Extra material

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera UCSC - Brescia

Lecture XL

Capitolo 3

Basi equivalenti e funzioni automorfe

3.1 Reticoli equivalenti

Abbiamo detto che dati due numeri complessi ω_1, ω_2 con rapporto non reale (ovvero linearmente indipendenti) è univocamente definito il reticolo Λ che li ammette come periodi fondamentali. Tuttavia preso un reticolo Λ non è affatto unica la coppia di periodi che lo genera. Anzi, di coppie ce ne sono addirittura infinite.

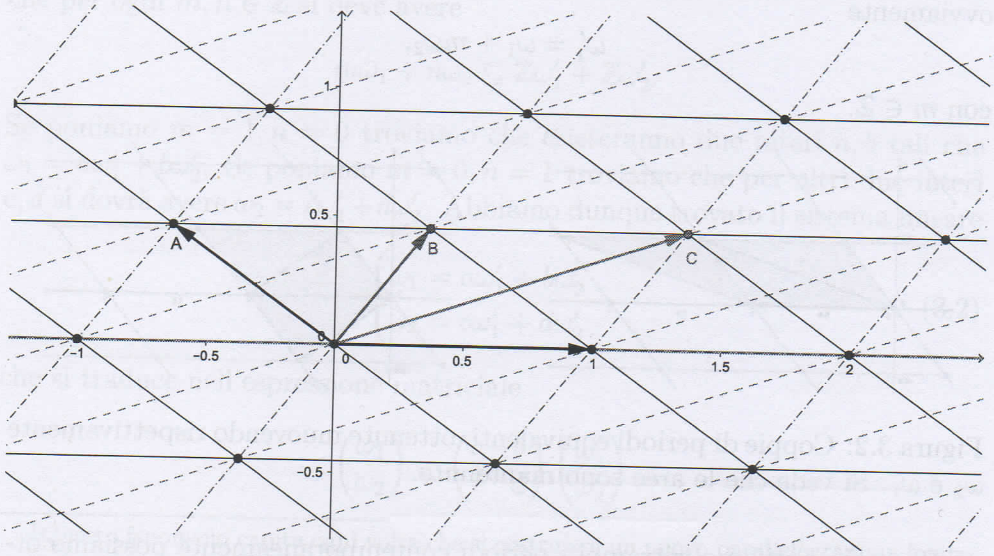

Figura 3.1: Reticoli equivalenti

P. Galvagni "Funzioni ellittiche"

XL-1

Per accorgersi di questo fatto è sufficiente guardare la figura 3.1, in cui uno stesso reticolo viene generato da tre diverse scelte del periodo ω_2, ottenute collegando l'origine con i punti A, B, C (in questo esempio ω_1 è sempre fisso). Dalla figura è anche chiaro che di coppie ce ne sono infinite: infatti possiamo continuare l'etichettamento dei punti $A, B, C, D, \ldots$ all'infinito ottenendo infinite coppie. Ogni coppia origina un parallelogramma fondamentale diverso (via via sempre più lungo e stretto), ma tutte generano lo stesso reticolo. Nel seguito, diremo *equivalenti* due coppie di periodi che danno origine allo stesso reticolo.

Ci chiediamo ora quale dev'essere la condizione da imporre sui periodi fondamentali per ottenere due coppie che siano equivalenti.

Osserviamo, sempre dalla figura, che se ad esempio consideriamo la griglia blu continua, cioè consideriamo come periodi fondamentali ω_1 e $\omega_2 = A$, per ottenere la griglia viola tratteggiata dobbiamo cambiare $\omega_2 = A$ in $\omega_2 = A + \omega_1$. Per ottenere la griglia rossa invece in $\omega_2 = A + 2\omega_1$, e così via per eventuali altri periodi.

Ragionando in questo modo si capisce che, considerando ω_1 fissato, la condizione di equivalenza tra periodi è che deve esistere un legame del tipo

$$\omega_2' = \omega_2 + n\omega_1$$

tra i periodi delle diverse coppie, con n un numero intero.

Abbiamo però anche un secondo modo di cambiare la coppia di periodi, ovvero spostare ω_1 e tenere fermo ω_2. In questo caso il legame sarà ovviamente

$$\omega_1' = \omega_1 + m\omega_2,$$

con $m \in \mathbb{Z}$.

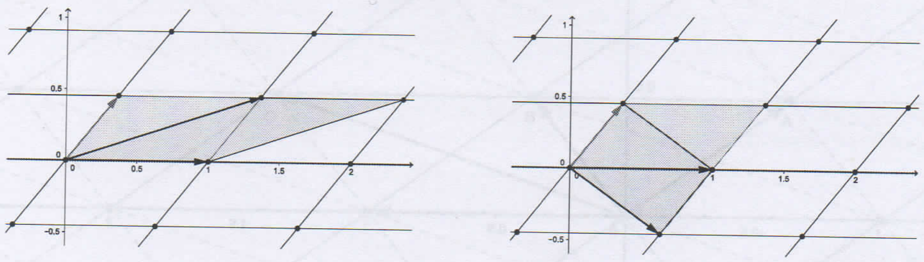

Figura 3.2: Coppie di periodi equivalenti, ottenute muovendo rispettivamente ω_2 e ω_1. Si vede che le aree sono mantenute.

Se però spostiamo entrambi i periodi contemporaneamente possiamo ottenere un reticolo differente da quello originario, come si può vedere dalla

XL-2

figura 3.3. Infatti il reticolo ottenuto sarà "meno fine" di quello di partenza nel senso che contiene solo la metà dei punti originari.[1]

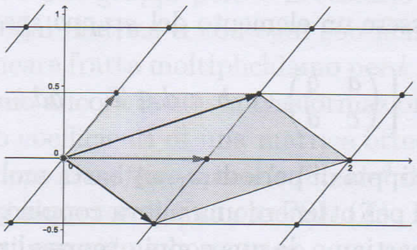

Figura 3.3: Coppia di periodi generanti un reticolo meno fine.

Osserviamo che ogni volta che sostituiamo uno solo dei periodi con un periodo equivalente, l'area del parallelogramma fondamentale non cambia. Infatti il nuovo parallelograma ha sempre stessa base e stessa altezza. In generale non è difficile vedere che le coppie di periodi che mantengono le aree dei parallelogrammi sono tutte e sole le coppie che risultano essere equivalenti. Traduciamo questo fatto in una condizione algebrica di equivalenza.

Sia ω_1, ω_2 una coppia di periodi e sia ω_1', ω_2' una seconda coppia di periodi. Supponiamo di sapere che entrambe generano lo stesso reticolo Λ, ovvero

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2', \tag{3.1}$$

e di voler trovare il legame tra le due coppie. Usando l'inclusione $\subseteq$ otteniamo che per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ si deve avere

$$m\omega_1 + n\omega_2 \subseteq \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'.$$

Se poniamo $m = 1, n = 0$ troviamo che esisteranno due interi a, b tali che $\omega_1 = a\omega_1' + b\omega_2'$. Se poniamo $m = 0, n = 1$ troviamo che per altri due interi c, d si dovrà avere $\omega_2 = c\omega_1' + d\omega_2'$. Abbiamo dunque trovato il sistema lineare

$$\begin{cases} \omega_1 = a\omega_1' + b\omega_2' \\ \omega_2 = c\omega_1' + d\omega_2' \end{cases} \tag{3.2}$$

che si traduce nell'espressione matriciale

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}$$

[1]Questo fenomeno capita ogni volta che si costruisce un nuovo parallelogramma fondamentale che però contiene (al suo interno o eventualmente sui lati) punti del reticolo Λ, cosa che infatti accade nell'esempio mostrato in figura.

XL-3

Ora siccome la trasformazione deve mantenere le aree,[2] la matrice deve avere determinate unitario.[3] Sappiamo poi che i coefficienti a, b, c, d devono essere interi, e queste due condizioni ci portano a dire che la matrice di trasformazione deve essere un elemento del *gruppo speciale lineare* ovvero di

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

Dunque data una coppia di periodi ω_1, ω_2 basta moltiplicare a sinistra per una matrice in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ per ottenere una nuova coppia generante lo stesso periodo. Ad esempio se partiamo da una coppia “normalizzata” $1, \tau$, applicando la matrice

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

otterremo $1 + \tau, \tau$, che è una nuova coppia di periodi e genera un parallelogramma avente la stessa area di quello di partenza.

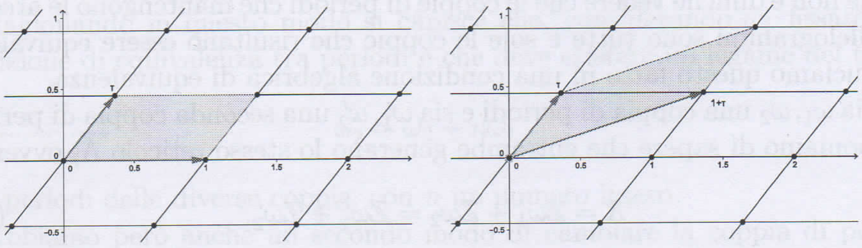

Figura 3.4: Azione della matrice T sul parallelogramma fondamentale

Vogliamo ora trovare una corrispondenza biunivoca tra l’insieme di tutti i possibili reticoli e i punti di una regione di piano complesso. Per farlo dobbiamo vedere in un altro modo gli elementi di $SL_2(\mathbb{Z})$, e cioè non come matrici bensì come trasformazioni di Möbius (ricordiamo a tal proposito la definizione 1.4).

[2] Si può in alternativa sfruttare l’inclusione inversa $\supseteq$ nella (3.1) e trovare un secondo sistema lineare simile al primo tramite il quale si giunge alla stessa condizione sul determinante, anche senza l’osservazione sulle aree.

[3] A rigore il determinante può essere ± 1, ma possiamo trasformare una coppia di periodi tramite la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha l’effetto di fissare ω_1 e di cambiare segno a ω_2. Possiamo servirci di questa trasformazione (che ha determinante -1 e quindi conserva le aree) qualora il determinante della trasformazione fosse negativo, in modo da poter sempre supporre che la parte immaginaria di $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ dopo le due trasformazioni sia positiva. Per questo motivo possiamo sempre supporre nel seguito che il determinante sia $+1$.

XL-3

Se consideriamo le trasformazioni di Möbius a coefficienti in $\mathbb{Z}$ otteniamo un gruppo che è fortemente somigliante al gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Per poter costruire un isomorfismo tra i due gruppi però è necessario quozientare il gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ identificando ogni matrice α con ogni suo multiplo $k\alpha$. Infatti se in una trasformazione lineare fratta moltiplichiamo per k tutti e quattro i coefficienti a, b, c, d otteniamo ancora la stessa trasformazione, mentre se facciamo lo stesso con i quattro coefficienti di una matrice otteniamo una matrice diversa. Chiamiamo *gruppo proiettivo speciale lineare*[4] il gruppo quoziente così ottenuto, e lo identifichiamo con il simbolo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Possiamo ora costruire il seguente isomorfimo: associamo la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

alla trasformazione lineare fratta $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ che manda

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Osserviamo che l'associazione è ben definita: la composizione di trasformazioni lineari fratte corrisponde proprio al prodotto di matrici, come si può facilmente verificare. Inoltre l'identità di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ corrisponde alla trasformazione avente $a = d = 1$ e $b = c = 0$ ovvero $z \to z$.

Tramite questa identificazione possiamo definire un modo di "applicare" una matrice a un numero complesso, ovvero possiamo definire la seguente *azione*: presa una matrice $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, poniamo

$$\alpha(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Facciamo un paio di esempi che si riveleranno fondamentali nel seguito. Prendiamo la matrice T sopra definita e prendiamo la trasformazione lineare fratta a essa associata; otteniamo:

$$T(z) = \frac{1z+1}{0z+1} = z+1,$$

quindi T ha l'effetto di spostare a destra di un'unità il numero z. Se prendiamo la matrice S definita come segue

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[4] Il significato della parola proiettivo è chiaro: stiamo infatti considerando come equivalenti matrici che differiscono per un fattore di scala, proprio allo stesso modo in cui consideriamo equivalenti n-uple che differiscono per un fattore di scala quando definiamo le coordinate proiettive.

XL-4

otteniamo invece
$$S(z) = \frac{0z-1}{1z+0} = -\frac{1}{z},$$
ovvero l'inversione cambiata di segno, che mappa la parte di piano esterna al cerchio unitario nella parte di piano interna al cerchio unitario (e viceversa), e cambia segno al risultato. Osserviamo che sia T che S sono *chiuse* rispetto al semipiano superiore, ovvero possono essere ristrette a funzioni $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Tramite l'associazione tra matrici di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ e trasformazioni lineari fratte possiamo riscrivere la condizione (3.2) nel seguente modo equivalente: diremo che due coppie di basi ω_1, ω_2 e ω_1', ω_2' sono equivalenti (ovvero generano lo stesso reticolo) se esiste una trasformazione lineare fratta a coefficienti interi che porta $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ in $\tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}$, ovvero
$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{3.3}$$

Riformulando il problema del cambio di base in questo modo, cioè usando le trasformazioni di Möbius, possiamo vedere più chiaramente la posizione reciproca dei punti τ tra loro equivalenti sul semipiano $\mathcal{H}$. Nel seguito, per semplicità di notazione, denoteremo talvolta con Γ il gruppo speciale lineare $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ e con G il gruppo quoziente $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Immaginiamo di prendere un elemento $\tau \in \mathbb{C}$ e di applicarvi in tutti i modi possibili un qualsiasi numero di matrici di Γ. Chiameremo *orbita* di τ la totalità dei punti che possiamo raggiungere in questo modo, e la indicheremo con la notazione $\Gamma(z)$, come se l'intero gruppo Γ venisse applicato all'elemento τ. Osserviamo che nell'ambito del problema del cambio di base, dal quale siamo partiti, l'orbita di un punto τ corrisponde all'insieme di tutte le possibili basi equivalenti alla coppia $1, \tau$, indotte da matrici di Γ.[5]

Chiameremo *dominio fondamentale* una porzione di piano complesso che contiene uno e uno solo dei punti appartenenti all'orbita di z. L'utilità di tale insieme è quella di rappresentare tutti i punti dell'orbita tramite un singolo z del dominio fondamentale. In altre parole, stiamo rappresentando con un punto tutte le possibili basi equivalenti, sia nel senso di basi generanti lo stesso reticolo, sia nel senso di basi ottenute moltiplicando per un $c \in \mathbb{C}^*$.[6] Dunque ogni punto di questo dominio rappresenta una diversa clase di reticoli!

[5] In pratica l'orbita di un $\tau \in \mathcal{H}$ consiste nella sua *classe di equivalenza*, secondo la relazione di equivalenza indotta dalla (3.3), ovvero τ e τ' sono equivalenti quando sono legati da una trasformazione lineare fratta.

[6] Infatti la mappa $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \tau$ è invariante per moltiplicazione per c, dal momento che nel fare il rapporto tra i due periodi ogni costante moltiplicativa si semplifica.

XL-5

Diciamo che il dominio fondamentale del gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è il seguente insieme:

$$D := \{z \in \mathcal{H} : -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,(z) < \frac{1}{2}, |z| \geq 1\} \cup B_1 \cup B_2$$

dove B_1 è il bordo sinistro della regione, e B_2 è la metà sinistra dell'arco inferiore, ovvero

$$B_1 = \{z \in \mathcal{H} : \mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$$

$$B_2 = \{z \in \mathcal{H} : -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,(z) \leq 0, |z| = 1\}.$$

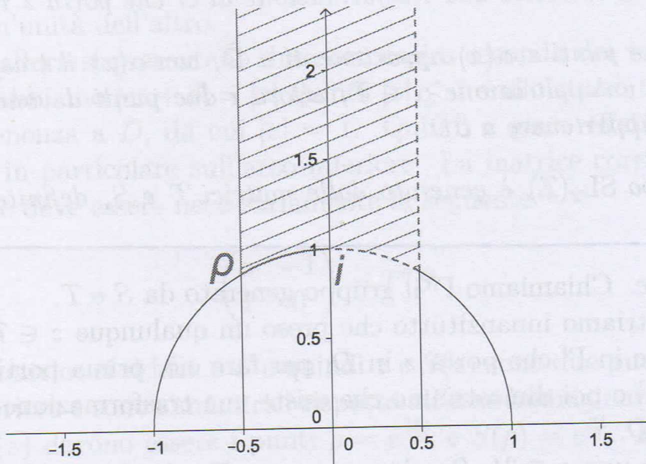

Figura 3.5: Dominio fondamentale

Premettiamo il seguente lemma per dimostrare il successivo teorema.

Lemma 3.1. *Sia* $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *Vale la relazione seguente*

$$\mathrm{Im}\,\alpha(z) = \frac{\mathrm{Im}\,z}{|cz + d|^2}$$

Dimostrazione. Scriviamo $z = x + iy$. Razionalzzando abbiamo

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{ax + aiy + b}{cx + ciy + d} \cdot \frac{cx + d - ciy}{cx + d - ciy}$$
$$= \frac{acx^2 + acy^2 + adx + bcx + bd + iy(ad - bc)}{|cz+d|^2}$$

XL-6

la cui parte immaginaria è

$$\mathrm{Im}\,\frac{az+b}{cz+d} = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

dato che $ad - bc = 1$. □

Il significato geometrico del lemma è che ogni trasformazioni lineare fratta in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è chiusa rispetto al semipiano $\mathcal{H}$: infatti la parte immaginaria mantiene il suo segno, e viene solo riscalata da un fattore positivo. Veniamo ora a un importante risultato.

Teorema 3.2. *Valgono i tre fatti seguenti:*

(a) *Preso $z \in \mathcal{H}$ esiste una trasformazione di G che porta z in D.*

(b) *Dati due punti $z, \alpha(z)$ appartenenti a $\bar{D}$, con $\alpha(z)$ il trasformato di z tramite un'applicazione $\alpha \in \Gamma$, allora i due punti devono necessariamente appartenere a ∂D.*

(c) *Il gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è generato dalle matrici T e S, definite precedentemente.*

Dimostrazione. Chiamiamo Γ' il gruppo generato da S e T.

(a) Dimostriamo innanzitutto che preso un qualunque $z \in \mathcal{H}$ esiste una trasformazione in Γ' che porta z in D; per fare ciò, prima portiamo z nella striscia $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e poi dimostriamo che esiste una trasformazione che porta z nella regione D.

Prendiamo uno $z \in \mathcal{H}$. Scegliamo un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $T^n(z)$ giaccia nella striscia $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z \leq \frac{1}{2}\}$; questo si può sempre fare perché l'effetto di T è quello di spostare a destra di un'unità, quindi con successive traslazioni arriviamo di certo nella striscia.

Esisterà un $\alpha \in \Gamma'$ tale che $\mathrm{Im}\ \alpha(z)$ è massima. Infatti ci sono solo un numero finito di coppie di interi c, d tali che $|cz + d| \leq k$ (k numero positivo qualsiasi), e dal lemma segue che

$$|cz + d|^2 \mathrm{Im}\ \alpha(z) = \mathrm{Im}\ z.$$

A questo punto applichiamo a $T^n(z)$ la trasformazione α: otteniamo che $\alpha T^n(z)$ deve stare per forza nella regione D (se infatti avessimo $|\alpha T^n(z)| < 1$ potremmo applicare S e ottenere una parte immaginaria più grande, contro l'ipotesi che $\alpha(z)$ abbia parte immaginaria massima). Finita la dimostrazione di questo teorema, per completezza vedremo come costruire operativamente α dal punto di vista geometrico-intuitivo.

XL-7

(b) Dimostriamo ora che se $z \in \bar{D}$ e anche $\alpha(z) \in \bar{D}$ allora siamo nella situazione in cui z e $\alpha(z)$ stanno in ∂D. Possiamo supporre che $\operatorname{Im} \alpha(z) \geq \operatorname{Im} z$ senza perdere in generalità.[7] Dal lemma segue che $|cz+d| \leq 1$, e questo può verificarsi solo nei casi in cui $c = -1, 0, 1$. Infatti $\operatorname{Im} z \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ quindi di certo non può risultare $|c| \geq 2$.[8] Analizziamo i casi uno per uno.

Se $c = 0$ allora la matrice α non può che essere

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^b.$$

Se $\alpha(z) \in D$ come abbiamo supposto, allora non può che essere $b = 0$ (in tal caso $\alpha = I$) oppure $b = \pm 1$. Quindi z e $\alpha(z)$ stanno rispettivamente nel lato verticale destro e sinistro di D (o viceversa), dal momento che sono uno il traslato di un'unità dell'altro.

Se $c = 1$ allora si presentano due sottocasi a seconda del valore di d. Se $d = 0$ allora abbiamo $|cz+d| = |z|$ quindi $|z| \leq 1$ e allo stesso tempo $|z| \geq 1$ per l'appartenenza a D, da cui $|z| = 1$. Quindi z giace effettivamente sul bordo di D, in particolare sull'arco inferiore. La matrice corrispondente al caso in esame deve essere necessariamente la seguente

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^a S.$$

Se $a = 0$ la matrice si riduce a S e quindi z e $S(z)$ sono due punti che stanno sull'arco inferiore e sono simmetrici rispetto all'asse immaginario. Se $a = \pm 1$ allora z e $S(z)$ devono essere i punti $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $S(\rho) = e^{\frac{\pi i}{3}}$. Il caso $|a| > 1$ non può invece verificarsi.

Se $d = \pm 1$ allora abbiamo che z è tale che $|z+1| \leq 1$ o $|z-1| \leq 1$, che sono i due cerchi di raggio unitario centrati rispettivamente in $+1$ e -1. È quindi chiaro che, essendo per costruzione $z \in D$, deve risultare $z = \rho$ o $z = S(\rho)$ come nel caso precedente, ovvero z è uno dei punti estremi dell'arco. Poniamo per esempio $d = +1$. La matrice sarà fatta senz'altro così:

$$\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^a ST.$$

[7] Infatti qui z e $\alpha(z)$ giocano un ruolo simmetrico, quindi se non dovesse valere la disuguaglianza detta basta rinominare $\alpha(z)$ in z e α in α^{-1} per otteneme la validità.

[8] Se fosse per assurdo $|c| \geq 2$ nel caso migliore avremmo che $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $c = 2$, quindi

$$|cz+d| = |2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + d| = |1 + i\sqrt{3} + d|$$

che è sempre maggiore di 1 per qualunque scelta di d.

XL-8

che infatti ha determinante $+1$. Troviamo i valori possibili per a. Se $a = 0$ allora

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST$$

quindi $\alpha(z) = -\frac{1}{z+1}$. Se applichiamo α a $z = \rho$ otteniamo

$$\alpha(\rho) = -\frac{1}{\rho + 1} = \rho$$

per le proprietà della radice cubica dell'unità ρ. Se $a = 1$ allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = TST.$$

e quindi $\alpha(z) = -\frac{1}{z+1} + 1$ che per $z = \rho$ diventa $\alpha(\rho) = \rho + 1$. Il caso $d = -1$ è simile al caso $d = +1$. Infine per $\alpha \neq 0, 1$ si dimostra facilmente che $\alpha(z) \notin D$, quindi i restanti casi sono tutti impossibili.

(c) Mostriamo infine che Γ è generato da S e T, mostrando che ogni $\alpha \in \Gamma$ sta anche in Γ'. Sia z nella parte interna di D. Applichiamo a z un $\alpha \in \Gamma$ e otteniamo un punto w eventualmente esterno a D. Ora per quando detto nel punto (a) esiste un $\alpha' \in \Gamma'$ che porta w in D. Per il punto (b) inoltre z e $\alpha'(w) = \alpha'\alpha(z)$ devono essere lo stesso punto. Segue quindi che $\alpha' = \alpha^{-1}$ e quindi α sta in Γ. □

Possiamo dare un modo esplicito per costruire l'applicazione che porta $z \in \mathcal{H}$ in D. Innanzitutto appichiamo T a z finché non arriviamo nella striscia $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. A questo punto se siamo finiti nella regione D abbiamo finito; in caso contrario, applichiamo una volta l'inversione S trovando un punto la cui parte immaginaria è di certo aumentata. Questo punto può trovarsi già in D oppure esternamente. Se è in D abbiamo finito, altrimenti applichiamo T finché non torniamo a stare nella striscia, e così via. Il teorema assicura che questo procedimento termina in un numero finito di passi.

Osserviamo che la trasformazione complessiva che porta z in D si presenta sempre nella forma $T^{n_k}S \cdots ST^{n_2}ST^{n_1}$.

3.2 Funzioni automorfe

Possiamo chiederci se esistono delle funzioni che siano invarianti rispetto all'azione di gruppo che abbiamo introdotto. In altre parole cerchiamo una $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tale che

$$f(\alpha(\tau)) = f(\tau). \tag{3.4}$$

XL - 9

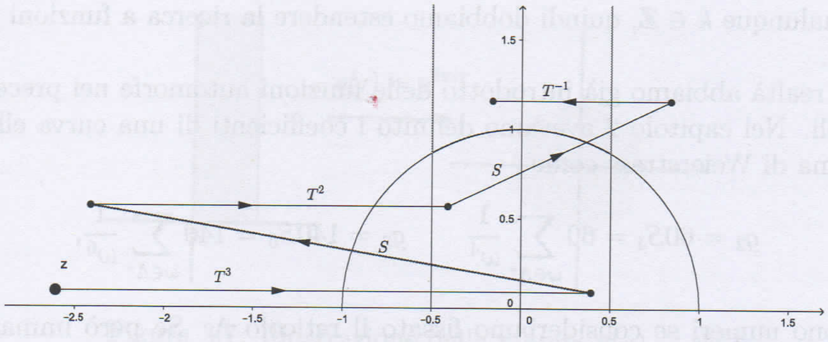

Figura 3.6: Procedimento che porta z in D.

Cercare siffatte funzioni equivale a cercare funzioni che siano invarianti quando si passa da una base all'altra del reticolo, ovvero funzioni che "non si accorgono" dei cambi di base tra basi equivalenti.

Cominciamo introducendo la definizione seguente, che richiede una condizione di invarianza più debole:

Definizione 3.3. *Sia $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa e sia $k \in \mathbb{Z}$. Diremo che f è* automorfa di peso $2k$ *se vale la relazione*

$$\boxed{f(\alpha(\tau)) = f(\tau)(c\tau + d)^{2k}}$$

per ogni trasformazione lineare fratta $\alpha(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.[9]

Una funzione automorfa resta quindi invariata, a meno di un fattore "peso". Fortunatamente per verificare se una funzione è automorfa non è necessario controllare che la definizione sia rispettata *per ogni* scelta di $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: grazie al punto (c) del teorema 3.2 è sufficiente dimostrare che

$$f(T(\tau)) = f(\tau)$$
$$f(S(\tau)) = \tau^{2k} f(\tau).$$

Notiamo che la prima condizione corrisponde a richiedere che f sia semplicemente periodica, con periodo unitario. Saremmo tentati di provare a verificare la condizione sulle funzioni trigonometriche elementari, per esempio la funzione $\sin(2\pi z)$ che indubbiamente rispetta la prima condizione. Tuttavia

$$\sin(-\frac{1}{2\pi z}) \neq z^{2k} \sin(2\pi z)$$

[9] Certi autori preferiscono chiamare *funzione debolmente modulare di peso 2k* (*weakly modular function of weight 2k*) una funzione così fatta. Si tenga presente che le due nozioni sono equivalenti.

XL-10

per qualunque $k \in \mathbb{Z}$, quindi dobbiamo estendere la ricerca a funzioni meno banali.

In realtà abbiamo già introdotto delle funzioni automorfe nei precedenti capitoli. Nel capitolo 2 avevamo definito i coefficienti di una curva ellittica in forma di Weierstrass come

$$g_2 = 60S_4 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^4} \qquad g_3 = 140S_6 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^6},$$

che sono numeri se consideriamo fissato il reticolo Λ. Se però immaginiamo di lasciare libero di muoversi uno dei due periodi fondamentali, ovvero consideriamo

$$\Lambda(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$$

(usiamo addirittura i periodi normalizzati 1, τ) vediamo che possiamo interpretare g_2 e g_3 come funzioni di τ anziché come numeri, ovvero

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n\tau+m)^4} \qquad g_3(\tau) = 140 \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n\tau+m)^6}.$$

Così facendo, g_2 e g_3 sono funzioni automorfe di peso 4 e 6 rispettivamente. Infatti la prima condizione si traduce in un semplice riordinamento degli addendi, e la seconda condizione è:

$$g_2(-\frac{1}{\tau}) = 60 \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(-n\frac{1}{\tau}+m)^4} = 60 \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{\tau^4}{(-n+\tau m)^4} = \tau^4 g_2(\tau)$$

e analogamente per g_3 da cui risulta un fattore di τ^6.

Vediamo ora alcuni risultati generali sulle funzioni automorfe. Iniziamo col definire la seguente mappa su $\mathcal{H}$:

$$q : \begin{cases} \mathcal{H} \to \mathcal{D}\backslash\{0\} \\ \tau \mapsto e^{2\pi i\tau} \end{cases}.$$

La funzione q porta il semipiano superiore in $\mathcal{D}\backslash\{0\}$, ovvero nel disco aperto di raggio unitario, privato del centro. Infatti aumentando la parte immaginaria di τ l'immagine $q(\tau)$ del punto si avvicina sempre di più al centro del disco (con andamento esponenziale) senza mai raggiungerlo se non all'infinito. La mappa definita in questo modo non è di certo iniettiva, dato che tutti i punti $\tau + n$ con n intero vengono mandati nella stessa immagine. Tuttavia essa induce una mappa (sempre denotata con q) definita sullo spazio quoziente $\mathcal{H}/T$, dove T è lo shift a destra, che stavolta è bijettiva.

end of the first part

XL-11