: (t,t,t)}$ perpendicolare a r:

$$\boxed{\pi_t: \quad x+y+z-3t=0}$$

$$\pi_t \cap s = \boxed{Q_t: (0,0,3t)}$$

$$\overline{P_t Q_t}^2 = t^2+t^2+(2t)^2 = 2t^2+4t^2 = 6t^2$$

Sia Σ_t la sfera di centro P_t e raggio $\sqrt{6}\,|t|$:

$$\boxed{(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2 = 6t^2}$$

Eliminiamo t dalla famiglia delle circonferenze $C_t = \pi_t \cap \Sigma_t$

$$t = \frac{x+y+z}{3} \qquad x-t = x-\frac{x+y+z}{3} = \frac{2x-y-z}{3} \quad \text{e simili.}$$

Si ha

$$\frac{(2x-y-z)^2}{\cancel{9}} + \frac{(2y-x-z)^2}{\cancel{9}} + \frac{(2z-x-y)^2}{\cancel{9}} = 6\,\frac{(x+y+z)^2}{\cancel{9}}$$

Dopo semplici calcoli si arriva a

$$\boxed{Q: \quad xy+xz+yz=0}$$