ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES
Prof. M. Spera UCSC

Lecture II - addendum

Möbius transformations

Trasformazioni di Möbius

Let

Sia $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

be a vector space isomorphism

un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\begin{cases} z_1' = a z_1 + b z_0 \\ z_0' = c z_1 + d z_0 \end{cases} \qquad ad - bc \neq 0$$

$((z_0, z_1), (z_0', z_1'))$ coord. sulle 2 copie di $\mathbb{C}^2$)

coordinates on the two copies of $\mathbb{C}^2$

induces at the projective level

f induce, a livello proiettivo,

projectivity (homography)

la proiettività, denotata allo stesso modo

$$f: \underset{\mathbb{P}^1}{\mathbb{P}(\mathbb{C})} \to \underset{\mathbb{P}^1}{\mathbb{P}(\mathbb{C})}$$

in non homogeneous coordinates, reads

che, in coordinate non omogenee

$$z = \frac{z_1}{z_0} \qquad z' = \frac{z_1'}{z_0'} \qquad \left(\begin{matrix} z_0 \neq 0 \\ z_0' \neq 0 \end{matrix} \right)$$

ha la forma (come subito si vede)

$$\boxed{z' = \frac{az + b}{cz + d}} \qquad z \neq -\frac{d}{c}$$

trasformazione lineare fratta o trasformazione di Möbius

fractional linear transformation, Moebius transformation

Let us set

Si pone poi $\left(\mathbb{P}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2 \right)$

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

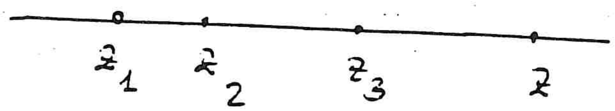
$$f(\infty) = \frac{a}{c}$$

la trasformazione può essere normalizzata: $ad - bc = 1$
normalized

Dopodiché, se $a \to -a$, $b \to -b$, $c \to -c$, $d \to -d$
Moreover

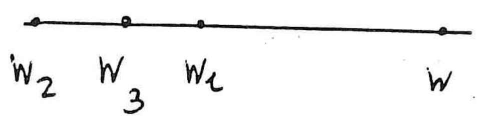
ottengo la stessa trasformazione
get the same transf.

$\mathbb{P}^1$



$\{$ trasf. di möbius $\}$ $= PSL_2(\mathbb{C})$ $\equiv$ proiettività di $\mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1$



Si tratta effettivamente di un gruppo

Se $z_i \to w_i$

$z \to w$

Si trova che $w = f(z)$, è data da

$$\boxed{\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}}$$

"Invarianza del birapporto"
cross-ratio invariance

Aside

Le trasformazioni di Möbius si classificano (are classified)

tramite i loro pti fissi (fixed points)

ovvero, si studia l'equazione

$$f(z) = z$$

$$\Rightarrow \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

∞ is a fixed point $\Leftrightarrow$ $c = 0$

$\Rightarrow$ ogni trasf. di Möbius $\neq$ identità

ha almeno un fixed pt., e ne ha al più 2.

admits at least a fixed pt and at most two

If the f. pt è unico si parla di tras. parabolica

is unique $\to$ parabolic transformation

Se $c = 0$ è .. $f(z) = az + b$ (si può porre $d = 1$)

affinità

e $f(z) = z$ è parabolica $\Leftrightarrow$ $a = 1$

parabolic

(traslazione)

altrimenti si ha il pto fisso $\dfrac{b}{1-a}$

in aggiunta a ∞

in addition to ∞

★ **Teorema**. Una trasformazione di Möbius manda (maps) cerchi in cerchi (includendo le rette ...)

Dim. In $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ le circonferenze hanno equazione

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$$

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$$

$$\boxed{a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0}$$

sia $a \neq 0$ $\quad \frac{b}{a} = -2x_0 \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$

$\frac{c}{a} = -2y_0 \quad y_0 = -\frac{c}{2a}$

$$\frac{d}{a} = x_0^2+y_0^2-R^2$$

se $R \geq 0$ deve essere $x_0^2+y_0^2-\frac{d}{a} \geq 0$

circ. reali

cioè $\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c^2}{4a^2}-\frac{d}{a} \geq 0$

$\Rightarrow$ $[b^2+c^2-4ad \geq 0]$ ★

Se $a = 0$ si hanno rette.

Riscriviamo l'equazione così:

$$a z\bar{z} + b\,\frac{z+\bar{z}}{2} + c\,\frac{z-\bar{z}}{2i} + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad a z\bar{z} + \underbrace{\overbrace{\left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2i}\right)}^{\frac{b}{2} - i\frac{c}{2}}}_{A} z + \underbrace{\overbrace{\left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2i}\right)}^{\frac{b}{2} + i\frac{c}{2}}}_{\bar{A}} \bar{z} + d = 0$$

$$a z\bar{z} + A z + \bar{A}\bar{z} + d = 0$$

$$A\bar{A} - ad \geq 0 \quad \star$$

Ora una traslazione $(z \to z + \alpha)$

una omotetia $(z \to \lambda z \quad \lambda > 0)$

una rotazione $(z \to \gamma z \quad |\gamma| = 1)$

mandano cerchi in cerchi

e così una inversione $z \to \frac{1}{z}$:

$$a\,\frac{1}{z\bar{z}} + A\,\frac{1}{z} + \bar{A}\,\frac{1}{\bar{z}} + d = 0 \qquad \cdot\, z\bar{z} = |z|^2 \neq 0 \quad (z \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad a + A\bar{z} + \bar{A} z + d z\bar{z} = 0$$

... e si conserva anche la $\star$

Ora, una generale trasformazione di Möbius si ottiene componendo trasf. dei tipi prima menzionati. L'asserto è dunque provato.

A general Möbius transformation can be obtained by composing transformations of the above types, this achieving the conclusion.

Examples:

$$\boxed{\quad w = \frac{z-1}{z+1}\quad}$$

$z \neq -1$

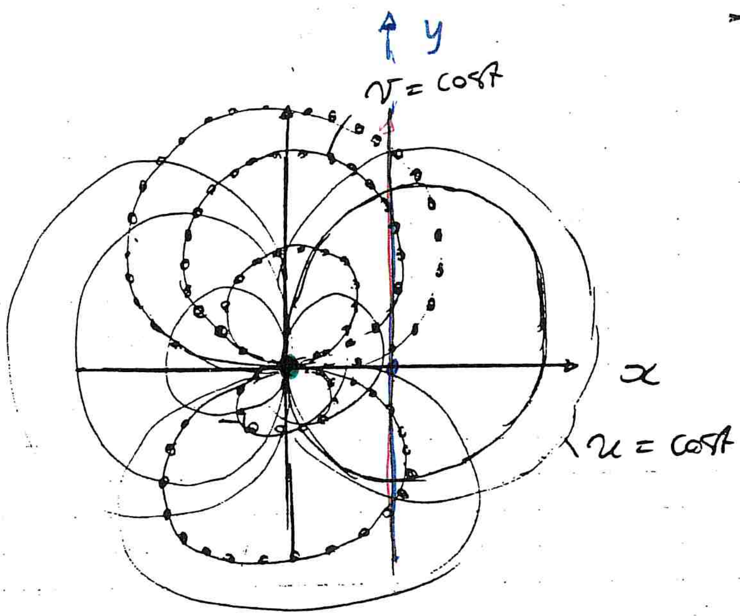
($\&$ $z=-1$ è $w=\infty$)

$$f'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \neq 0$$

punti fissi: $\frac{z-1}{z+1} = z$

$$(z+1)z + 1 - z = 0$$

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$



cerchi $u = \text{cost} = \frac{A}{2} \in \mathbb{R} \to$

$w = u + iv$

$w + \bar{w} = 2u$

$= 2\,\mathrm{Re}\, w$

$\to \quad w + \bar{w} = A$

$\leadsto \quad \frac{z-1}{z+1} + \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = A$

$$z\bar{z} - \cancel{\bar{z}} + \cancel{z} - \cancel{1} + z\bar{z} - \cancel{z} + \cancel{\bar{z}} - 1 = A(z\bar{z} + \bar{z} + z + 1)$$

$$2z\bar{z} - 2 = A(z\bar{z} + \bar{z} + z + 1)$$

$$(2-A)\,z\bar{z} - A(\bar{z}+z) - 2 - A = 0$$

$$(2-A)(x^2+y^2) - 2Ax - (2+A) = 0$$

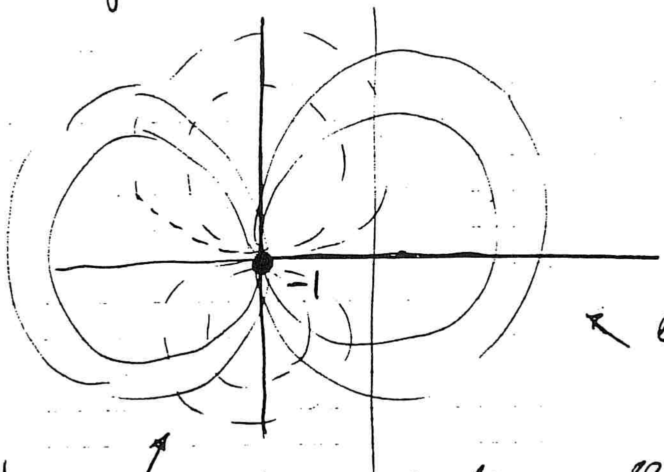
Γ se $A=2$ è $x = -1$

centro sull'asse x se $(x,y) = (-1,0)$

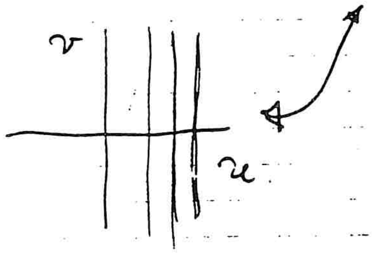
è $(2-A) + 2A - 2 - A = 0$

passano tutti per $(-1,0)$

retta tangente in $(-1,0)$ ... $x = -1$



luogo dei centri
retta ⊥ asse radicale



fascio di rette parallele

$\Rightarrow$ fascio di cerchi passanti per $(-1,0)$ con tangente $x = -1$

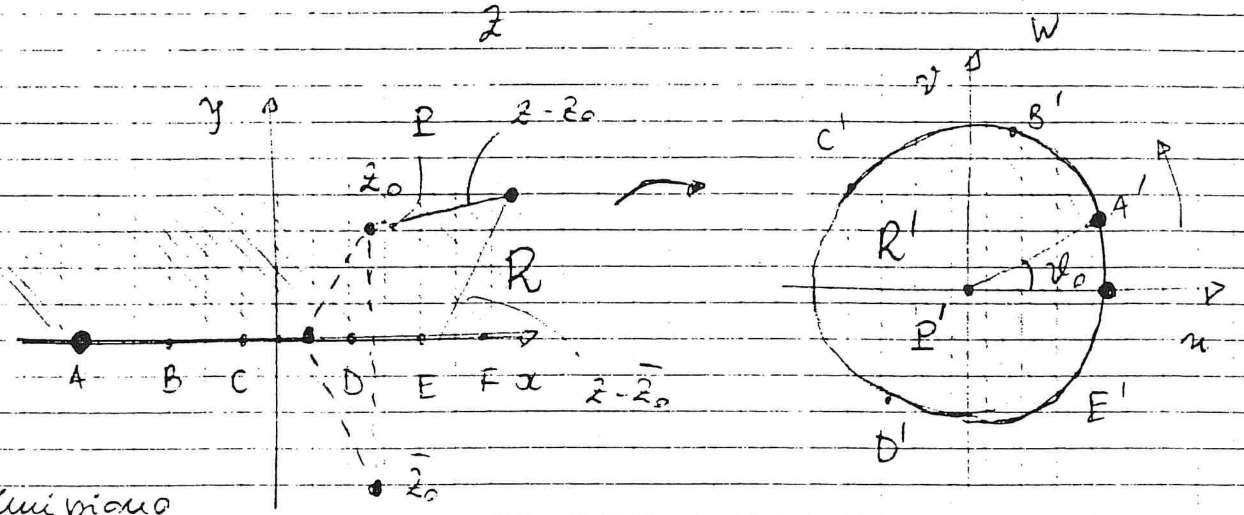
($\in$ fascio di cerchi)

$x = -1$ asse radicale del fascio

[[(pti base pti ciclici + $(-1,0)$ contato due volte]]

coord. omogenee $(0, 1, \pm i)$ ← tutte le circonf. del fascio (complessificato) passano per tali pti.

5) Rappresentazione di un semipiano su un cerchio



Semipiano di Poincaré

Poincaré upper half-plane

$$W = e^{i\vartheta_0}\,\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

(è una trasf. di Möbius)

$$\infty \longmapsto e^{i\vartheta_0}$$

$$(A \longmapsto A')$$

È subito (vedi figura..) $|W| < 1$

se $z \in R$;

se z è sull'asse x, " :

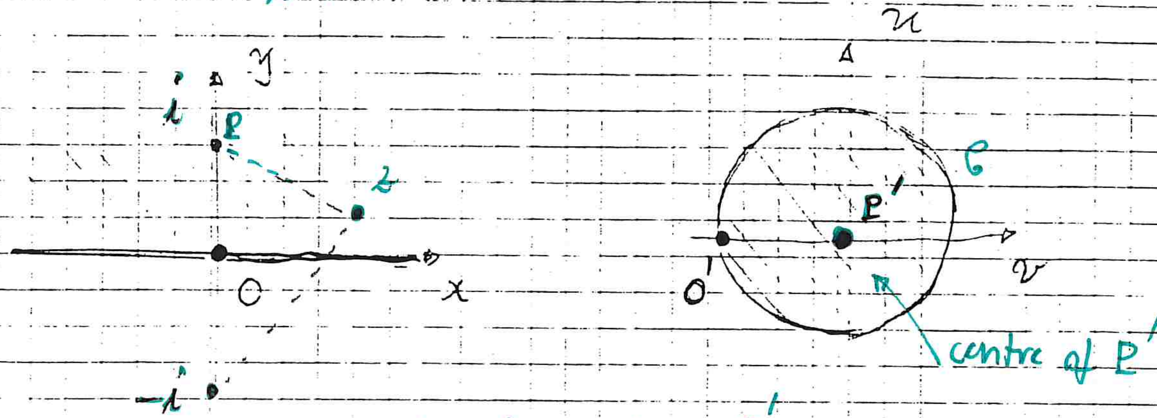
è $|W| = 1$

ϑ_0 può essere adattato per far corrispondere un dato pto A dell'asse x ad un determinato pto A' del cerchio unitario

($e^{i\vartheta_0}$ induce una rotazione del cerchio....)

esempio (Cayley)
Special case:

$$w = \frac{z-i}{z+i} \qquad \left(= \frac{z-i}{z-\bar{i}} \right)$$



$0 \longmapsto 0'$

$z = 0 \longmapsto w = -1$

$z = i \longmapsto w = 0$

$P \longmapsto P' = 0$

quite useful

☆ Tale trasformazione è utilissima nelle applicazioni del teorema dei residui ☆

applications of the "residue theorem" see course on complex analysis

It is also crucial in

{ hyperbolic geometry

upper half-plane ⟷ unit disc }

II - add 10