ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera - UCSC

Lecture II

Una funzione olomorfa in $\mathcal{U}$ è necessariamente liscia (C^∞)
Smooth

Dalle relazioni di Cauchy - Riemann si ha

$$u_{xx} = v_{yx}$$
$$u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u = 0}$$

Laplaciano

Analogamente $\Delta v = 0$ ← equazione di Laplace

Ossia: se $f = u + iv$ è olomorfa (in $\mathcal{U}$)

$\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono armoniche in $\mathcal{U}$
harmonic

Osserviamo che se $g \in C^2(\mathcal{U})$
è armonica in $\mathcal{U}$ ($\Delta g = 0$ in $\mathcal{U}$)
regione

allora g non può avere massimi o minimi relativi propri in $\mathcal{U}$ $^{(+)}$ infatti in un tale punto $P_0 \in \mathcal{U}$ si avrebbe:

$$g^0_{xx} \lessgtr 0 \quad ; \quad g^0_{yy} \gtrless 0$$

rispettivamente, il che è assurdo $\square$

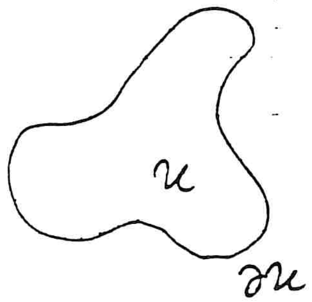
(+) verifichiamo nell'ulteriore ipotesi che $g^0_{xx} \neq 0$
Further assume

Dunque, eventuali massimi o minimi si trovano sulla frontiera di $\mathcal{U}$ ...
boundary

☆ Teorema di (Caccioppoli - Cimmino) - Weyl
("regolarità ellittica")
elliptic regularity

"' una funzione armonica è liscia."

☆ Problema di Dirichlet



Sia $f \in \mathcal{C}^0(\partial\mathcal{U})$
Determinare g tale che
$g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$, g si
estenda con continuità a $\overline{\mathcal{U}}$,
continuous extension

e
$$\begin{cases} \Delta g = 0 & \text{in } \mathcal{U} \\ g|_{\partial\mathcal{U}} = f \end{cases}$$

[.. g : potenziale elettrostatico, .. o gravitazionale

under general conditions this problems admits a (unique) solution
In condizioni generali tale problema è
(univocamente) risolubile

☆ osserviamo che se $f \equiv c$ (costante)
è necessariamente $g \equiv c$

Tale risultato spiega, ad esempio,
la "gabbia di Faraday"
cage

Sia data una regione Ω semplicemente connessa

Sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ armonica : $\Delta u = 0$

È possibile determinare v armonica tale che $f := u + iv$ sia olomorfa?

Sì: le condizioni di Cauchy-Riemann richiedono che la 1-forma

$$\omega := -u_y \, dx + u_x \, dy$$ sia

esatta. Ma tale forma è chiusa (closed) (u è armonica), e l'asserto segue dal lemma di Poincaré. Ovviamente v è determinata (is determined up to a) a meno di una costante (constant).

Es. $u = x(x^2 - 3y^2)$
$= x^3 - 3xy^2$
trovare v

Si constata facilmente che l'equazione di Laplace è invariante per trasformazioni (invariant under conformal maps) conformi. Tale fatto è utilissimo (most useful) nelle applicazioni.

Si consideri un fluido perfetto irrotazionale bidimensionale: se $\underline{v}$ è il suo campo di velocità ciò significa (introducendo una terza dim. ausiliaria)

$\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$\operatorname{curl} \underline{v} = 0$ (irrotazionale)

anche: (se $\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + 0 \underline{k}$)

$$(v_1)_x + (v_2)_y = 0$$
$$(*)$$
$$(v_2)_x - (v_1)_y = 0$$

Questo significa che

$f := v_2 + i v_1$ è <u>olomorfa</u>

(le (*) sono le relazioni (CR))

Equiv:

$-if = v_1 - i v_2$ olomorfa

F. Klein's point of view

Also: take $f = u + iv$ holomorphic

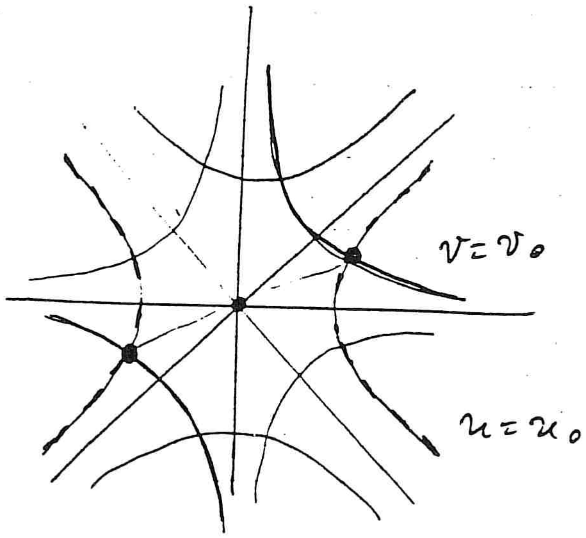
Let $\mathbf{V} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ $\quad \mathbf{V} = \nabla u$

then
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \quad \text{(Schwarz)} \end{aligned}$$

$\vec{\mathbf{V}}$: velocity field of an <u>incompressible</u> and <u>irrotational</u> fluid

⚡ $w = z^2$

$$= (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u} + \underbrace{2xy}_{v}\, i$$



$u = u_0$

$v = v_0$

famiglie ortogonali di iperboli equilatere

⚠ crucial example

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad w = f(z) = z^2$

not bijective

non è biunivoca

$f' = 2z$

(c'è però locale invertibilità)

local invertibility

$(= 0 \text{ se } z = 0)$

f is not conformal at 0

On Klein's approach

$w = w(z)$ $\qquad$ $w(z_0) = 0$ to fix ideas

at z_0 $\quad \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dots = \dfrac{\partial^\alpha w}{\partial z^\alpha} = 0 \qquad \dfrac{\partial^{\alpha+1} w}{\partial z^{\alpha+1}} \neq 0$ $\quad$ cross-point of mult. α

$$w = a\,(z - z_0)^{\alpha+1} \dots \qquad z - z_0 = r e^{i\phi}$$

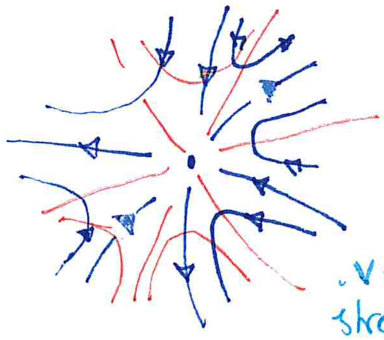
$$= a\, r^{\alpha+1} e^{i(\alpha+1)\phi} \qquad \text{take } a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} u = r^{\alpha+1} \cos(\alpha+1)\phi \\ v = r^{\alpha+1} \sin(\alpha+1)\phi \end{cases}$$

at z_0

$\alpha+1$ curves $u = c$ which meet at equal angles

$\alpha+1$ curves $v = c$ bisect those angles

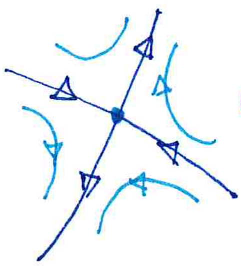


$\alpha = 2$

$w \sim (z - z_0)^3$

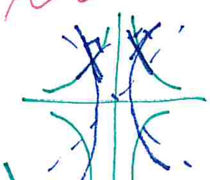
$v = c$ stream lines

$u = c$ equipotential lines



$\alpha = 1$ simple cross pt

also: $w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\,\underbrace{xy}_{v}$ $\qquad$ to be discussed later on

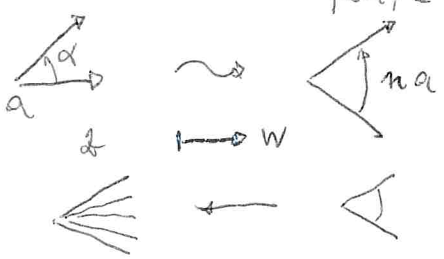


index $= -1$ in vector field terminology

higher multiplicity cross-points:
via coalescence of simple cross points

$$w = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$$



typical example: $w = z^n$