

Riemann surfaces

Superficie di Riemann



vogliamo ora definire  $\log z$

First ideas

la definizione "naturale" è (quando in modo formale)  
(per  $z \neq 0$ )

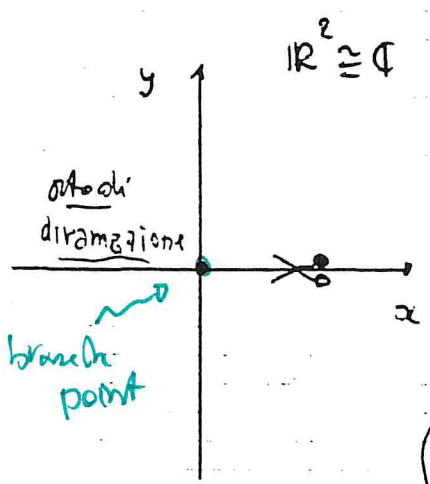
$$\log z = \log |z| e^{i\varphi} = \log |z| + \log e^{i\varphi}$$

$$= \log |z| + i\varphi$$

che è determinato a meno di  
multipli interi di  $2\pi$

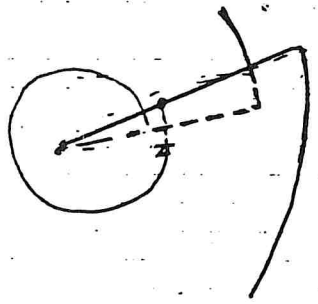
$\log z$  appare come una "funzione a  
più valori" "multivalued" function

Isola di Riemann (☆☆☆)



si tagli il piano complesso  
lungo  $\{x \geq 0\}$

e si consideri una superficie  
di tipo "elicoidale"  
helicoidale



a molti "fogli",  
indici da  $\mathbb{R} \in \mathbb{Z}$

☆☆  $\log z$  è definita su una superficie  $\Sigma$

(superficie di Riemann)  
coordinate  $(\varphi, \rho)$

descritta da  
 $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$  indice  
 $\rho \in [0, 2\pi)$

# sheet

su quale "foglio" ci troviamo  
(in tal caso il  $R$ -esimo)

$$\log z = \tau - o \quad \&$$

$$(\varphi, \rho) \quad \log \rho + i\varphi$$

$$(z = |z|e^{i\varphi}) \quad = \log |z| + i\varphi$$

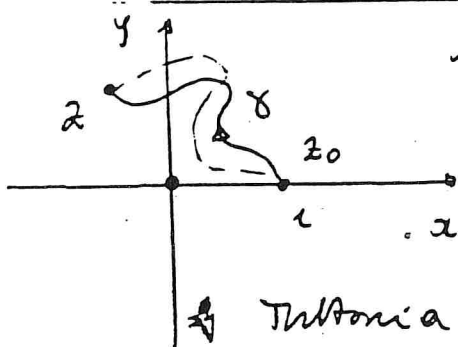
★ Tale procedimento è generale: ad ogni funzione dotata  
si associa la sua  
superficie di Riemann

Per esempio la sup di Riemann  
associata a  $z^{\frac{1}{2}}$  ha due fogli

(quella per  $z^{\frac{1}{n}}$  ha  $n$ -fogli...)  
Vedi oltre

★  $\log z$  può anche essere definita così ( $z \neq 0$ )

$$\log z = \int_{z_0}^z \frac{ds}{s} \quad (\text{con } z_0 = (1, 0) \text{ (cross)})$$



l'integrale è preso su un quadrante  
conueno  $\gamma$  congiungente  $z_0$  a  $z$   
e che non racchiuda l'origine  
not enclosing the origin

★ Tuttavia l'ambiguità definita precedentemente  
descritta rimane ...

si assume che  $s = x + iy$

$$\frac{ds}{s} = \frac{\overline{s} ds}{|s|^2} = \frac{(x-iy)(dx + i dy)}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \omega_c$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + i dg$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dp^2}{p^2} + i dg = \frac{1}{2} \frac{2p dp}{p^2} + i dg =$$

$$= d \log p + i dg \dots$$

... Tutto è conseguenza del fatto che  $\omega_c$  è  
chiusa ma non esatta!

↖ critical point

tema al concetto di superficie  
di Riemann

Sorge quando si affronta il problema di  
 ★ invertire le funzioni elementari nel campo  
 complesso: ci si imbatte nel fenomeno della  
 POLIDROMIA multivaluedness

ex:  $z^n = a$   $a \neq 0$  roots  
radici n-esime di a

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad \rho^n e^{in\varphi} = |a| e^{i\varphi_a}$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

arg. determinato a meno di  
 multipli interi di  $2\pi$

$$\Rightarrow \rho = |z| = |a|^{\frac{1}{n}}$$

$$n\varphi = \varphi_a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

fissato

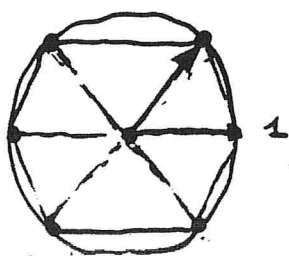
$$\varphi = \frac{\varphi_a}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\star \left[ z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \left( \frac{\varphi_a}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right)} \right]$$

n radici distinte

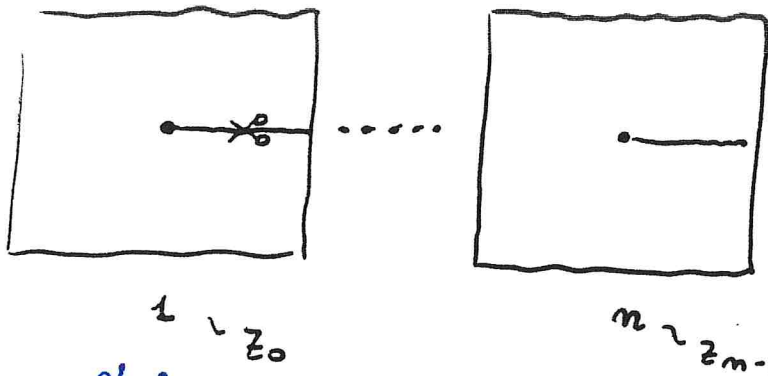
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$a = 1$$

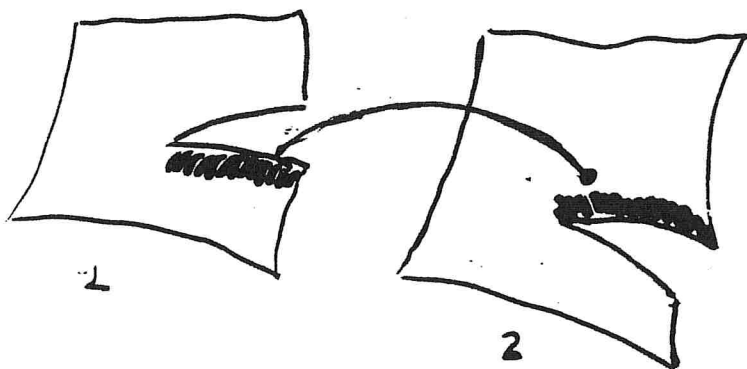


# ☆☆☆ Idea di Riemann

<sup>Replace</sup>  
 Rimpiazza  $\mathbb{C}$  con  $n$  copie di  
 $\mathbb{C}$  tagliato, per ex. lungo il semiasse  
 reale positivo



di <sup>glue</sup> incollati per esempio il lembo <sup>edge</sup> inferiore <sup>lower</sup> del foglio 1 con il lembo <sup>upper</sup> superiore del foglio 2 etc .. il lembo inferiore del foglio  $n$  va incollato al lembo superiore del foglio 1 ( $\triangle$ )



Il risultato può essere visualizzato  
 più o meno (molto meno che più !!)  
 così:

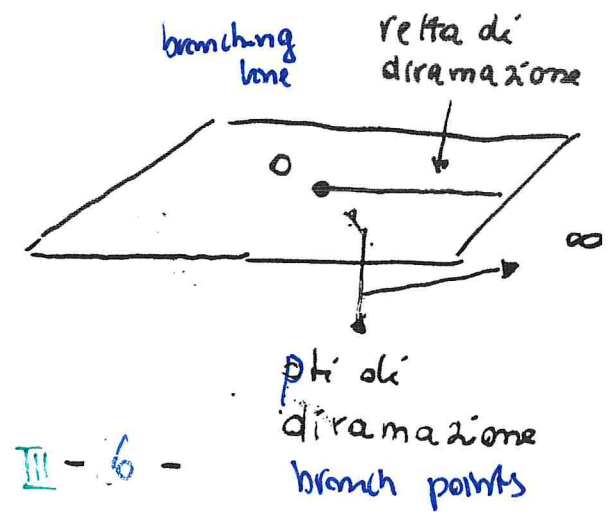
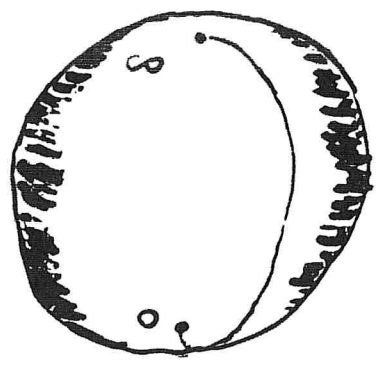




ei si ritrova sul foglio 1 !!

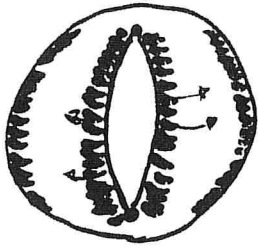
Inoltre, ricoprendo ogni  $\mathbb{C}$  con una  
 Sfera di Riemann  $\mathbb{P}^1$ , tutto diviene

potè semplice



( Anche il pto  $\infty$  viene descritto allo stesso modo per la inversione  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$  )

Si ha successivamente, a livello topologico



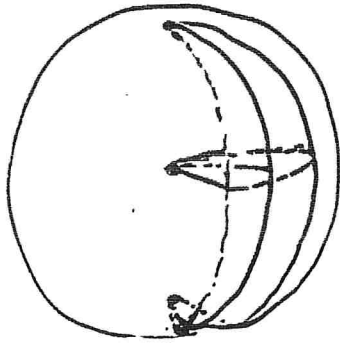
Spicchio: slice wedge  
(Citrus fruit: segment)

$$\frac{2\pi}{n}$$

Si colleghiamo n spicchi e si riempiamo ancora una sfera:

$$S^2 \rightarrow S^2$$

$$\zeta \mapsto \zeta^n$$



n-sheeted branched covering

ricoprimento ramificato a n fogli

$$z = t^n$$

parametro uniformizzante

È chiaro come si passi da uno spicchio all'altro e in particolare da  $n$  ad 1

Ora  $0$  e  $\infty$  possono essere sovrapposti da due pti qualsiasi (distinti), basta effettuare, per es. un'opportuna trasformazione di Möbius

$$\zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

$$ad - bc \neq 0 \quad \text{in}$$

generale, dati  $z_i \mapsto w_i \quad i=1, 2, 3$ , la transf.

è univocamente individuata da

$$\star \left[ \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \right]$$

★ invarianza del rapporto per omografie in  $\mathbb{P}^1$

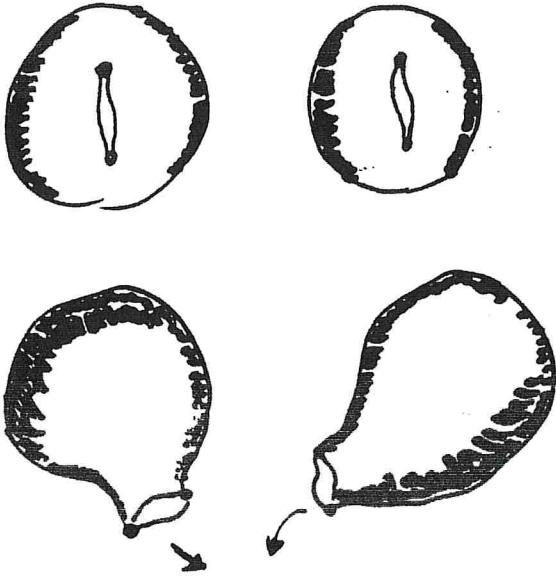
dal chiarissimo significato geometrico III-7.

Poniamo ora  $n = 2$

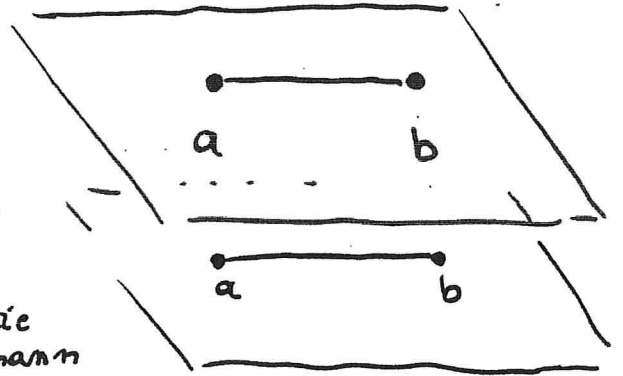
e siano  $a \neq b$ ,  
 $a, b \in \mathbb{R}$

per fissare le idee

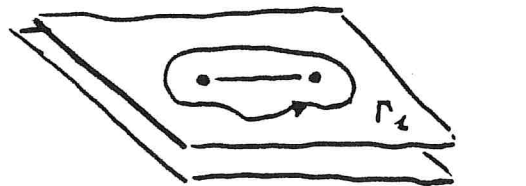
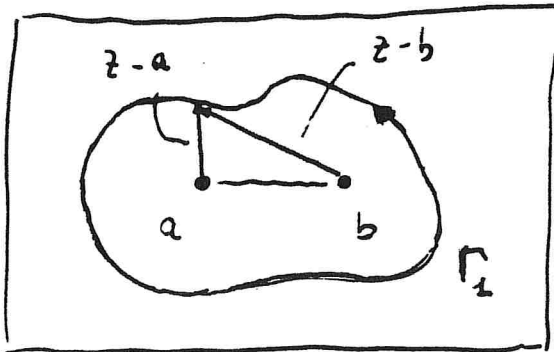
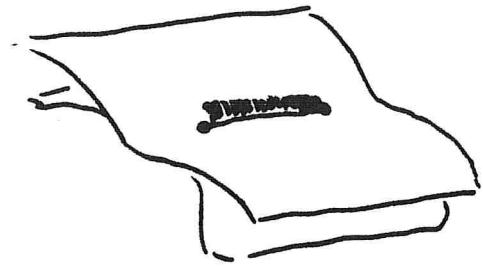
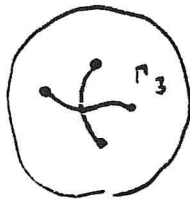
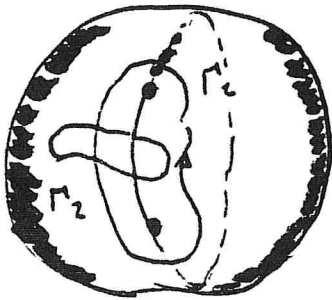
$$W^2 = (2-a)(2-b)$$



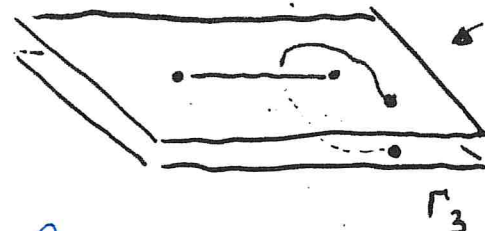
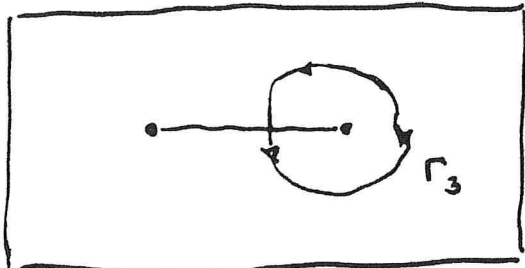
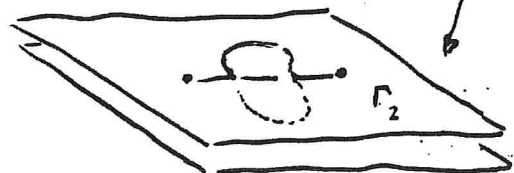
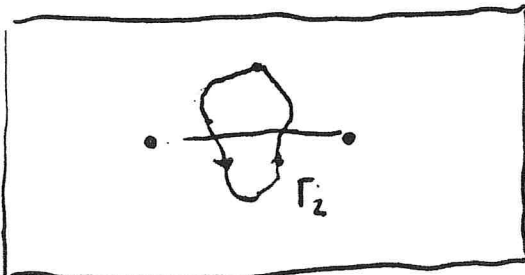
$\mathcal{G}$  Conica  
 irriducibile



$\Sigma_{\mathcal{G}}$  superficie  
 di Riemann  
 di  $\mathcal{G}$



cicli  
 su  $\Sigma_{\mathcal{G}}$



non è  
 un ciclo



# Qualche dettaglio

Some details

$$f = f(z) = (z-a)(z-b)$$

$$\Delta_{\Gamma_2} f = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

total variation

variazione totale dell'argomento di  $f$  quando  $\gamma$  viaggia su  $\Gamma_2$

$$\left[ \Delta_{\Gamma_2} \sqrt{f} = 2\pi \right]$$

$$\Delta_{\Gamma_2} \sqrt{f} = 2\pi$$

$$\star \Delta_{\Gamma_3} \sqrt{f} = \pi$$

in generale  $\Gamma_k$

$$\left( = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f'}{f} dz \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} d \log f$$

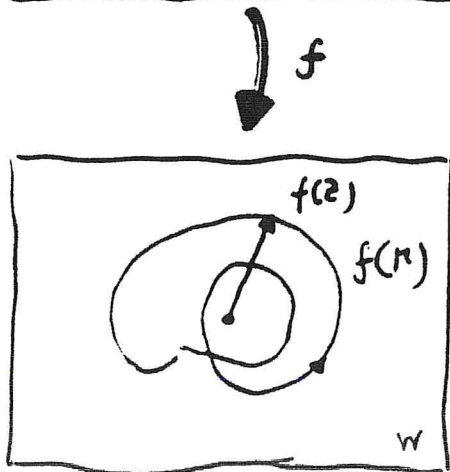
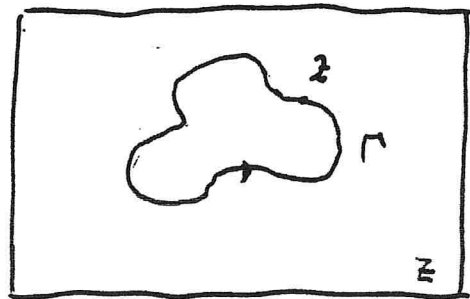
altro non è che l'indice di avvolgimento  $\star$  di  $f(\Gamma)$  attorno all'origine nel "piano  $w$ " :  $w = f(z)$

$\star \log z = \log |z| + i\varphi$

$\star$  polidromia

$\sum \log$  consta di infiniti fogli incollati come nel caso precedente

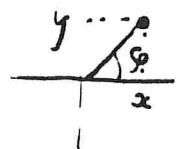
argomento (ind. a meno di  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ )



$\star$   $\text{ind}_{\gamma}(0) =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

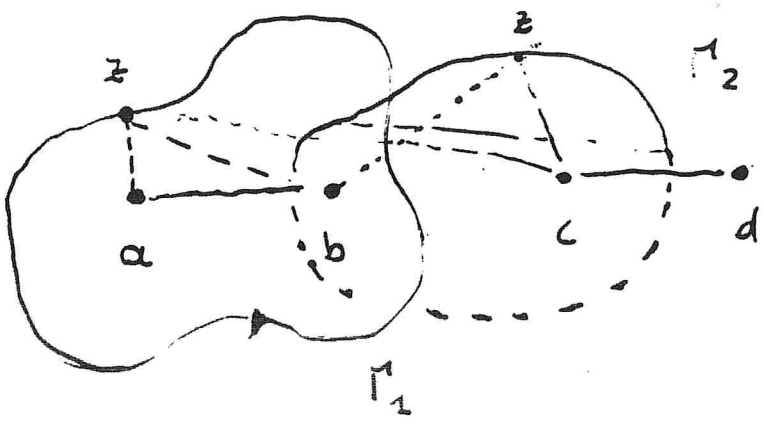
$$\left[ d\varphi = d \arctan \frac{y}{x} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right]$$



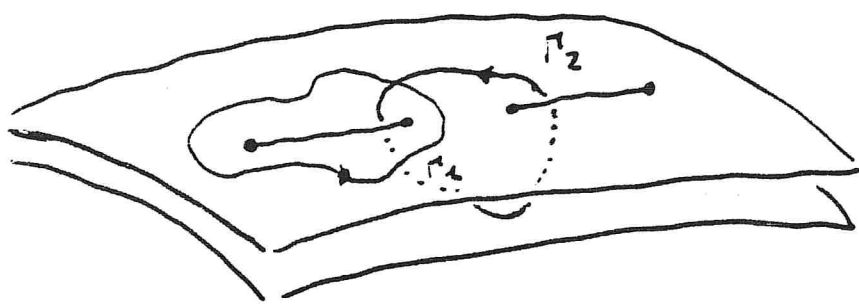
Sia ora  $w^z = f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$

come in figura

★ il ragionamento che segue vale anche per un polinomio di 3° grado: basta immaginare  $d = \infty$

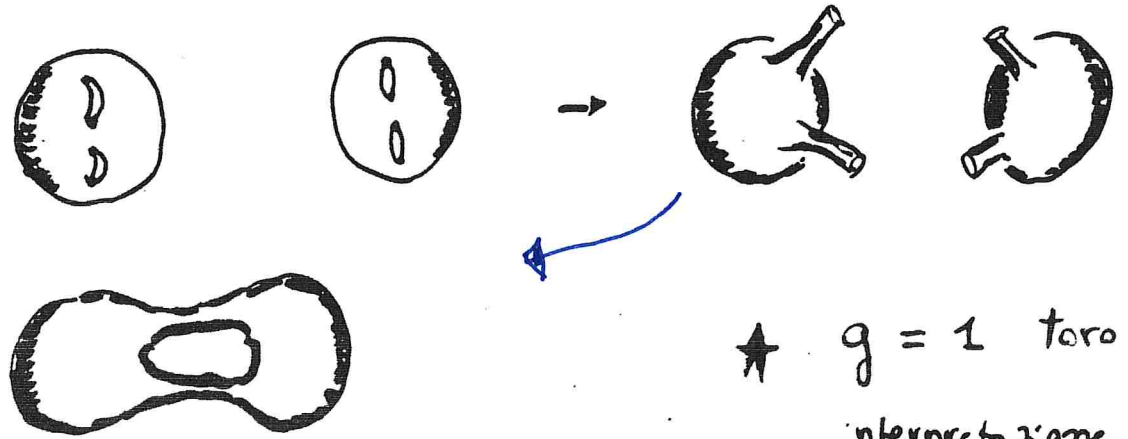


Si trova  $\Delta_{\gamma_1} \sqrt{f} = \Delta_{\gamma_2} \sqrt{f} = 2\pi$

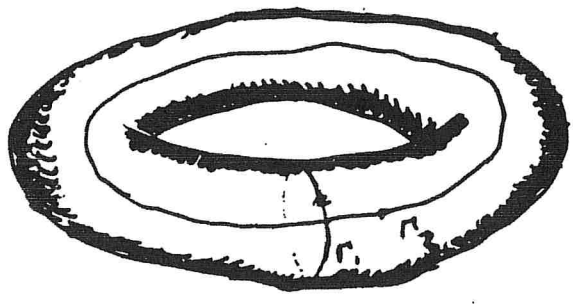


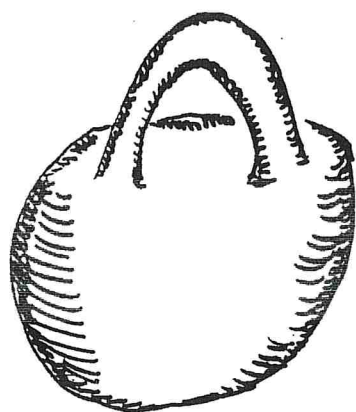
... : nel foglio sottostante

Aggiungendo i pti all'infinito in entrambe le copie



★  $g = 1$  toro  
 interpretazione topologica:  
 # buchi di  
 lica sup.  
 compatta  
 e senza bordo

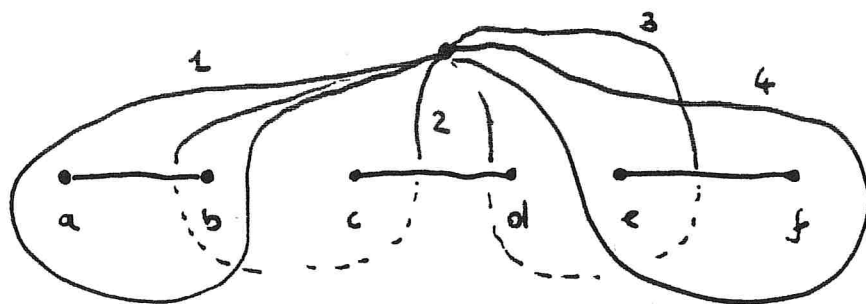
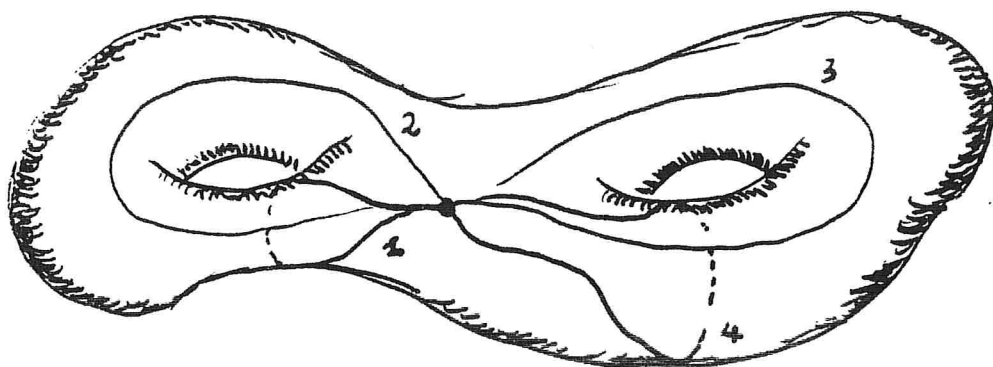




$g = 1$



$g = 2$



$$W^2 = (z-a)(z-b) \cdot (z-c)(z-d) \cdot (z-e)(z-f)$$

in generale si ottengono le cosiddette  
superficie di Riemann iperellittiche

Questo chiarisce il motivo della non risolubilità  
degli integrali abeliani in termini di f. elementari,  
e della necessità di introdurre allo scopo nuove  
funzioni, le funzioni ellittiche  
e iperellittiche

— see next lecture  
III - II -