ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. Mauro Spe[illegible]
UCSC

Lecture XVII

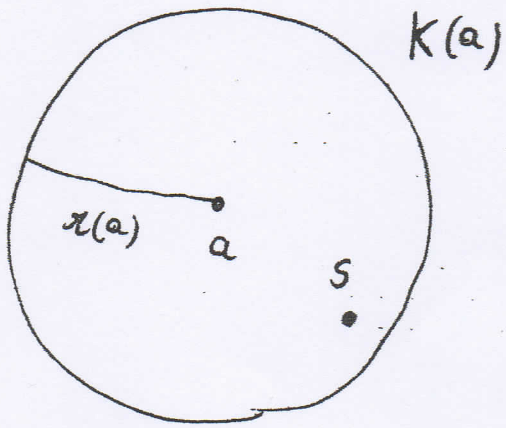
analytic continuation
☆ Prolungamento analitico

Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$

$\left(a_k = \dfrac{f^{(k)}(z)}{k!} \right)$ una funzione

f holomorphic ⇕ f analytic

circle of convergence
elemento (analitica) nel suo cerchio di convergenza (aperto) $K(a)$ di raggio $r(a)$
radius



$K(a) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z-a| < r$

[☆ elemento, o "germe" di funzione analitica
germ

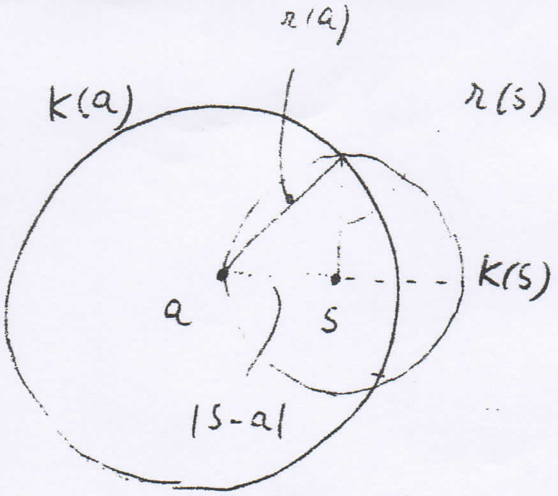
Sia $s \in K(a)$; f può essere sviluppata
power series / centred at s
in una serie di potenze centrata in s

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-s)^k$$

[☆ vedi oltre per la formula che dà b_k ...]

avente cerchio di convergenza $K(s)$, di raggio

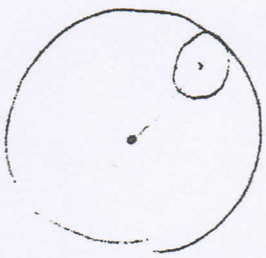
$$r(s) \geq r(a) - |s-a| > 0$$



$\boxed{r(s) + |s-a| \geq r(a)}$

Disuguaglianza triangolare

triangle inequality



=

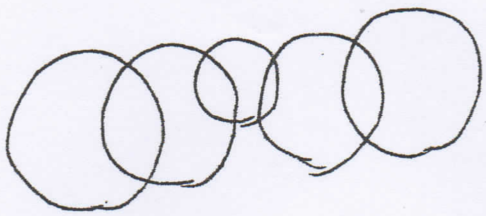
if ">" holds

Se vale ">"   f è estesa al di fuori di K(a)

(can be extended beyond K(a))

(in $K(a) \cup K(s) \supsetneq K(a)$)

* Proseguendo, ha senso considerare il prolungamento analitico lungo una catena di cerchi

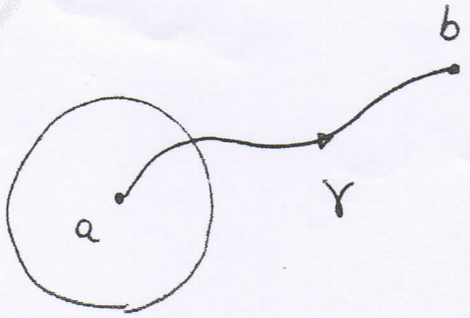


Consideriamo ora una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$

(per es. regolare a tratti) tale che

(piecewise regular)

$\gamma(0) = a \qquad \gamma(1) = b \notin K(a)$



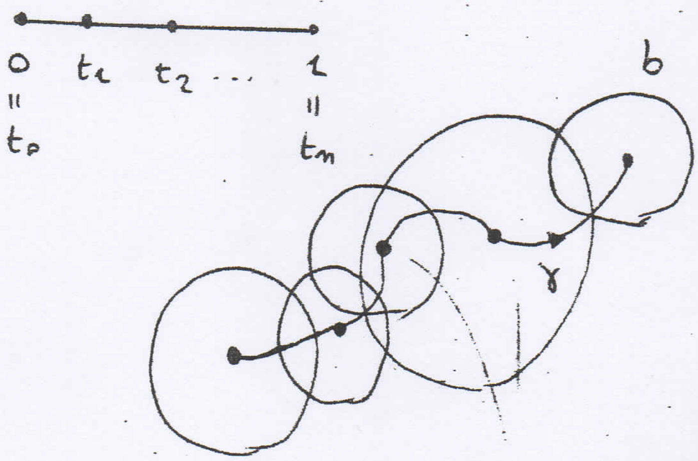
supponiamo che sia possibile determinare (∄ non è sempre possibile) una suddivisione di $[0,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

tale che $\gamma(t_k)$ siano centri di cerchi concatenati

chain of circles

$\gamma(t_0) = \gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$



$\gamma(t_k)$

get another germ

$$f_b(z) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-b)^k} = (\text{risultato del .})$$

$$f(z) \equiv f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

germ

("germe di funzione analitica")

$\boxed{\text{prolungamento analitico di } f = f_a \text{ lungo } \gamma}$

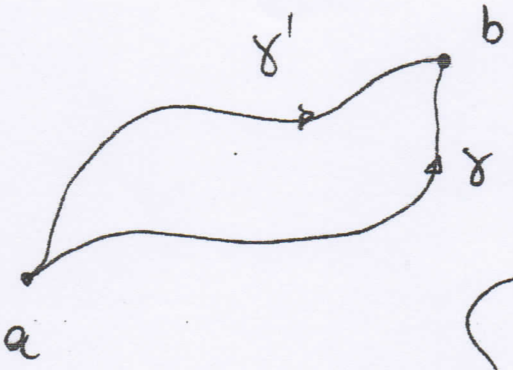
si prova facilmente che f_b dipende (only depends on) solo da γ, e non dai punti di suddivisione

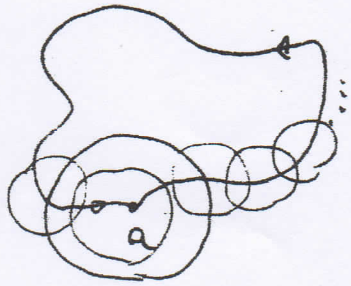
one should actually write

si dovrebbe scrivere $f_{b,\gamma}$

poiché se γ' è un'altra curva congiungente (joining) a con b, e se (if) è possibile prolungare f lungo γ', non necessariamente risulta

$$f_{b,\gamma'} = f_{b,\gamma} \quad \text{(in un opportuno cerchio)}$$



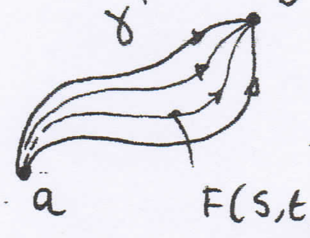


✧ In particolare può essere

$$f_{\gamma,a} \neq f$$

✧ Tuttavia, non è difficile convincersi del fatto che $f_{b,\gamma} = f_{b,\gamma'}$ se

✧ γ e γ' sono **omotope** (homotopic) ("deformabili l'una nell'altra con **continuità**") (one can be continuously deformed into the other)



$F(s,t) = \gamma_s(t)$

$\exists\ F : \underset{s}{[0,1]} \times \underset{t}{[0,1]} \to \mathbb{C}$ tale che

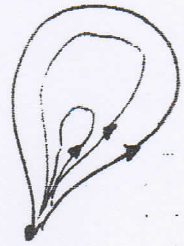
$F(0,t) = \gamma(t)$

$F(1,t) = \gamma'(t)$

F: **omotopia** homotopy

in particolare, se γ è chiusa ed "omotopa a zero" null-homotopic

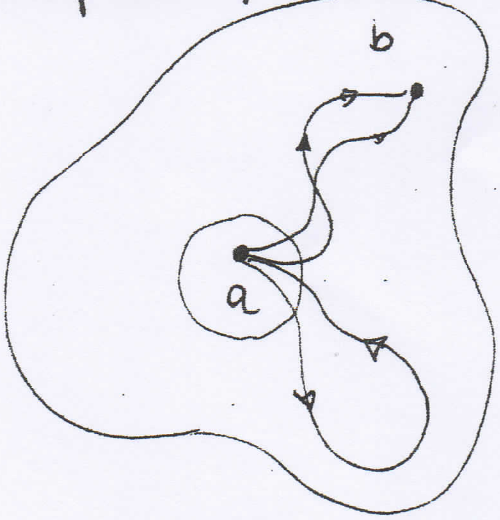
(omotopa alla curva costante) $\gamma(t) \equiv a$



è certamente $f_{a,\gamma} = f_a$

☆ Sussiste perciò il teorema di monodromia (monodromy theorem)

Se f è prolungata analiticamente lungo curve in una regione semplicemente connessa (simply connected), tale prolungamento dipende solo dal punto finale e non da γ



only depends on the final pt.

Ancora sul / Riemann surface

★ Concetto di Superficie di Riemann

associated

associata ad una funzione olomorfa f

(consente, nel caso di funzioni polidrome "multivalued" (a più valori) di determinare il corretto insieme di definizione di queste: si tengano sempre presenti gli esempi di $\mathrm{Log}\, z$ e $z^{\frac{1}{n}}$ ★

$z=0$ è pto di diramazione

branch pt

Riemann region

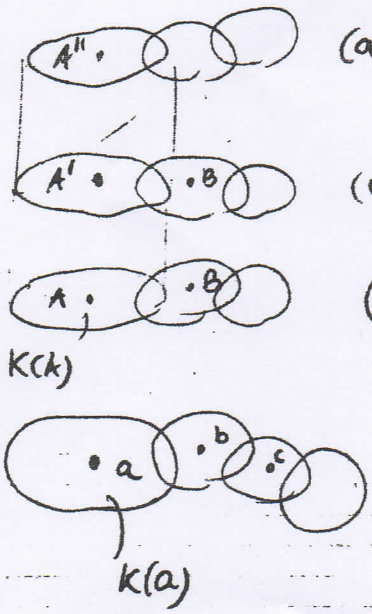
★ regione di Riemann R':

$$R' = \{ A \equiv (a, f_a) \}$$

possono provenire da prolungam. analitico

π

proiezione canonica



$(a, f_{2,a})$

$(a, f_{1,a})$

(a, f_a)

possono essere presenti più "fogli" sheets

$\pi(A) = \pi(A')$
$= \pi(A'') = \ldots$

$\pi(A) = a$

canonical projection

covering

surface element

$K(A)$: "elemento di superficie"

ramification pt
branch point

a : pto di diramazione (di tipo $\sqrt[n]{\ }$, p semplicità)

" A

$K(A)$ descritto da $z-a = t^n$

el. di sup.

t : parametro di uniformizzazione

(o parametro uniformizzante)

"

el. di sup. tipo $\sqrt[n]{\ }$

t: uniformizing parameter

new surface element

$K(A)$ 

points at ∞

∡ similmente si trattano i pti all'infinito
(costruendo coordinate opportunamente ..)

Finalmente :

R superficie di Riemann ☆☆☆
Riemann surface

branch pts

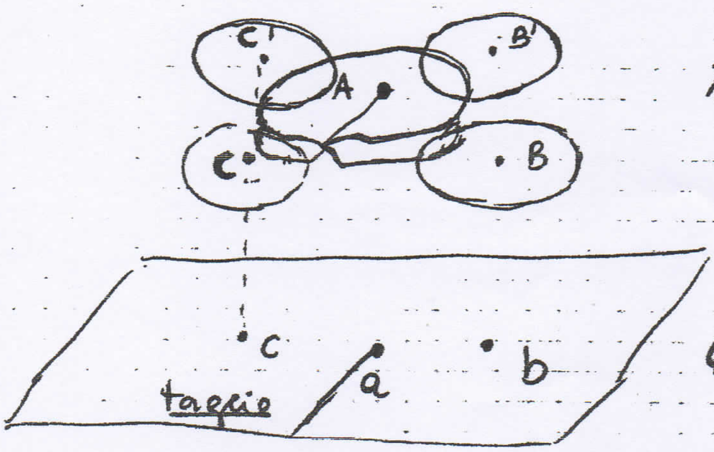
$R = R' \cup \{$ pti di ramificazione $\} \cup \{$ pti all'infi $\}$

regione di Riemann
Riemann region

si "ri colla" attraverso $K(A)$

pts at ∞

glueing via $K(A)$

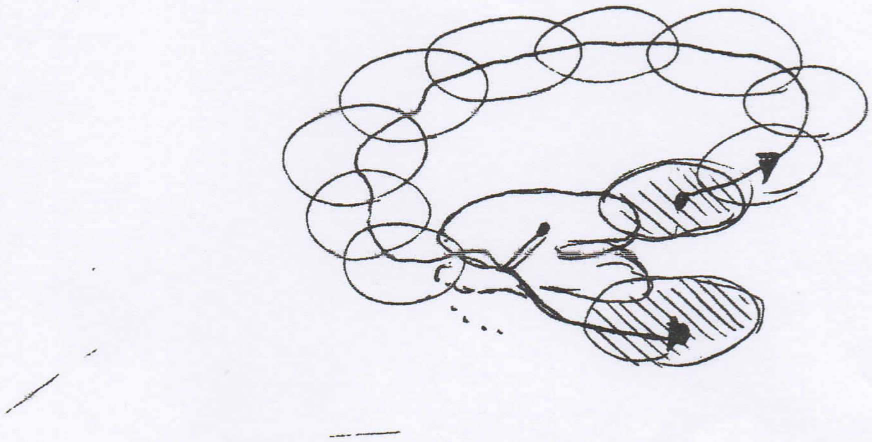


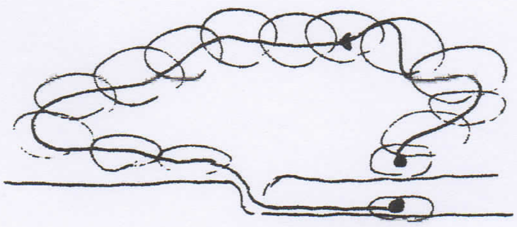
$\pi \downarrow$

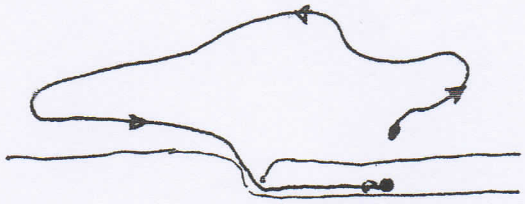
branched covering
ramified covering

$\mathbb{C}$

XVII-7





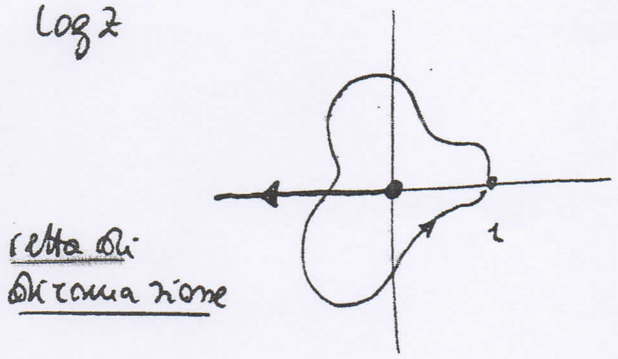


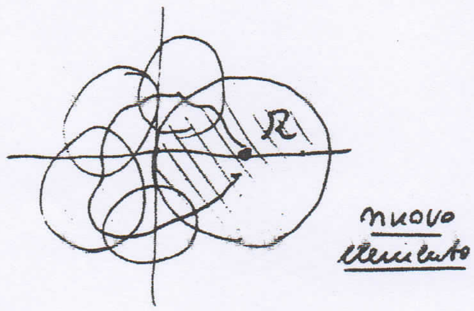
ancora Log z (polidroma)

$$\text{Log}\, z = \int_1^z \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

$z=0$
$(z=\infty)$ punti di diramazione

$\overset{1}{\text{Log}}\, z$





$$\text{Log}\, z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}$$

in R coincidono..

★ $\underline{\operatorname{arctg} z}$ (come funzione polidroma)

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}} = \qquad z \in \mathbb{C} - \{\pm i\}$$

$$\left(\frac{1}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-i\zeta} + \frac{1}{1+i\zeta} \right) \right)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{1}{1-i\zeta}\,d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{1}{1+i\zeta}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\log(1-iz)}{-i} + \frac{1}{2}\,\frac{\log(1+iz)}{i} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}}$$

polidroma!

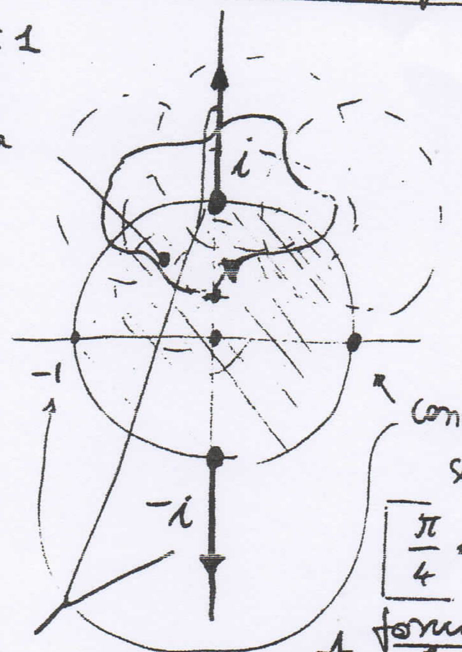
$\pm i$: pti di diramazione

[Se $z \to \infty$ $\operatorname{arctg} z \to \frac{1}{2i}\log(-1)$ def. per una scelta dell'argomento fissata a priori]

$\Rightarrow$ arct è olomorfa all'infinito

$|z| < 1$

★ cerchio di convergenza di arctg z vista come serie (elemento analitico)



converge se $z = 1$

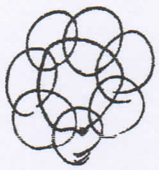
$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots}$$

★ formula di Leibniz

rette di diramazione

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$$



nuovo elemento analitico!