## ◇ Cenni sugli integrali abeliani

A hint of abelian integrals

$\boxed{\text{ALGEBRAIC CURVES \& RIEMANN SURFACES}}$

$\boxed{\text{Lecture IV}}$

Gli integrali del tipo

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f. razionale}}}{R}\,\big(x, \underbrace{\sqrt{x^2+ax+b}}_{y}\big)\,dx$$

$y = t(x-\mu)$ ($\lambda, \mu$ rad. reali e distinte)

$y = tx + \sqrt{b}$ (per ex $b \geq 0$)

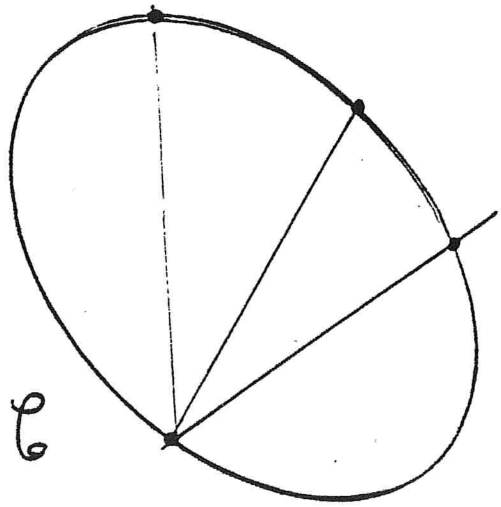
(solvable) soluble in closed form

sono risolubili in forma chiusa. La ragione profonda di ciò è geometrica

$$\mathcal{C}: \qquad y^2 = x^2 + ax + b$$

è una conica (conic) in $\mathbb{P}^2$ ($x, y$ coord. affini o euclidee)

$\mathcal{C} \cong \mathbb{P}^1$ retta proiettiva complessa (topologicamente una sfera)



e dunque razionale (rational)

Considerando in particolare

$$\int \frac{dx}{y}$$

e posto $t = t(x, y)$ coord. affine (affine coordinate) su $\mathbb{P}^1$, si ha:

$$\boxed{\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{dx}{y} = \int_{t(x_0, y_0)}^{t(x, y)} \mathcal{R}(t)\, dt}$$

f. razionale

L'integrale si risolve facilmente.

dependence

La dipendenza dal cammino coinvolge

i residui di $\frac{dx}{y}$ (infatti $\frac{dx}{y}$

residues

è chiusa e $\mathbb{P}^1$ è semplicemente

connesso)

Consideriamo ora

$$(*) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}}$$

elliptic integral

o, più in generale

abelian integral

$$(**) \quad \int R(x,y)\,dx$$

* integrale abeliano

con $f(x,y) = 0$

↑

polinomio di grado > 2

Per ex, in (*) è $\mathcal{C}$ : $y^2 = x^3+ax^2+bx+c$

cubica

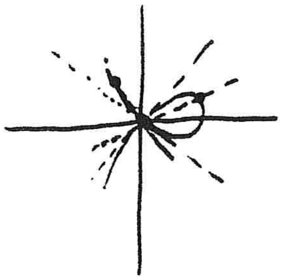
cubic

Ricordando la formula generale (Plücker) To be discussed later on

$$\left[\, \underset{\text{genere}}{g} = \underset{n:\ \text{grado}}{\frac{n(n-1)}{2}} - \underset{\text{cuspidi}}{x} - \underset{\text{nodi}}{\nu} \,\right]$$

[verrà dimostrata durante il corso]

si vede che se $n = 3$ può esserci al più (at most) un pto doppio: per una cubica nodata si ha $g = 0$ epperò (hence) $\mathcal{C}$ è razionale



$y^2 = x^2(1-x)$

[ Ma se $\mathcal{C}$ è liscia (smooth) si ha $g = 1$ e l'integrale non è risolubile

es: $y^2 = x(x-1)(x-c)$ $\quad c \notin \{0,1\}$

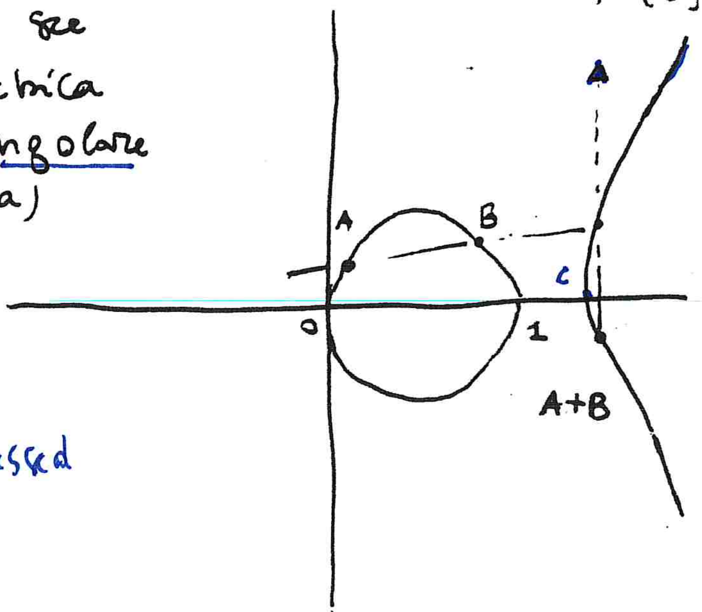
cubica di Weierstrass

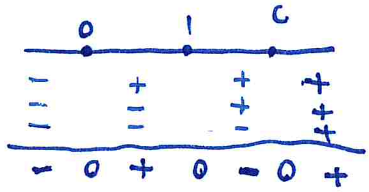
struttura di gruppo su una cubica non singolare (ellittica)

↓

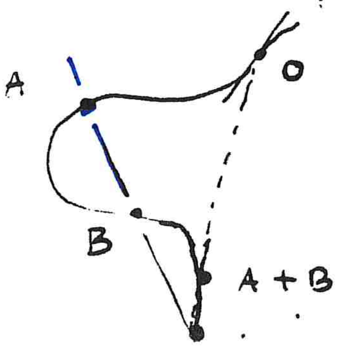
to be discussed

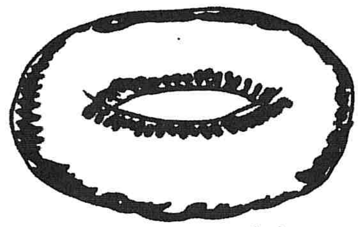
$F : (0,0,1)$ (flesso)




Vogliamo mostrare che topologicamente $\mathcal{C}$ è un toro (v. oltre)



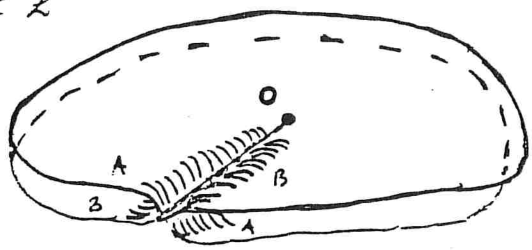

$\mathcal{C} \cong$ 

Further pictures

# ☆ Superficie di Riemann

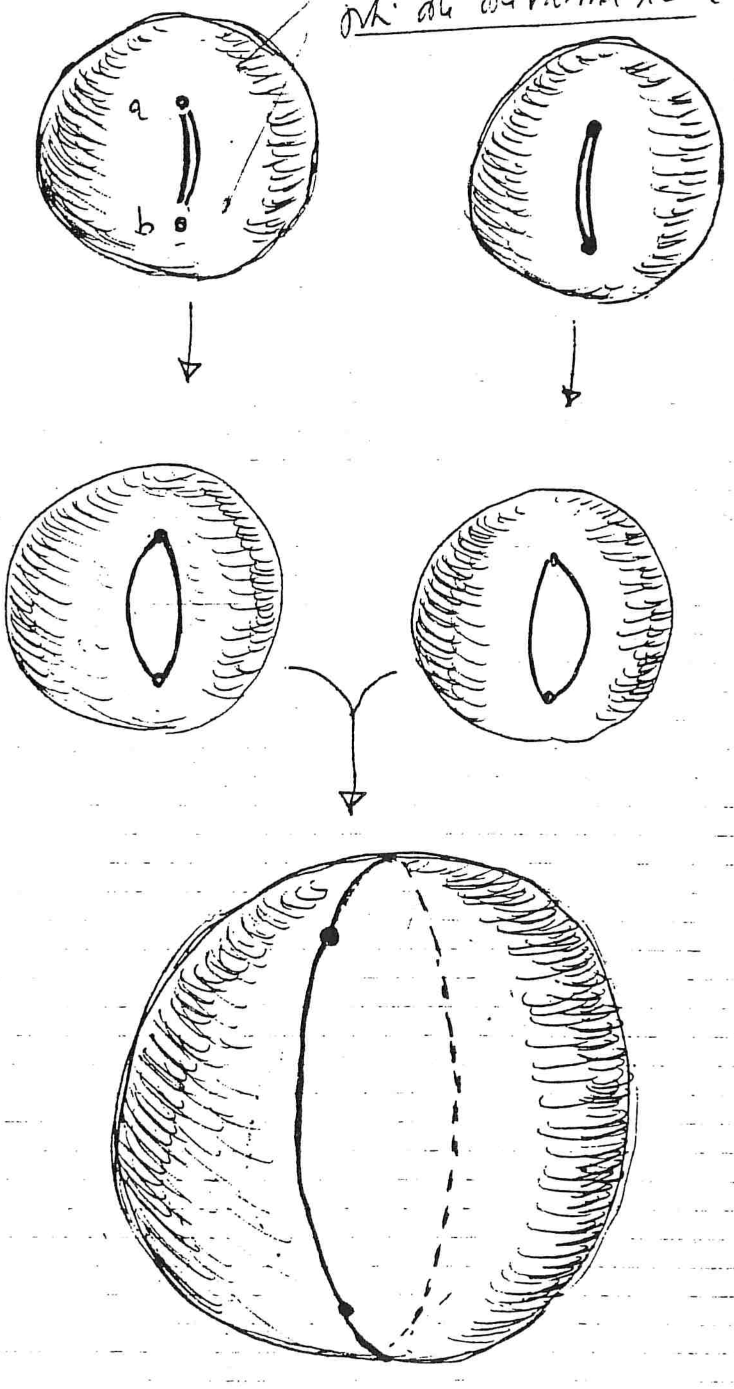
$w = \sqrt{z}$

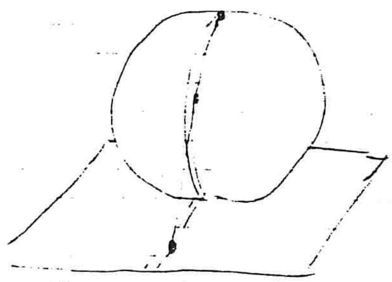
$w^2 = z$




branch points

pti di diramazione (per ex: $a = 0$, $b = \infty$)



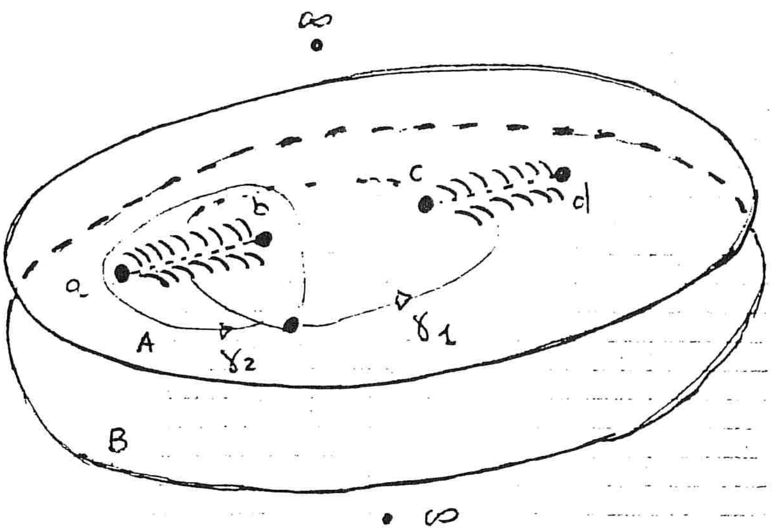
$$\Sigma_f = S^2 \cong \mathbb{P}^1$$

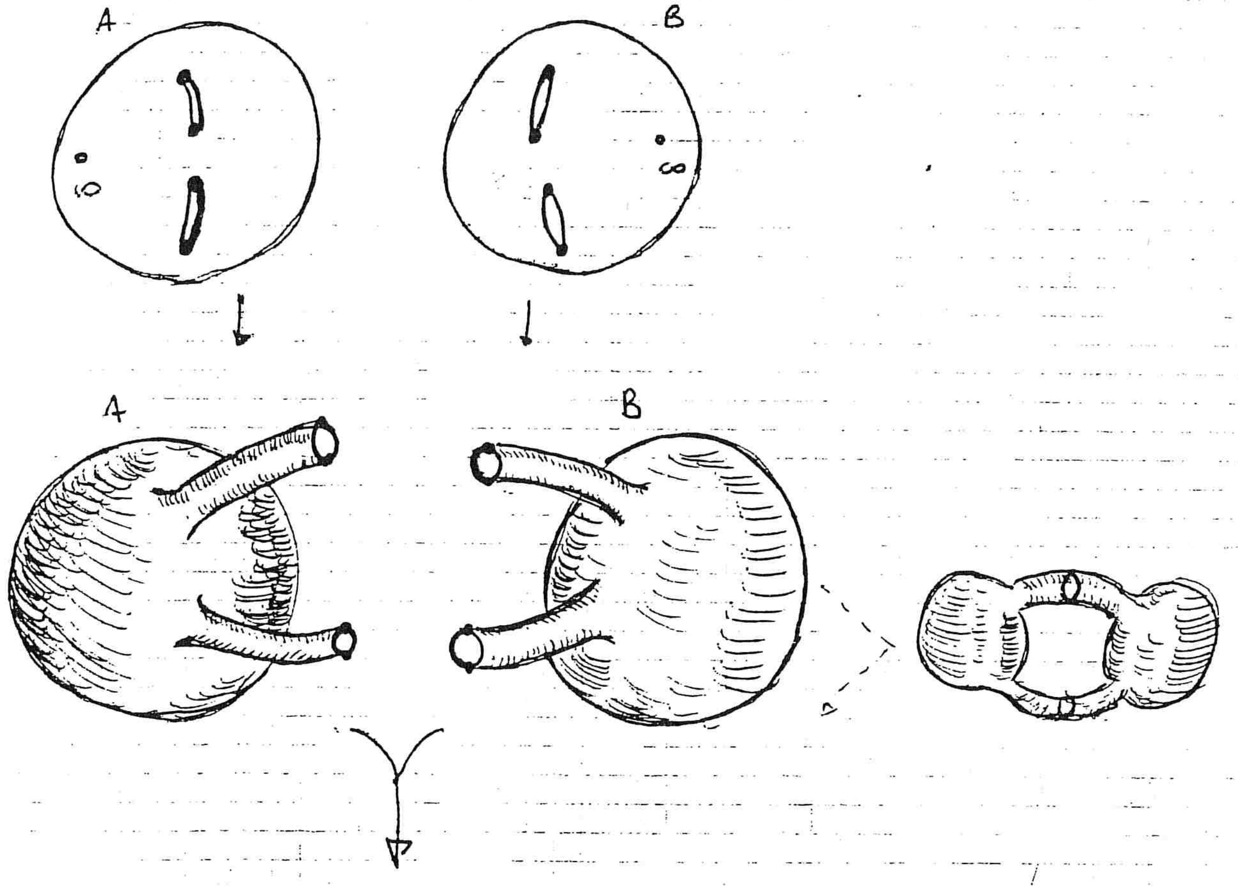
Sfera

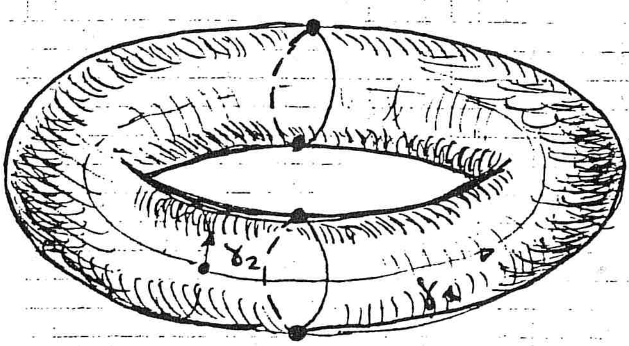
Sphere

Further pictures

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$



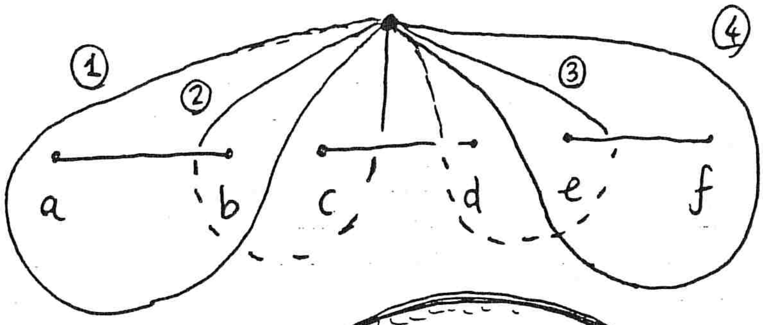



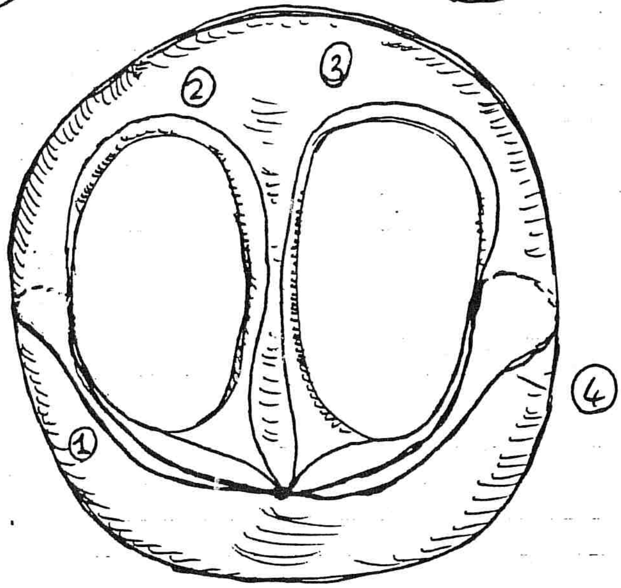

$$\Sigma_f = S^1 \times S^1$$

$= \underline{\text{toro}}$

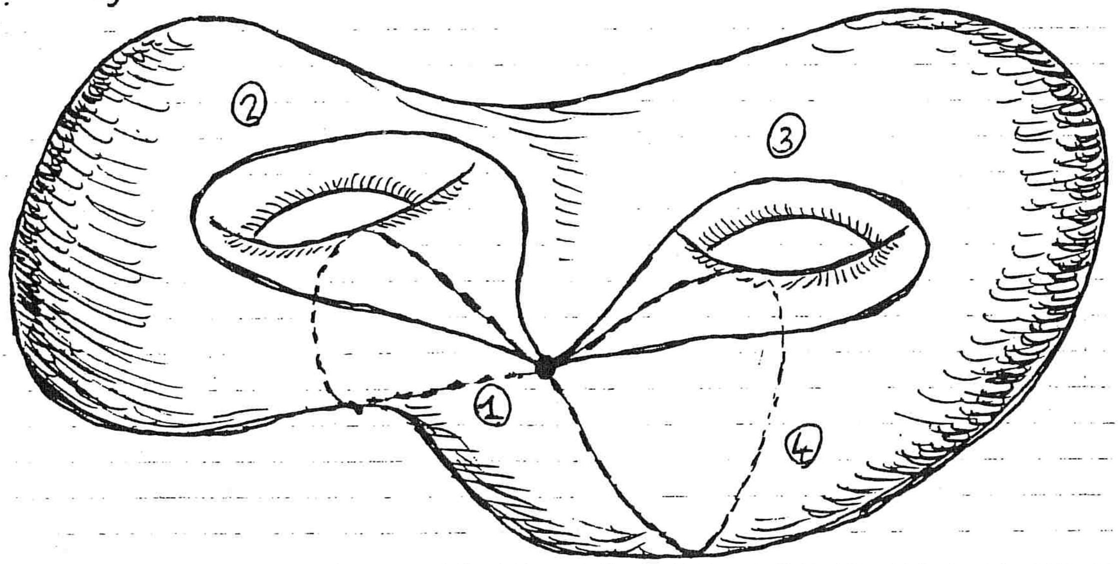
torus

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e)(z-f)}$$




$\Sigma_{\sqrt{f}}$




$g = 2$

stesso discorso se $f = \infty$

non connected

# Superficie di Riemann sconnesse

$w = \sqrt{z^2}$ $\qquad\qquad$ $w^2 = z^2$

$\Rightarrow \quad w^2 - z^2 = 0$

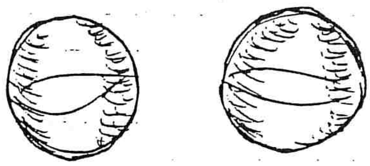
$(w+z)(w-z) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} w = z \\ w = -z \end{cases}$ $\quad$ due funzioni distinte

si parla talvolta di falsa polidromia

$\Rightarrow$ due sup. di Riemann

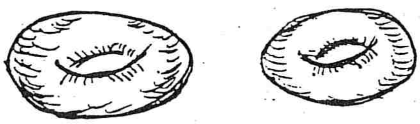
(se si compattifica è $S^2 \cup S^2$)



$$w^4 = (z(z-1)(z-c))^2$$

$\Rightarrow \quad w^2 - [z(z-1)(z-c)] = 0$

$w^2 + [z(z-1)(z-c)] = 0$

$\rightsquigarrow$ 

unione di due curve ellittiche