Lezione XXXIV

APPROFONDIMENTI DI GEOMETRIA V2

Mauro Spera, Elena Rizzoli

Quadriche confocali (segue)

Sia Q una quadrica a centro

$$Q: \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0 \qquad A > B > C$$

sia $P: (\xi, \eta, \zeta)$ generico,

$$\pi: \quad l(x-\xi) + m(y-\eta) + n(z-\zeta) = 0$$

$(l, m, n) \neq (0,0,0)$

un piano per P e sia Q il suo polo rispetto a Q ($Q \in \pi_P^Q$).

Vogliamo far sì che $\boxed{PQ \perp \pi}$. Da

$$Q: \left(\frac{Al}{\xi l + \eta m + \zeta n}, \frac{Bm}{\cdot}, \frac{Cn}{\cdot} \right)$$

si ha che

PQ ha parametri direttori

$$\big((\xi^2 - A)l + \xi\eta m + \xi\zeta n, \quad \eta\xi l + (\eta^2 - B)m + \eta\zeta n,$$
$$\zeta\xi l + \zeta\eta m + (\zeta^2 - C)n \big)$$

e il vettore dato deve dunque risultare proporzionale a (l, m, n), ovvero deve esistere $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} \xi^2 - A - k & \xi\eta & \xi\zeta \\ \eta\xi & \eta^2 - B - k & \eta\zeta \\ \zeta\xi & \eta\zeta & \zeta^2 - C - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica reale

$\det(\quad) = 0$

$$\begin{vmatrix} \xi^2 - A - k & \xi\eta & \xi\zeta \\ \xi\eta & \eta^2 - B - k & \eta\zeta \\ \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta^2 - C - k \end{vmatrix} = 0$$

(Sarrus)

$$0 = \{\xi^2 - (A+k)\}\{\eta^2 - (B+k)\}\{\zeta^2 - (C+k)\}$$
$$+ 2\xi^2\eta^2\zeta^2 - \{\xi^2 - (A+k)\}\zeta^2\eta^2$$
$$- \{\eta^2 - (B+k)\}\xi^2\zeta^2$$
$$- \{\zeta^2 - (C+k)\}\xi^2\eta^2$$

Proseguendo

$$0 = -(\lambda+A)(\lambda+B)(\lambda+C) + \cancel{\xi^2\eta^2\zeta^2} +$$

$$+ \xi^2(B+\lambda)(C+\lambda) + \eta^2(A+\lambda)(C+\lambda) + \zeta^2(A+\lambda)(B+\lambda)$$

$$- \cancel{\xi^2\eta^2}(C+\lambda) - \xi^2\zeta^2(B+\lambda) - \eta^2\zeta^2(A+\lambda)$$

$$+ 2\xi^2\eta^2\zeta^2 - \xi^2\eta^2\zeta^2 + (A+\lambda)\zeta^2\eta^2$$

$$- \eta^2\xi^2\zeta^2 + \xi^2\zeta^2(B+\lambda) - \cancel{\zeta^2\xi^2\eta^2} + \cancel{(C+\lambda)\xi^2\eta^2}$$

$$-(\lambda+A)(\lambda+B)(\lambda+C) + \xi^2(B+\lambda)(C+\lambda) + \eta^2(A+\lambda)(C+\lambda)$$
$$+ \zeta^2(A+\lambda)(B+\lambda) = 0$$

★ discriminante cubico

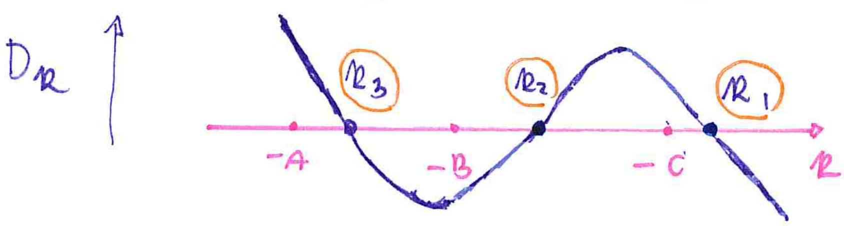
$$\boxed{D_\lambda = 0}$$

ora, ragionando come nel caso delle coordinate ellittiche, si trovano, successivamente, per $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$, $A > B > C$

$-C > -B > -A$

tre radici reali e distinte λ_i, $i = 1, 2, 3$

$$-A < \lambda_3 < -B < \lambda_2 < -C < \lambda_1$$



che danno luogo ad una terna di piani per P, π_1, π_2, π_3, mutuamente ortogonali in forza del teorema spettrale.

Se ora D_k ha uno zero doppio (e allora non può essere $\xi \neq 0, \eta \neq 0, \zeta \neq 0$), ad esempio $k_1 = k_2 \neq k_3$, π_3 ha un'unica giacitura, mentre π_1 e π_2, pur potendosi scegliere perpendicolari, possiedono una qualsiasi giacitura ortogonale a π_3.

Pertanto, in questo caso ci sono ∞^1 piani per P tra loro perpendicolari e coniugati rispetto alla quadrica Q (polo dell'uno contenuto nell'altro)

** Il punto P è, per definizione, un fuoco di Q.

Determiniamo i fuochi di Q.

Supponiamo, per fissare le idee, $\zeta = 0$. Si ha:

$$\boxed{D_k = \left\{ \underbrace{-(k+A)(k+B) + \xi^2(k+B) + \eta^2(k+A)}_{\text{da sola, non ha uno zero doppio}} \right\}(k+C)}$$

Lo zero doppio deve essere $k = -C$, e deve essere radice dell'equazione tra $\{\ \}$. Si ha allora

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{A-C} + \dfrac{\eta^2}{B-C} = 1 \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

* * conica focale

* ellisse

Analogamente

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{C-B} + \dfrac{\zeta^2}{A-B} = 1 \\ \eta = 0 \end{cases}$$

* iperbole

$$\begin{cases} \dfrac{\eta^2}{B-A} + \dfrac{\zeta^2}{C-A} = 1 \\ \xi = 0 \end{cases}$$

* non è a punti reali

(ellisse immaginaria

$B-A<0$

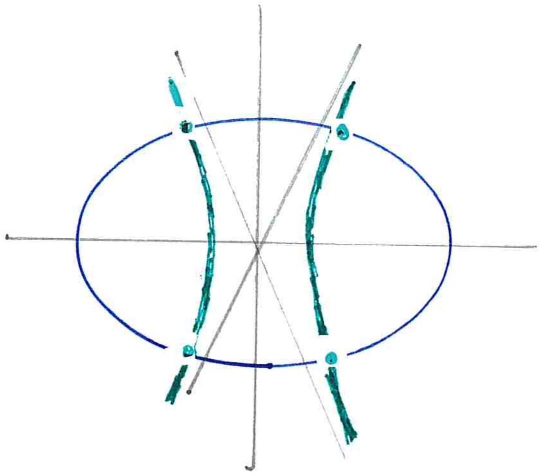
$C-A<0$

Solo una delle coniche ha intersezioni reali con Q (quattro in tutto)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} + \dfrac{z^2}{C} = 1 \\ \dfrac{x^2}{A-C} + \dfrac{y^2}{B-C} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} = 1 & (1) \\ \dfrac{x^2}{A-C} + \dfrac{y^2}{B-C} = 1 & (2) \\ z = 0 \end{cases}$$

se $\underline{B < 0 < A}$ (1), unita a $z=0$, è un' iperbole

(2) è sempre un' ellisse (unita a $z=0$), e si intersecano



$B < 0 \Rightarrow B = -|B|$

$\Rightarrow C < 0$

$(C = -|C|)$

$0 < A < A - C = A + |C|$

Altrimenti, se $0 < B < A$, si hanno due ellissi, senza intersezioni reali

Se $P \notin Q$, i piani π_i in questione divengono i piani principali relativi al cono tangente C_P^Q

Nel caso di due radici coincidenti, il cono risultante è rotondo.

Pertanto: Le coniche focali costituiscono il luogo dei punti da cui si può circoscrivere un cono rotondo alla data quadrica a centro.
In altre parole, le coniche focali consistono dei punti da cui il contorno apparente della quadrica risulta circolare.

Si noti come la nozione di fuoco di una quadrica sia piuttosto sottile. Se tentassimo, ad esempio, di definire un ellissoide come luogo dei punti tali che la somma delle distanze da due punti fissi sia costante, troveremmo (riflettere!) solo ellissoidi di rotazione, e non l'ellissoide generale (triassiale).