Lecture XVI

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera UCSC

Reminder on Complex analysis

$f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$

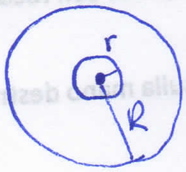
f meromorphic ("partially holomorphic")

isolated singularities, poles

f holomorphic $\equiv$ f analytic

Recall:

- Laurent series (convergent in a suitable annulus $0 \le r < |z| < R \le +\infty$)



$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

z_0 pole of order N: $f = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad a_{-N} \neq 0$ around z_0

$\{ f \to \infty$ around a pole $\}$

- essential singularity (a_k not definitely zero for $k \to -\infty$)

Casorati-Weierstraß: f takes a dense set of values around z_0

Example: $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$

has an essential singularity at $z = 0$ totally wild behaviour!

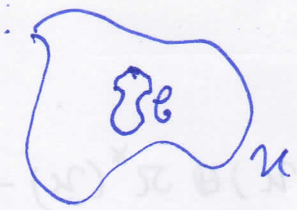
- Riemann: $f : \mathcal{X} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphic

$|f| < M$, then f extends to a holomorphic function on $\mathcal{X}$

$\Rightarrow$ removable singularity

Cauchy's theorem

$f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ $\quad \mathcal{U}$ simply connected



then $\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0}$

idea: Green + Cauchy - Riemann + Poincaré lemma

$\int f\,dz = \int (u+iv)(dx+idy) = \dots$

Converse: Morera's theorem

Cauchy formula

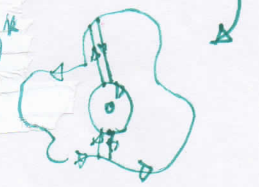
$\mathcal{C}$ simple closed curve

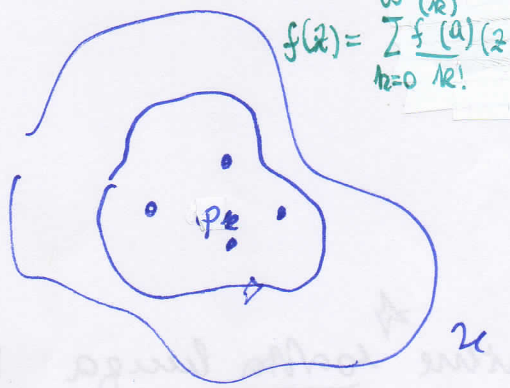
$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta}$$

idea: Green, CR &

get $f^{(k)}(a) = \dots$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$





Residue theorem

$\frac{d}{da} (\zeta - a)^{-1} = (-1)(-1)(\zeta - a)^{-2} = +(\zeta - a)^{-2}$

et cetera

$f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{p_1 \dots p_m\})$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{p_k} f}$$

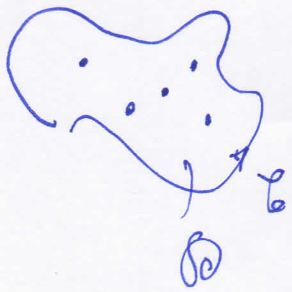
$\boxed{\operatorname{Res}_{p_k} f = a_{-1}}$

Laurent series

$= \oint_{C_k} f(z)\,dz$

Logarithmic indicatrix ("argument principle")

f meromorphic

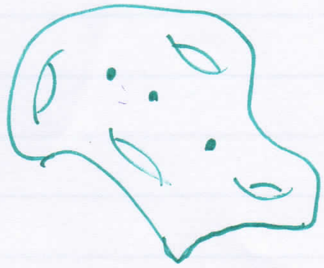


$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} d\log f = \underset{\#\text{ zeros}}{Z} - \underset{\#\text{ poles}}{P} \quad \text{within } \mathcal{D}}$$

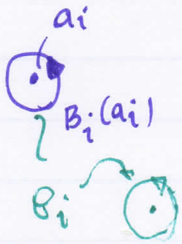
Residue Theorem

Let φ be a meromorphic 1-form on a compact RS S, and let $a_1 + \dots a_d$ its polar divisor

$$\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{a_i}(\varphi) = 0$$



Proof : via Stokes :



$$\left[\, 0 = - \int_{S \setminus \bigcup_{i=1}^{d} B_i(a_i)} d\varphi = + \int_{\bigcup_{i=1}^{d} \partial(B_i(a_i))} \varphi = \sum_{i=1}^{d} \int_{B_i} \varphi = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{Res}_{a_i}(\varphi) \,\right]$$

Corollary

If f is a meromorphic function, then

$$\boxed{\underset{\text{zeros}}{\# Z} - \underset{\text{poles}}{\# P} = 0}$$

: Apply the Residue theorem to $\varphi = \frac{df}{f}$

$\left(f \sim z^k \quad df = k z^{k-1} \quad \frac{df}{f} = \frac{k z^{k-1}}{z^k} = \frac{k}{z} \dots \right.$

$k > 0$ zero
$k < 0$ pole $\left.\right)$

Beware !

to be shown later on

If φ is a meromorphic 1-form,

Euler characteristic

$$\boxed{\# Z - \# P = -\chi(S) = 2g - 2}$$

(in particular, if φ is a holomorphic 1-form, $\# Z = 2g - 2$

→ section of the so-called canonical line bundle

Let f be a meromorphic function on $\mathbb{P}^1$. Then it is a rational function

Proof. Let f have a finite number of poles

$p_i \in \mathbb{C}$ (with multiplicity m_i) $i = 1 \dots l$

+ a pole at ∞ of multiplicity n

Using the same technique, prove Liouville: f entire (i.e. $\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$) and bounded $\Rightarrow f$ constant. Corollary: prove the FTA...

Define $P := f \cdot \underbrace{\prod_i (z-p_i)^{m_i}}_{Q}$ P is an entire function

Then, for big $|z|$, we have $|P(z)| < \hat{C}|z|^n$

For $a \in \mathbb{C}$, Cauchy's formula yields

$$\boxed{P(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(\xi)\,d\xi}{\xi - a}}$$

(+) $|d\xi| = |dx + i\,dy| = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = ds$

γ simple closed curve encircling a

Moreover

$$P'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(\xi)\,d\xi}{(\xi - a)^2} \quad \text{etc.}$$

derivation under integral sign allowed

$\Rightarrow$

$$|\xi|^n \le (|\xi - a| + |a|)^n$$

$$\left| P^{(k)}(a) \right| \le \tilde{C} \int_{\circ} \frac{|\xi|^n}{|\xi - a|^{k+1}} \underbrace{|d\xi|}_{ds\ (+)} \le \hat{C}\int_0^{2\pi} \frac{R^{n+1}}{R^{k+1}}\,d\varphi \equiv C\,R^{n-k}$$

circle of radius R centred at a

$\xi - a = Re^{i\varphi}$

$|\xi - a| = R$

$d\xi = iRe^{i\varphi}d\varphi$

(R fixed)

Therefore, if $k > n$, letting $R \to \infty$ we get $P^{(k)}(a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow P$ is a polynomial and $f = \dfrac{P}{Q}$ is a rational function

1.4 Superfici di Riemann come varietà (H. Weyl, 1913)

Ora, invece, seguiamo un approccio diverso, interpretando una superficie di Riemann come varietà.

Definizione 5. *M spazio topologico è detto* ***varietà topologica*** *di dimensione n se:*

1. *M è di Hausdorff;*
2. *M ha una base numerabile;*
3. *M è localmente euclideo, ovvero $\forall m \in M$ esistono un aperto U, con $m \in U$, e V un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi : U \to V$ è un omeomorfismo, chiamato* ***carta locale****.*

Posto $W_{\alpha,\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, allora

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(W_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \varphi_\beta(W_{\alpha,\beta}) \qquad \text{e}$$

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(W_{\alpha,\beta}) \longrightarrow \varphi_\alpha(W_{\alpha,\beta})$$

sono chiamate **cambiamenti di carta**.

Definizione 6. *Una varietà topologica è una* ***varietà differenziabile*** *se tutti i cambiamenti di carta sono diffeomorfismi di $\mathbb{R}^n$, i.e. funzioni lisce e invertibili con inversa liscia.*

Come ultima definizione diamo quella di **atlante**:

Definizione 7.
$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{R}}$$
insieme delle carte locali che soddisfano i seguenti punti:

- *$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{R}}$ è un ricoprimento aperto di M;*
- *$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ è un omeomorfismo $\forall \alpha \in \mathcal{R}$;*
- *tutti i cambiamenti di carta sono funzioni lisce.*

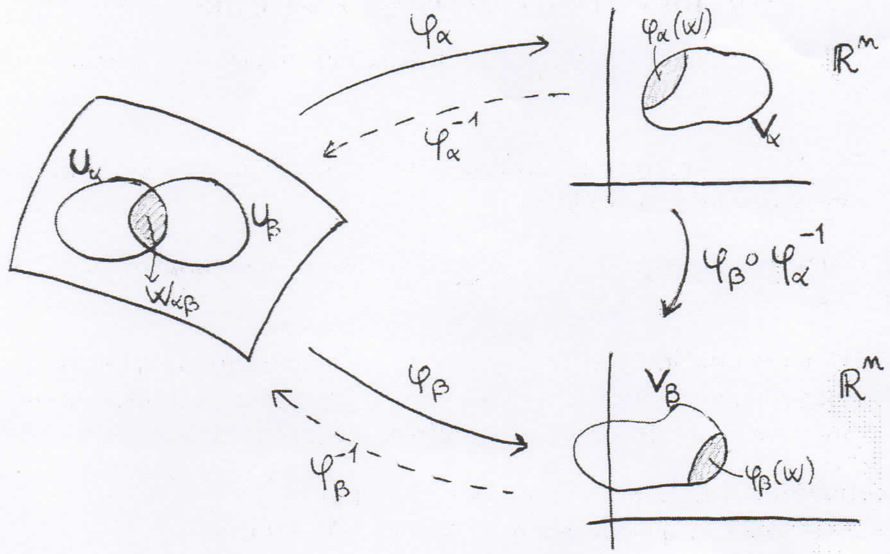
Ora, un atlante è **olomorfo** se tutti i suoi cambiamenti di carta lo sono.

Presa una varietà M e due atlanti olomorfi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ su di essa, questi sono detti **compatibili** se la funzione identica da M in M è olomorfa sia come mappa da M con atlante $\mathcal{A}_1$ a M con atlante $\mathcal{A}_2$, sia viceversa.

da M. Campagnaro "Il teorema f. di Riemann nell'approccio di Klein" tesi mag Brescia

relatore MS

XVI - 5



Definizione 8. *Una* ***superficie di Riemann*** *è data da una varietà con un atlante olomorfo su di essa, e due atlanti olomorfi su una varietà definiscono la medesima superficie di Riemann se e solo se sono compatibili tra loro.*

In altre parole, una superficie di Riemann è una varietà con una classe di equivalenza di atlanti olomorfi su di essa.

Infine, possiamo vedere una superficie di Riemann anche come una *varietà complessa*, nel modo seguente:

Definizione 9. *Una* ***varietà complessa*** *M è una varietà differenziabile che ammette un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ e delle mappe $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ t.c. $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sia olomorfa su $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$, $\forall \alpha, \beta$.*

Una funzione su un insieme aperto $U \subset M$ è **olomorfa** se $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ è olomorfa su $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$, $\forall \alpha$.
Allo stesso modo, l'insieme $z = (z_1, \ldots z_n)$ di funzioni su $U \subset M$ si dice **sistema di coordinate olomorfo** se $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ e $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sono olomorfe rispettivamente su $z(U \cap U_\alpha)$ e su $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$, $\forall \alpha$.

Una mappa $f : M \to N$ tra varietà complesse è olomorfa se è data in termini di coordinate locali olomorfe su N, tramite funzioni olomorfe.

Definizione 10. *Una* ***superficie di Riemann*** *è una varietà complessa unidimensionale.*

XVI - 6