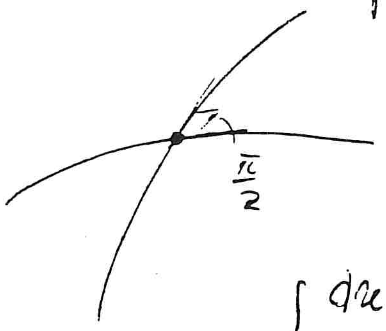
useful formulae

Formule utili



$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

C.R.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} du = u_x\,dx + u_y\,dy \\ dv = v_x\,dx + v_y\,dy \end{cases}$$

$$f = u + iv$$

Jacobian

Jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$u \rightsquigarrow x$

$$du \wedge dv = (u_x v_y - u_y v_x)\, dx \wedge dy$$

$$\left(du \wedge dv = \left| \quad \right| dx \wedge dy \right)$$

$$= (CR) \quad (u_x^2 + u_y^2)\, dx \wedge dy$$

$$\parallel$$

$$(v_x^2 + u_x^2)$$

$$\parallel$$

$$|f_x|^2$$

$$\parallel$$

$$|f'|^2 \, dx \wedge dy$$

$$du^2 + dv^2 = u_x^2\,dx^2 + u_y^2\,dy^2 +$$
$$+ v_x^2\,dx^2 + v_y^2\,dy^2$$
$$+ 2(\underbrace{u_x u_y + v_x v_y}_{=0})\,dx\,dy$$
$$= (u_x^2 + v_x^2)\,dx^2 + (u_y^2 + v_y^2)\,dy^2$$
$$= \underbrace{(u_x^2 + v_x^2)}_{= |f'|^2}(dx^2 + dy^2)$$

various instances

Cauchy - Riemann . varie forme

$f = u + iv$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

coord. cartesiane

cartesian coord.

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (f_{\bar{z}} = 0) \right.$$

forma compl

complex for

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\varphi \\ u_\varphi = -r v_r \end{cases}$$

$r \neq 0$

coord. polari

polar coordinates

† Regole di derivazione

Differentiation rules

(le varie funzioni sono olomorfe in $\mathcal{U}$)
regione

1. linearità $\qquad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2. Regola di Leibniz (derivata di un prodotto)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. Derivata della reciproca di $f \neq 0$

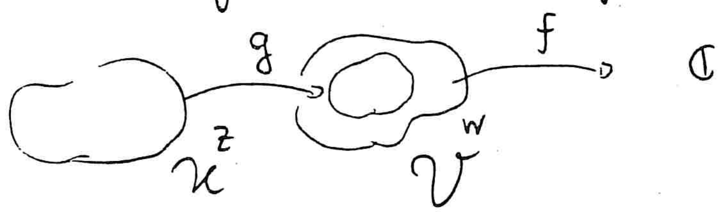
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

4. $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad g \neq 0$$

(segue da 2 e 3)

5. Der. di funzione composta

composition



$w = g(z)$

$$(f \circ g)'(z) = \underbrace{f'(g(z))}_{= \frac{df}{dw}}\, g'(z)$$

6. Derivata dell'inversa (se esiste ..)

$w = f(z) \qquad z = f^{-1}(w)$

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1}$$ nei pti corrispondenti ...

in the corresponding pts

Regola di de l'Hôpital

de l'Hôpital's rule

Siano $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ (regione) olomorfe in z_0. Sia $\begin{cases} f(z_0) = g(z_0) = 0 \quad e \\ g'(z_0) \neq 0 \end{cases}$

Allora $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ ed è $= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

$\exists$ equivalente all'olomorfia in z_0

Dim. $\boxed{f(z) = \underset{0}{\underset{\parallel}{f(z_0)}} + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0)}$

$\eta \to 0$ se $z \to z_0$

e analog. per g.

allora $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)(z-z_0) + \eta_1(z-z_0)}{g'(z_0)(z-z_0) + \eta_2(z-z_0)}$

$= \frac{f'(z_0)\,[1 + \eta_1]}{g'(z_0)\,[1 + \eta_2]}$

$\to \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ se $z \to z_0$.

Si osservi che z_0 è uno zero isolato per g infatti se fosse un pto di accumulazione di zeri g risulterebbe nulla!

$g(z) = \overset{?}{g(z_0)} + g'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)$, $\neq 0$

Observe that z_0 is an isolated zero for g. were not, g would be identically zero!