Lezione XXXIII

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA

Mauro Spera, Elena Zizioli

* Coniche confocali

Consideriamo una conica a centro $\mathcal{C}$, di equazione canonica metrica

$$(\diamond)\qquad \boxed{\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-1=0}\qquad \begin{array}{l} A=a^2>0 \\ B=\pm b^2 \gtrless 0 \end{array}$$

sia $a \geq b$ $(A \geq |B|)$

$$C := A-B = \begin{cases} a^2-b^2 & \text{ellisse} \\ a^2+b^2 & \text{iperbole} \end{cases}$$

(distanza focale)^2

Le coniche confocali a $\mathcal{C}$ (ossia con gli stessi fuochi) saranno date da

$$(\diamond\diamond)\qquad \boxed{\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}-1=0}\qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$(A+\lambda)-(B+\lambda) = A-B$

schiera di coniche

Interpretiamo il tutto proiettivamente

Ricordiamo l'equazione della conica $\mathcal{C}^*$ duale ad una conica generale $\mathcal{C}$.

Si utilizzano coordinate di retta $[x_0, x_1, x_2]$.

$(x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$

[Equazione di una retta nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0 \qquad (u_0,u_1,u_2) \neq (0,0,0)$$

coordinate di retta (o Plückeriane)]

Se $\mathcal{C}: \quad X^tAX = 0 \qquad A = A^T \in M_3(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$

si ponga $AX = \bar{U}$

$\Rightarrow X = A^{-1}\bar{U}$.

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \equiv A^{-T} = A^{-1}$ (se $A=A^T$)

L'equazione precedente diventa

$$0 = (A^{-1}U)^T U = U^TA^{-T}U = U^TA^{-1}U$$

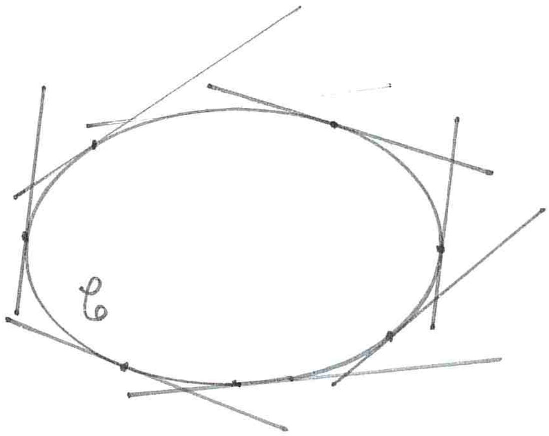
La conica $\boxed{\mathcal{C}^* : \quad U^TA^{-1}U = 0}$

nel piano proiettivo duale (coord. u_i) $(\mathbb{P}^2)^*$

è detta conica duale(+) o conica inviluppo: è $\mathcal{C}$ vista come inviluppo delle sue tangenti

[L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $P_0 \in \mathcal{C}$ è $P_0^TAX = X^TAP_0 = 0$]

(+) $\mathcal{C}^*$ è ancora una conica. In generale, per una curva algebrica piana $\mathcal{C}$ l'ordine della curva duale $\mathcal{C}^*$ (classe di $\mathcal{C}$) è diverso



Si trova che $\forall\, k \neq 0$ passano esattamente due coniche della schiera $(\diamond\diamond)$ e si tagliano ortogonalmente. Esamineremo in dettaglio tale proprietà nel caso delle quadriche.

"coordinate ellittiche di Jacobi"

Riscriviamo la $(\diamond)$ in forma omogenea:

$$\boxed{\mathscr{C} : \quad \frac{x_1^2}{A} + \frac{x_2^2}{B} - x_0^2 = 0}$$

La conica duale è $\boxed{\mathscr{C}^* : \quad A u_1^2 + B u_2^2 - u_0^2 = 0}$

Sia $\mathcal{A}$: $x_1^2 + x_2^2 = 0 \leftarrow$ rette isotrope per l'origine $x_2 = \pm i x_1$

"cono isotropo"

Si ha $\mathcal{A}^*$: $u_1^2 + u_2^2 = 0 \leftarrow$ rette isotrope per l'origine in coordinate di retta

Consideriamo il fascio di coniche (duali)

$$\boxed{\mathscr{C}^* + \lambda \mathcal{A}^* = 0}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (descrizione affine)

ossia

$$\boxed{(A+\lambda) u_1^2 + (B+\lambda) u_2^2 - u_0^2 = 0}$$

Dualizzando nuovamente (cioè tornando alle coordinate di punto) troviamo, dopo aver disomogeneizzato, la $(\diamond\diamond)$. In conclusione:

le coniche confocali ad una conica data si ottengono a partire dal fascio di coniche duali individuato dalla conica duale alla data e dalla conica degenere costituita dalle rette isotrope per l'origine tramite dualità. È questa l'interpretazione che si presta ad essere generalizzata alle quadriche

11 Quadriche confocali

La nozione duale di fascio di quadriche è quella di *schiera* di quadriche. Tenendo conto della discussione precedente si ha, mutatis mutandis

(u_i) coordinate di piano $\quad u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$

$(u_0, u_1, u_2) \neq (0,0,0)$

Q	diviene	Q^*
$X^T A X = 0$	$\longleftrightarrow$	$U^T A^{-1} U = 0$

$X \neq 0$

Q generale $\quad A^T = A$

$AX = U \quad X = A^{-1}U \quad 0 = X^T A X = (A^{-1}U)^T U = $

$= U^T A^{-T} U = U^T A^{-1} U$

si opera nello spazio proiettivo duale

Q^*: è Q vista come inviluppo dei suoi piani tangenti

Consideriamo il cono (immaginario) di vertice $V = 0$ proiettante l'assoluto A_∞ : $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

ovvero

$$\boxed{C : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0}$$

cono isotropo di vertice O

Dualizzando si trova

$$\boxed{C^* : \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0}$$

nello spazio duale

Consideriamo una quadrica a centro

$$\boxed{Q : \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0}$$

$A > B > C$

per fissare le idee

Procedendo come per le coniche

$$\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}^* \longrightarrow \mathcal{Q}^* + \lambda \mathcal{C}^* \xrightarrow{\text{dualizzando nuovamente}}$$

arriviamo alla schiera di quadriche confocali a $\mathcal{Q}$

$$\boxed{\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} - 1 = 0} \longleftarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

non è una condizione lineare in λ

$\ast$ Coordinate ellittiche nello spazio (C.G. Jacobi)

Partiamo dall'espressione precedente (con $\lambda \to -\lambda$ per comodità)

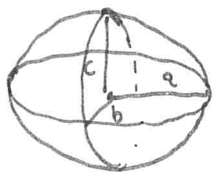
$$(\diamond) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1}$$

$$a^2 \equiv A, \quad b^2 \equiv B, \quad c^2 \equiv C$$

con $0 < C < B < A$ $\quad (0 < c < b < a)$:

se $\lambda = 0$ si ha un ellissoide triassiale

Poniamo in $(\diamond)$ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, coordinate di $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$



(supponendolo altresì $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$ i.e. P_0 non appartenente a nessuno dei piani coordinati). Liberandolo dai denominatori, si trova

$$(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda) - x_0^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda) - y_0^2(a^2-\lambda)(c^2-\lambda) - z_0^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda) = 0$$

$$\parallel\!\!|$$

$P_3(\lambda)$

$x_0 \neq 0$
$y_0 \neq 0$
$z_0 \neq 0$

polinomio di 3° grado in λ

ora, se $\lambda \to -\infty$ $P_3(\lambda)$ è definitivamente positivo

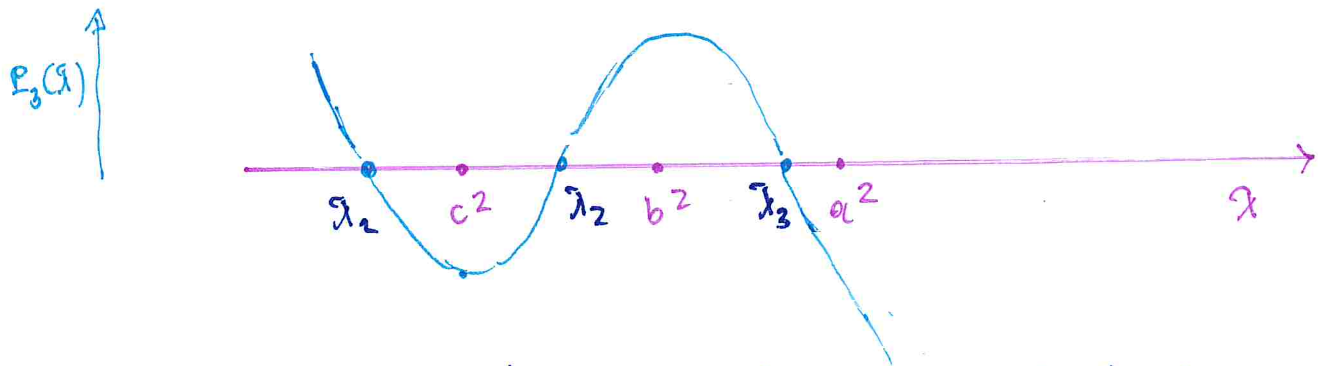
se $\lambda = c^2$ $P_3(c^2) < 0$

se $\lambda = b^2$ $P_3(b^2) > 0$

se $\lambda = a^2$ $P_3(a^2) < 0$

se $\lambda \to +\infty$ $P_3(\lambda)$ def. negativo

+
−
+
−



$\Rightarrow$ si hanno tre radici reali e distinte corrispondenti alle quadriche seguenti:

$\lambda_1 \longrightarrow$ ellissoide

$\lambda_2 \longrightarrow$ iperboloide iperbolico

$\lambda_3 \longrightarrow$ iperboloide ellittico

Pertanto, localmente possiamo descrivere i punti di $\mathbb{R}^3$ tramite $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (coordinate ellittiche di Jacobi)

Ora, in ogni punto siffatto, le tre superficie in questione si tagliano ortogonalmente, come vedremo a breve (ovvero, si ha un sistema di superficie triplamente ortogonale, sicché, per il teorema di Dupin, le intersezioni di due delle superficie in questione risultano essere linee di curvatura per entrambe)

Proseguendo per questa via si giungerebbe ad una costruzione geometrica delle geodetiche di un ellissoide triassiale

Il piano tangente ad una quadrica (λ) in $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ è

$$\frac{x_0 x}{a^2-\lambda} + \frac{y_0 y}{b^2-\lambda} + \frac{z_0 z}{c^2-\lambda} = 0$$

Posto $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$, per fissare le idee, dobbiamo trovare

$$\boxed{\frac{x_0^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)} + \frac{y_0^2}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)} + \frac{z_0^2}{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)} = 0}$$

Che è vera: basta imporre l'appartenenza di P_0 alle due quadriche e sottrarre le equazioni risultanti:

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2-\lambda_1} - \frac{x_0^2}{a^2-\lambda_2}\right) + \text{termini analoghi} = x_0^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)} + \ldots$$

$\neq 0$ comune

$= 0 \quad \square$