

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. Mauro SPERA - UCSC Brescia

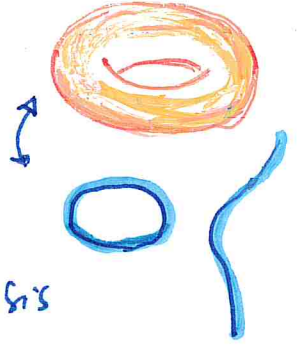


Table of contents (tentative)

- Prologue : The Riemann sphere
 elements of complex analysis
 RS: informal discussion.
 Elliptic and Abelian integrals

• Plane algebraic curves

Resultants

- Singularities of plane curves
 Newton-Puiscux, blow-up
 connections with knots and braids

- Singular points
- Bézout's theorem
- genus
- Plücker formulae
- Examples
- Elliptic curves & group law theorem

• Riemann surfaces

Wierstraß, Weyl (classical approach)

Compact RS =
 algebraic curve
 (up to Riemann-Roch)

Riemann - Nechitz

Plücker via RH

Abel's theorem via RH

Poincaré - Pöpf

Klein's formulae

example: elliptic integrals

• Function theory on RS

Riemann estimate
 via Klein and Enriques-Chiari

Riemann fundamental theorem

Riemann-Roch. Uniformization
 geometric interpretation (Klein series)
 (Noether)

Modern interpretation (holomorphic line bundles)
 via RH

In coordinate complesse ... complex coordinates

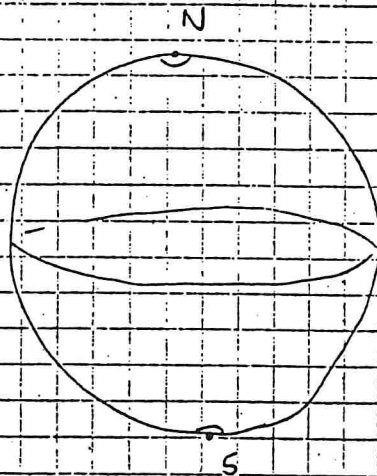
$$\zeta = u + iv$$

N : non è rappresentabile non rappresentabile

$$S = (0, 0)$$

vice versa, proiezione from S
vice versa, proiezione da S, $P \neq S$.

$$\Rightarrow \exists \zeta' = u' + iv' = \frac{1}{\zeta} \text{ per } P \in S^2 - \{N, S\}$$



Il piano equatoriale
ha orientamento
opposto
Il piano equatoriale
è inclinato con
l'opposto orientamento

$$\Rightarrow \star S^2 \cong \mathbb{C}P^1 : \text{retta proiettiva complessa}$$

"Sfera di Riemann" Riemann sphere

homogeneous coordinates coordinate omogenee

$$\mathbb{C}P^1 = \{ (z_0, z_1) / \sim \mid (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 - \{0, 0\} \}$$

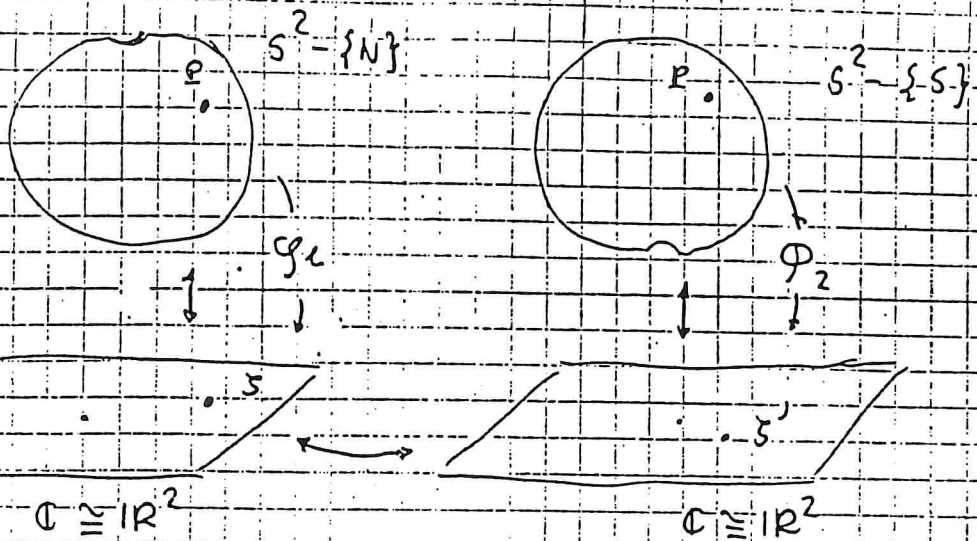
$$(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z'_0 = \lambda z_0 \\ z'_1 = \lambda z_1 \end{cases}$$

$\exists \lambda \neq 0$ ζ, ζ' coordinate non omogenee

$$\zeta = \frac{z_1}{z_0} \text{ non-homogeneous}$$

★ Commento Comment

★ S^2 è descritta da due "carte" is described via two charts



legate da una legge di trasformazione

... $S' = \frac{1}{S}$ related by the following transformation law

questo conduce al concetto di varietà di fibrato S^2 è una varietà differenziabile e quindi a complex manifold

Riemannian metric

Metrica $\propto \frac{du^2 + dv^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$

$\frac{dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$ (vedi oltre...)

The transformation law being

bi holomorphic

★ Riemann surface

Holomorphic functions

FUNZIONI OLOMORFE

\star ^{Let} Sia $U \subset \mathbb{C}$ a region (open connected set)
 (aperto connesso)

$(\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2) \quad z = x + iy$

\star ^{Let} Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) := u(z) + i v(z) \equiv u(x, y) + i v(x, y)$$

u ^{real part of} parte reale di f $(=: \operatorname{Re} f)$

v ^{imaginary part of} parte immaginaria di f $(=: \operatorname{Im} f)$

Any such function induces a plane transformation in a natural way:
 una tale funzione induce in modo naturale una trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in U$$

\star ^{Let} Sia $f \in \mathcal{C}^1(U)$ (ovvero: $u, v \in \mathcal{C}^1(U)$)

(cio semplifica moltissimo la trattazione...)

This highly simplifies our treatment

-5- [Actually, a holomorphic function will be automatically \mathcal{C}^∞]

Let
 fix $z_0 \in \mathcal{U}$

is said to be holomorphic

★ Def. $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa in $z_0 \in \mathcal{U}$
 if it is \mathbb{C} -differentiable:
 se è derivabile nel senso complesso, namely
 if $f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$

($h \in \mathbb{C}$) ($f'(z_0) \in \mathbb{C}$)

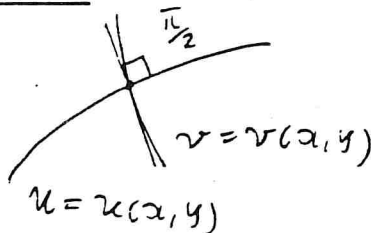
★ f si dice olomorfa in \mathcal{U} se f' exists
 at every pt of \mathcal{U} . $\mathcal{H}(\mathcal{U}) := \{ f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C},$
 ($f \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U})$) f olomorfa in \mathcal{U}

★ Theorem $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) \iff$

valgono le condizioni di Cauchy-Riemann
 the Cauchy-Riemann conditions hold

$$CR: \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

★ Osserviamo che le condizioni di CR
 ci dicono che la trasformazione piana indotta
 da f è ortogonale



The CR imply that the transformation law
 induced by f is orthogonal

Proof (⇒) If Then at P_0
 Dimm. Se $f \in \mathcal{R}(u)$ ji ha in

un dato punto $P_0 \equiv z_0 \equiv (x_0, y_0)$

$$f'(z_0) = u_x^0 + i v_x^0 = \dots = v_y^0 - i u_y^0$$

(ponendo nella def. prima $h = \Delta x$ e poi $h = i \Delta y \dots$) ⇒ seguono le CR and then the CR follow

Observe that

osserviamo poi che

$$\star \quad \boxed{f'(z_0) = f_x^0 = -i f_y^0}$$

write down the incremental ratio and use CR
 si scrive il rapporto incrementale complesso e si usano le CR ... □

Define Definiamo

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy \\ d\bar{z} &= dx - i dy \end{aligned}$$

Complex Differenz (diff. complesso)

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \dots \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

si constata facilmente che

one immediately checks that

$$df := dx + i dy = \dots = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Equivalent formulation of the CR

★ La condizione di Cauchy-Riemann
 equivalentemente a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (almeno in

★ inoltre $f' = f_z$ (solo)
moreover

★ combinazioni lineari, prodotti, composte di f , oморfe sono oморfe
linear combinations, products, composition of hol functions are holomorphic

es: $f(z) = \bar{z}$ non è oморfa $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1$
 $f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ oморfa e $f'(z) = \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1}$

Allo u : $f = |z|^2 = \bar{z}z$ non è oморfa

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z \dots$$

per $z \neq 0$
for $z \neq 0$

Maximum Theorem

★ Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$
Let

$$(z = x + iy \quad w = u + iv = f(z))$$

Set
 Sia $f' \neq 0$ in U

★ Allora f induce una trasformazione Confo
Then f induces a conformal transformation

Proof
Direct: $dx^2 + dy^2 = (dx + i dy)(dx - i dy)$

$$= d\bar{z} dz$$

$$= dw d\bar{w} = df d\bar{f} = (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z})(\overline{f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}})$$

$$(d\bar{f} = \overline{df}) = f_z dz \cdot \bar{f}_z d\bar{z} =$$

$$= |f_z|^2 dz d\bar{z} = |f'|^2 dz d\bar{z} > 0$$

Conversely one can show that a conformal map
 viceversa si può mostrare che una is induced by
 trasformazione conforme $(x, y) \rightarrow (u, v)$ and f
 è definita da una $f (= u + iv)$ which is
 olomorfa o anti-olomorfa (*) (se la trasformazione
 conserva o inverte l'orientamento, rispettivamente) according
 to whether

The map preserves orientation or not

★★ Theorem (Riemann) Given two
 simply connected regions, there exists a
 bi-holomorphic function f relating the two.
 una funzione bi-olomorfa che manda
 l'una sull'altra (+) : olomorfa, biunivoca,
 holomorphic, bijective,
 con inversa olomorfa) f^{-1} holomorphic

(*) that is, holomorphic in \bar{z}
 ovvero "olomorfa in \bar{z} ..."
 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$
 uniformization theorem

Complex structure \leftrightarrow conformal structure

Struttura complessa \leftrightarrow $\{g\}$ $[g] = \{g\}$

$$g = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad \mathcal{R} \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$$

$$f = u + iv \quad \text{holomorphic} \quad \mathbb{R}^+ : \{u\}$$

u, v isothermal coordinates

i.e. $E = G, F = 0$

$$g = \lambda (du^2 + dv^2)$$

Locally, isothermal coordinates exist on any 2d Riemannian manifold

details
* Dettagli

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x, y) \equiv f(z, \bar{z})$$

$$d\bar{f} = \bar{f}_z dz + \bar{f}_{\bar{z}} d\bar{z}$$

$$= \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} =$$

$$= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz$$

$$= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz$$

$$= \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \overline{df}$$

(calcolo diretto , o anche

direct calculation, or
observe that

Si assume che

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\Delta z} = \overline{\frac{\Delta F}{\Delta \bar{z}}}$$

l'app.
incrementale