

second part

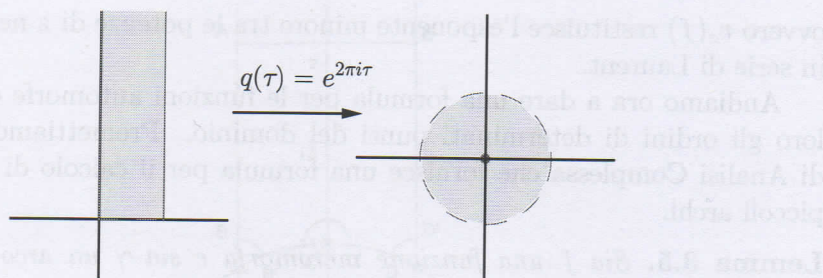


Figura 3.7: Illustrazione della mappa $q(\tau) = e^{2\pi i\tau}$

Partendo da una funzione $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ risulta definita in modo naturale una funzione $\tilde{f} : \mathcal{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ come composizione $f = \tilde{f} \circ q$.

La mappa q è utile perché permette di dare uno sviluppo in serie per f , nel seguente modo. Se supponiamo f meromorfa, siccome f è periodica con periodo 1, ammette sviluppo in serie di Fourier, che scriviamo nella forma

$$f(\tau) = \sum_{-m}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}.$$

Questo sviluppo di Fourier per f può essere letto come uno sviluppo di Laurent per \tilde{f} , e cioè

$$\tilde{f}(q) = \sum_{-m}^{\infty} a_n q^n.$$

È naturale introdurre la seguente definizione, che permette di ricondurre il comportamento di f all'infinito al comportamento di \tilde{f} in zero.

Definizione 3.4. Diciamo che f è meromorfa (risp. olomorfa) all'infinito se \tilde{f} è meromorfa (risp. olomorfa) in zero.

Di conseguenza dato che \tilde{f} ha una singolarità di ordine $-m$ in zero (come si può vedere dallo sviluppo in serie di Laurent), diremo che f ha una singolarità di ordine $-m$ all'infinito.¹⁰ Denotiamo con la scrittura $v_{\infty}(f)$ l'ordine $-m$ della singolarità all'infinito.

Denotiamo in generale l'ordine di un punto z qualsiasi nel dominio di f con la scrittura $v_z(f)$. L'ordine può essere:

$$v_z(f) = \begin{cases} +n & \text{se } z \text{ è zero di ordine } n \\ -n & \text{se } z \text{ è polo di ordine } n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

¹⁰Per singolarità intendiamo un polo o uno zero, convenendo che una singolarità di ordine negativo sia un polo e una di ordine positivo sia uno zero.

81-JX

XL-12

ovvero $v_z(f)$ restituisce l'esponente minore tra le potenze di z nello sviluppo in serie di Laurent.

Andiamo ora a dare una formula per le funzioni automorfe che lega tra loro gli ordini di determinati punti del dominio. Premettiamo un lemma di Analisi Complessa che fornisce una formula per il calcolo di integrali su piccoli archi.

Lemma 3.5. *Sia f una funzione meromorfa e sia γ un arco di raggio ϵ tendente a zero e di ampiezza $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} v_z(f) \Delta\theta.$$

Dimostrazione. La funzione f avrà sviluppo

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-m}^{\infty} a_n z^n = \frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \\ &= \frac{a_{-m}}{z^m} (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \end{aligned}$$

dove con b_n sono stati indicati i nuovi coefficienti. Applicando la derivata logaritmica otteniamo

$$\frac{d \log f(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\log \frac{a_{-m}}{z^m} + \log(1 + b_n z + \dots) \right] = -\frac{m}{z} + A(z)$$

dove $A(z)$ denota un insieme di termini analitici. Poniamoci ora in un sistema di riferimento traslato, in cui l'origine coincida con il centro dell'arco. Se il raggio $\epsilon \rightarrow 0$ il contributo dei termini analitici tende a zero, quindi la funzione f'/f per piccoli raggi si comporta come $-m/z$ e l'integrale diventa

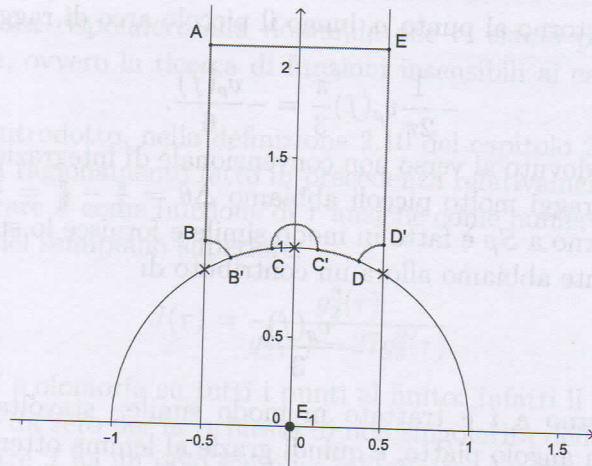
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} -\frac{m}{z} dz = -\frac{m}{2\pi i} \left[\log z \right]_a^b$$

dove a e b denotano gli estremi dell'arco γ . Ora siccome a, b sono numeri complessi, essi potranno essere rappresentati in forma esponenziale, ovvero

$$\frac{-m}{2\pi i} \left[\log(|b|e^{i\theta_2}) - \log(|a|e^{i\theta_1}) \right] = -\frac{m}{2\pi i} \left[\log |b| + i\theta_2 - \log |a| - i\theta_1 \right].$$

Siccome i logaritmi dei moduli di a e b sono molto vicini, al limite possiamo semplificarli, e resta quindi la formula voluta, dove $-m = v_z(f)$. \square

Veniamo ora al teorema vero e proprio, noto talvolta come formula di valenza (*valence formula*).

Figura 3.8: Percorso di integrazione sul bordo di D .

Teorema 3.6. Sia f una funzione automorfa di peso $2k$ non nulla. Allora vale la seguente formula

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{3}v_{\rho}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_{z \neq i, \rho} v_z(f) = \frac{k}{6}.$$

La somma include tutti i punti diversi da i, ρ nel dominio fondamentale D .

Dimostrazione. Dobbiamo integrare la derivata logaritmica di f sul bordo di D , evitando i punti singolari sulla frontiera. Supponiamo che f non abbia poli o zeri in ∂D fatta eccezione per i e ρ , che è il caso più delicato. Da una parte abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in \partial D} \text{Res}[f]_z = \sum_{z \neq i, \rho} v_z(f)$$

per il teorema dell'indicatore logaritmico. D'altra parte dobbiamo calcolare l'integrale sulla curva detta. Il segmento EA in alto (virtualmente posto all'infinito) viene trasformato dal cambio di variabile indotto da q in un piccolo cerchio attorno all'origine, percorso in senso orario.¹¹ L'unico punto singolare all'interno del cerchio è l'origine stesso e quindi l'integrale risulta essere pari a $-v_{\infty}(f)$.

L'integrale verso il basso del lato sinistro si elide esattamente con l'integrale verso l'alto del lato destro, grazie alla periodicità della funzione.

¹¹Si dimostra che questa sostituzione non cambia lo jacobiano dell'integrale, dato che il fattore $2\pi i q$ che compare nella sostituzione viene semplificato.

L'integrale attorno al punto ρ , lungo il piccolo arco di raggio ϵ , grazie al lemma risulta

$$-\frac{1}{2\pi}v_\rho(f)\frac{\pi}{3} = -\frac{v_\rho(f)}{6}.$$

Il segno meno è dovuto al verso non convenzionale di integrazione, e l'angolo è $\frac{\pi}{3}$ perché per raggi molto piccoli abbiamo $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. L'integrale simmetrico attorno a $S\rho$ è fatto in modo simile e fornisce lo stesso risultato. Complessivamente abbiamo allora un contributo di

$$-\frac{v_\rho(f)}{3}.$$

L'integrale attorno a i è trattato in modo simile: stavolta la differenza angolare è di un angolo piatto, e quindi grazie al lemma otteniamo

$$-\frac{v_i(f)}{2}.$$

Trattiamo ora gli integrali sugli archi principali (in basso). La trasformazione S porta l'arco di sinistra $B'C$ nell'arco di destra DC' , cambiando il verso di percorrenza. Siccome f è per ipotesi automorfa deve valere la relazione

$$f(Sz) = z^{2k}f(z),$$

che possiamo usare per semplificare parzialmente i due integrali. Infatti dal momento che

$$f'(Sz) = \frac{d}{dz} [z^{2k}f(z)] = z^{2k}f'(z) + 2kz^{2k-1}f(z)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{B'}^C \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C'}^D \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{B'}^C \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{B'}^C \frac{f'(Sz)}{f(Sz)} dz \\ &= \int_{B'}^C \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{B'}^C \frac{2k}{z} dz - \int_{B'}^C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{B'}^C \frac{2k}{z} dz \\ &= 2k \left[\log z \right]_{B'}^C = 2k \log e^{\frac{\pi i}{2}} - 2k \log e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{2k\pi i}{6}. \end{aligned}$$

Nella penultima uguaglianza si è usato il fatto che $B' = \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $C = i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ per piccoli ϵ . Il contributo di quest'integrale è quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{2k\pi i}{6} = \frac{k}{6}$$

Mettendo insieme i vari contributi il teorema è dimostrato. \square

41-JX

XL-15

Possiamo ora rispondere alla domanda che ci siamo posti all'inizio di questa sezione, ovvero la ricerca di funzioni insensibili ai cambi di base del reticolo.

Abbiamo introdotto, nella definizione 2.10 del capitolo 2, l'invariante J . Se ripetiamo il ragionamento fatto in precedenza relativamente a g_2, g_3 , possiamo considerare J come funzione di τ anziché come numero, immaginando di muovere τ nel semipiano superiore:

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)}.$$

Vediamo che J è olomorfa su tutti i punti al finito: infatti il denominatore è sempre diverso da zero per la richiesta di non singolarità della curva ellittica associata. Inoltre J ha un polo semplice all'infinito, dal momento che si può dimostrare che $\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)$ ha uno zero semplice all'infinito.¹² Inoltre J è una funzione automorfa di peso 0, infatti

$$J(\tau + 1) = \frac{g_2^3(\tau + 1)}{g_2^3(\tau + 1) - 27g_3^2(\tau + 1)} = \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)} = J(\tau)$$

$$J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{g_2^3\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{g_2^3\left(-\frac{1}{\tau}\right) - 27g_3^2\left(-\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{(\tau^4 g_2(\tau))^3}{(\tau^4 g_2(\tau))^3 - 27(\tau^6 g_3(\tau))^2} = J(\tau).$$

Vale quindi la relazione di invarianza seguente

$$J(\alpha(\tau)) = J(\tau) \quad \forall \alpha \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

che si può leggere così: dato il reticolo Λ , effettuando un qualunque cambio di base tra le basi generanti Λ , il valore di J resta invariato.

Ma abbiamo detto che ogni punto del dominio fondamentale D è associato a una diversa classe di equivalenza tra reticoli (dove al solito si intendono equivalenti due reticoli Λ, Λ' tali che $\Lambda = c\Lambda'$); quindi il dominio fondamentale stesso è in corrispondenza uno a uno con l'insieme di tutte le classi di reticoli possibili. Allora deve risultare che J assume valori diversi su ogni singolo punto di D , senza mai assumere due volte lo stesso valore. Più precisamente, vediamo con il prossimo teorema che J assume esattamente una volta ogni singolo numero complesso $c \in \mathbb{C}$.

¹²Un modo per dimostrare questo fatto è notare che

$$g_2(\infty) = 60 \cdot 2\zeta(4) = 120 \frac{\pi^4}{90}$$

$$g_3(\infty) = 140 \cdot 2\zeta(6) = 280 \frac{\pi^6}{945},$$

dove ζ denota la funzione Zeta di Riemann. Si vede dunque che $g_2^3 - 27g_3^2$ si annulla all'infinito.

Teorema 3.7. *La funzione $J : D \rightarrow \mathbb{C}$ è una bijezione.*

Dimostrazione. Applichiamo la formula di valenza nel caso $k = 0$ alla funzione $g(z) := J(z) - c$ per un arbitrario $c \in \mathbb{C}$. Il membro di destra della (3.6) è nullo, e inoltre g ha un polo semplice all'infinito perché J ha un polo semplice all'infinito. Dunque $v_\infty(g) = -1$ e la formula si riduce a

$$\frac{1}{3}v_\rho(g) + \frac{1}{2}v_i(g) + \sum_{z \neq i, \rho} v_z(g) = 1.$$

Siccome g è analitica in tutto il suo dominio, i tre termini di sinistra devono essere degli interi positivi. Ma allora le possibilità sono ridotte ai seguenti tre casi. Può essere $v_\rho(g) = 3$ e $v_z(g) = 0, \forall z \neq \rho$ e in tal caso g ha uno zero triplo in ρ , ovvero $J(\rho) = c$. Può risultare $v_i(g) = 2$ e $v_z(g) = 0, \forall z \neq i$, e in tal caso g ha uno zero doppio in i da cui segue $J(i) = c$. Infine può essere $v_z(g) = 1$ per un certo $z \in \mathcal{D} \setminus \{i, \rho\}$ da cui segue che $J(z) = c$. In tutti i casi il valore c viene assunto da J esattamente una volta (eventualmente con molteplicità maggiore di uno) e questo prova il teorema. \square

Chiudiamo il capitolo con le fondamentali conseguenze di quest'ultimo risultato. Il primo corollario è l'analogo del teorema 1.7 riguardante l'equivalenza proiettiva tra cubiche (in termini del modulo j) e della sua riformulazione data dal teorema 2.12 (in termini dell'invariante J).

Corollario 3.8. *Siano Λ, Λ' due reticoli. Allora Λ è linearmente equivalente a Λ' se e solo se $J(\Lambda) = J(\Lambda')$.¹³*

Dimostrazione. Se i reticoli sono linearmente equivalenti, ovvero $\Lambda = c\Lambda'$ allora $J(\Lambda) = J(c\Lambda')$. Ma per definizione $J(c\Lambda') = J(\mathbb{Z}c + \mathbb{Z}\tau'c) = J(c\tau'/c) = J(\Lambda')$.

Viceversa supponiamo $J(\Lambda) = J(\Lambda')$ che per definizione significa $J(\tau) = J(\tau')$. Per il teorema sappiamo che J è iniettiva, ovvero

$$J(\tau) = J(\tau') \implies \tau = \tau'$$

quindi se poniamo come al solito $\tau = \omega_2/\omega_1$ e $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$ abbiamo che

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega'_2}{\omega'_1}$$

da cui

$$\begin{cases} \omega_1 = c\omega'_1 \\ \omega_2 = c\omega'_2 \end{cases}$$

ovvero $\Lambda = c\Lambda'$. \square

¹³Dato il reticolo $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ si è posto $J(\Lambda) := J(\tau)$.

Osserviamo che per il teorema 2.11, la condizione di equivalenza tra reticoli espressa dal corollario si trasmette ad una condizione di equivalenza tra curve ellittiche. In particolare, se $J(\Lambda) = J(\Lambda')$ allora le curve associate ai rispettivi reticoli saranno proiettivamente equivalenti.

La seconda conseguenza è la seguente:

Corollario 3.9. *Dati due numeri $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ tali che $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ allora esiste un reticolo Λ tale che*

$$c_2 = g_2(\Lambda) \quad \text{e} \quad c_3 = g_3(\Lambda)$$

Dimostrazione. Per il teorema, esiste $\tau \in D$ tale che

$$J(\tau) = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2} \in \mathbb{C}.$$

Prendiamo un reticolo $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ che di certo è linearmente equivalente al reticolo Λ che dobbiamo trovare. Cerchiamo un $w \in \mathbb{C}^*$ con cui riscalarlo M per ottenere $c_2 = g_2(\Lambda)$ e $c_3 = g_3(\Lambda)$. Mettiamoci innanzitutto nel caso particolare in cui $c_2 = 0$; avremo quindi $J(\tau) = 0$ e cioè $\tau = \rho$. Scegliamo w tale che $w^{-6}g_3(M)$ sia uguale a c_3 . In questo modo possiamo porre $\Lambda = wM$ e

$$\begin{aligned} g_3(\Lambda) &= g_3(wM) = w^{-6}g_3(M) = c_3 \\ g_2(\Lambda) &= g_2(wM) = w^{-4}g_2(M) = w^{-4}g_2(\rho) = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$g_2(\Lambda) = 0 \quad \text{e} \quad g_3(\Lambda) = c_3$$

come volevamo. Nel caso generale, ovvero $c_2 \neq 0$, scegliamo w tale che $w^{-4}g_2(M) = c_2$. Ponendo ancora $\Lambda = wM$ abbiamo che $g_2(\Lambda) = g_2(wM) = w^{-4}g_2(M) = c_2$, e c_2 è apposto. Dimostrato ciò, c_3 è costretto ad essere $g_3(\Lambda)$, infatti ricordando che per il precedente corollario $J(M) = J(\Lambda)$:

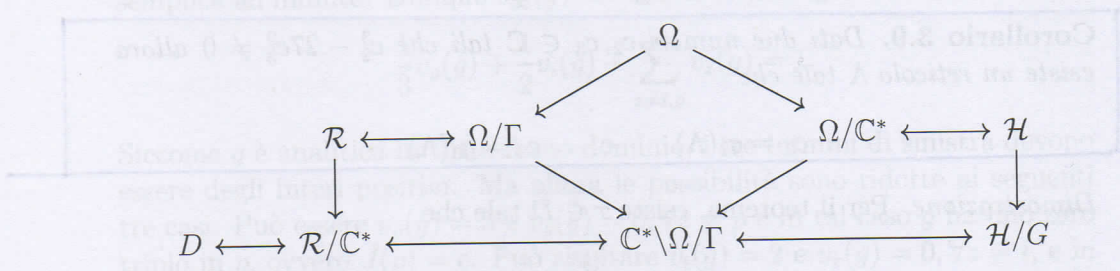
$$\frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2} = J(M) = J(\Lambda) = \frac{g_2^3(\Lambda)}{g_2^3(\Lambda) - 27g_3^2(\Lambda)} = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27g_3^2(\Lambda)}.$$

Per confronto deve risultare $c_3^2 = g_3^2(\Lambda)$ ovvero $c_3 = \pm g_3(\Lambda)$. Se vale l'uguaglianza con il segno + abbiamo finito. Altrimenti consideriamo iw anziché w , che ha l'effetto di cambiare segno a g_3 senza toccare g_2 , e il corollario è dimostrato. \square

Concludiamo con uno schema che vuole riassumere le relazioni esistenti tra gli oggetti incontrati. Identifichiamo con \mathcal{R} l'insieme di tutti i reticoli,

XL-19

e con Ω l'insieme di tutte le coppie di periodi possibili (ovvero qualunque coppia di numeri complessi il cui rapporto sia non reale). Le doppie frecce indicano una bijezione, mentre le frecce normali le proiezioni sul quoziente.



Corollario 3.8. Se Λ è un reticolo in \mathbb{C} e $\Lambda' \subset \Lambda$ è un sottoreticolo, allora $J(\Lambda) = J(\Lambda')$.

Dimostrazione. Se $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ e $\Lambda' = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ sono due reticoli in \mathbb{C} , allora $J(\Lambda) = J(\Lambda')$ se e solo se $\Lambda' = \Lambda$.

Per dimostrare questo, si consideri il determinante $\Delta(\Lambda) = \text{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2)$. Si ha $\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda')$ se e solo se $\Lambda' = \Lambda$.

Per concludere deve risultare $\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda')$ ovvero $\text{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2) = \text{Im}(\omega_1' \bar{\omega}_2')$. Se vale l'uguaglianza con il segno + abbiamo finito, altrimenti consideriamo in aggiunta il caso con il segno -.

Concludiamo con una scheda che viene ritenuta in relazione esistente tra gli oggetti incontrati. Identifichiamo con \mathcal{N} l'insieme di tutti i reticoli.

PI-JX

XL-19

Conclusioni

Giunti alla fine di questo lavoro è opportuno fare mente locale sui passi logici fondamentali in modo da evidenziare al meglio le analogie riscontrate.

Nella prima parte abbiamo affrontato la classificazione sotto l'aspetto geometrico. Tramite il birapporto e il modulo di quattro rette siamo arrivati rapidamente al teorema di Salmon 1.6 tramite il quale abbiamo definito il modulo j di una curva ellittica come modulo delle quattro tangenti di flesso. Con il successivo teorema 1.7 abbiamo affermato che due cubiche sono proiettivamente equivalenti quando condividono lo stesso modulo j , concludendo così la classificazione dal punto di vista geometrico.

Siamo passati poi ad un'introduzione agli integrali ellittici. Tramite la forte analogia esistente tra gli integrali trigonometrici (in particolare abbiamo scelto quello definente l'arcoseno) e gli integrali ellittici, abbiamo dedotto il modo in cui il piano complesso viene trasformato dall'integrale ellittico ψ , visto come funzione. Abbiamo poi ridotto il codominio dell'applicazione a un insieme quoziente, \mathbb{C}/Λ , dove Λ è un reticolo in \mathbb{C} e sorge spontaneamente dall'azione della funzione ψ . Questa analogia ci ha spianato la strada per scoprire due fatti importanti: innanzitutto i due periodi di una funzione ellittica, calcolando gli integrali attorno ai tagli di diramazione, e in secondo luogo la struttura topologica dell'insieme quoziente \mathbb{C}/Λ , e cioè la struttura di toro.

Introducendo la \wp di Weierstrass, una funzione ellittica dipendente dal reticolo Λ , abbiamo dimostrato che essa inverte un integrale ellittico, e che soddisfa un'importante equazione differenziale. Da entrambi questi risultati si ricava una parametrizzazione per una curva ellittica \mathcal{C} ; tale parametrizzazione associa biunivocamente un toro \mathbb{C}/Λ alla curva \mathcal{C} .

Ci siamo quindi trovati in mano un toro con associata una curva ellittica \mathcal{C} , che per quanto detto nel capitolo 1.1 fa parte di una certa classe di equivalenza. Prendendo un'altra curva, sempre nella stessa classe di equivalenza di \mathcal{C} , come cambia il toro associato? Abbiamo risposto a questa domanda trovando che il cambio di rappresentante nella classe di equivalenza induce un cambio di reticolo da Λ a $\Lambda' = c\Lambda$, ovvero il rispettivo reticolo è soggetto a

una trasformazione lineare (rotazione e omotetia). Infatti, analizzando il problema inverso: “dati due reticoli linearmente equivalenti trovare che relazione sussiste tra le rispettive curve associate”, abbiamo trovato il seguente fatto: i coefficienti g_2, g_3 nelle equazioni delle due curve cambiano in modo omogeneo secondo le leggi 2.17, ed esiste una quantità, denotata come invariante J , che non cambia al cambiare dei coefficienti. Indagando ulteriormente abbiamo scoperto che tale invariante J non è altro che un’espressione equivalente del modulo j trovato nella prima parte. Dunque *a curve equivalenti corrispondono reticoli riscaldati e ruotati*, come affermato dal teorema 2.12.

Nell’ultima parte abbiamo notato che un reticolo può essere generato da basi diverse. Ci siamo chiesti che relazione algebrica deve esistere tra basi equivalenti (ovvero generanti lo stesso reticolo) e abbiamo dimostrato che esse devono essere legate da una trasformazione $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Prendendo l’associazione $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \tau = \omega_1/\omega_2$, abbiamo poi associato il gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ a un sottogruppo delle trasformazioni lineari fratte. In questo modo, due basi sono risultate essere equivalenti quando esiste una TLF avente coefficienti interi e determinante unitario che porta τ in τ' .

In realtà, siccome $(c\omega_1, c\omega_2)$ è associato sempre allo stesso τ , due basi il cui τ è legato da una siffatta trasformazione possono trovarsi in due situazioni diverse: possono essere equivalenti (nel senso che generano lo stesso Λ) oppure possono essere l’una la trasformata tramite una equivalenza lineare dell’altra (eventualmente possono essere vere entrambe le cose).

Questa riformulazione del problema in termini di τ ha l’effetto di spostare l’ambiente di lavoro: dallo spazio astratto Ω delle coppie di numeri complessi ω_1, ω_2 (con rapporto non reale) siamo approdati sul semipiano complesso \mathcal{H} , molto più comodo e immediato. Ogni punto di $\tau \in \mathcal{H}$ è quindi l’insieme delle basi di $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ a meno di un’equivalenza lineare, ovvero è l’insieme delle basi di tutti i reticoli $c\Lambda$ per ogni $c \neq 0$. Infatti abbiamo due modi di quotizzare l’insieme Ω : rispetto alla moltiplicazione per c , ottenendo Ω/\mathbb{C}^* , oppure rispetto ai cambi di base, ottenendo Ω/Γ con $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

In \mathcal{H} abbiamo poi ritagliato un sottoinsieme D contenente un unico rappresentante per ogni orbita, e abbiamo chiamato questo insieme *dominio fondamentale*; essenzialmente possiamo vedere D come insieme quoziente \mathcal{H}/G , dove $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ è l’insieme delle funzioni che portano una base in un’altra equivalente. Dunque ogni punto di D è associato univocamente all’insieme di tutte le basi tra loro equivalenti in entrambi i sensi detti sopra (chiamiamo $\mathbb{C}^* \backslash \Omega/\Gamma$ tale insieme); quest’ultimo risulta essere in corrispondenza uno a uno con una classe di equivalenza lineare di reticoli. Allora, per transitività, ogni punto di D risulta essere una classe di reticoli. Di più: siccome ogni classe di reticoli è associata a una classe proiettiva di curve ellittiche, allora *ogni punto di D è una classe di equivalenza di cubiche ellittiche!*

XL-21

Infine abbiamo cercato una funzione invariante sotto l'applicazione di $\alpha \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, ovvero una funzione che rispettasse (3.4). Una funzione del genere, per quanto detto sopra, deve essere tale da restare invariata per cambi di base (in entrambi i sensi detti) e di conseguenza è una funzione che non cambia per equivalenza lineare tra reticoli, ovvero non cambia se scegliamo una cubica diversa in una stessa classe di equivalenza. Questa funzione esiste, ed è ancora una volta l'invariante J , visto stavolta come funzione di τ anziché come numero.

- [1] Serres Edouard, *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino 1989
- [2] Trigozi Francesco Giacomo, *Funzioni -Moduli*, N. Zanichelli, Bologna 1981
- [3] Lang Serge, *Elliptic Functions*, Springer Verlag, New York 1987

XL-22