Lecture XX - add

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera

4 COORDINATE ISOTERME

Isothermal coordinates

Abbiamo finora utilizzato, senza dimostrarlo rigorosamente, che su ciascuna superficie riemanniana astratta di dimensione due, esiste una coppia di coordinate isoterme, ossia coordinate la cui metrica è localmente conforme alla metrica piana espressa in quel sistema di coordinate.
Vogliamo arrivare a dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6. *Ogni punto di una varietà riemanniana di dimensione due ammette un intorno sul quale esistono coordinate isoterme. Il legame fra le coordinate complesse associate a diverse coppie di coordinate isoterme su uno stesso intorno è espresso da una funzione olomorfa o dalla coniugata di una funzione olomorfa.*

Divideremo la dimostrazione in due momenti: nel primo daremo per scontata l'esistenza di coordinate isoterme e ci occuperemo solamente di trovarle, nella seconda fase, invece, dimostremo rigorosamente la loro esistenza e troveremo un collegamento con la loro espressione trovata in precedenza.

4.1 Prima fase

Consideriamo una superficie riemanniana astratta descritta dalle coordinate (p, q) e con metrica:

$$\boxed{ds^2 = Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}.$$

Poniamo $g = \det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = EG - F^2 > 0$.

Allora vale:

$$ds^2 = Edp^2 + Gdq^2 + 2Fdp\,dq$$

$$= Edp^2 + \left(\frac{g + F^2}{E}\right)dq^2 + (F - i\sqrt{g})dp\,dq + (F + i\sqrt{g})dp\,dq$$

$$= \left(\sqrt{E}dp + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}dq\right)\left(\sqrt{E}dp + \frac{F - i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}dq\right).$$

Gauss trick

Cerchiamo ora una coppia di coordinate isoterme (u, v) in modo tale da avere:

$$\boxed{ds^2 = \eta(u, v)\,(du^2 + dv^2)},$$

per qualche $\eta = \eta(u, v) > 0$.

XX-add -1

Poniamo:

integrating factor

$$\xi\left(\sqrt{E}dp + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}dq\right) = du + idv$$

$$\bar{\xi}\left(\sqrt{E}dp + \frac{F - i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}dq\right) = du - idv.$$

Se assumiamo che il <u>*fattore integrante*</u> $\xi = \xi(p,q)$ esista, moltiplicando le due espressioni membro a membro e sfruttando l'equazione precedente, abbiamo che:

$$|\xi|^2 ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Di conseguenza varrà:

$$\eta(u,v) = \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Ora, poiché $u = u(p,q)$ e $v = v(p,q)$, possiamo sviluppare ulteriormente e otteniamo:

$$\begin{aligned}\xi\left(\sqrt{E}\,dp + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}dq\right) &= \frac{\partial u}{\partial p}dp + \frac{\partial u}{\partial q}dq + i\left(\frac{\partial v}{\partial p}dp + \frac{\partial v}{\partial q}dq\right)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i\frac{\partial v}{\partial q}\right)dq\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \xi\sqrt{E} = \frac{\partial u}{\partial p} + i\frac{\partial v}{\partial p}$$

$$\Longrightarrow \qquad \xi\frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} = \frac{\partial u}{\partial q} + i\frac{\partial v}{\partial q}.$$

Se ora dividiamo membro a membro:

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial q} + i\frac{\partial v}{\partial q}\right) = (F + i\sqrt{g})\left(\frac{\partial u}{\partial p} + i\frac{\partial v}{\partial p}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad F\frac{\partial u}{\partial p} - \sqrt{g}\frac{\partial v}{\partial p} + Fi\frac{\partial v}{\partial p} + \sqrt{g}\,i\frac{\partial u}{\partial p} = E\frac{\partial u}{\partial q} + Ei\frac{\partial v}{\partial q},$$

e dividendo parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} F\dfrac{\partial u}{\partial p} - \sqrt{g}\dfrac{\partial v}{\partial p} = E\dfrac{\partial u}{\partial q} \\ F\dfrac{\partial v}{\partial p} + \sqrt{g}\dfrac{\partial u}{\partial p} = E\dfrac{\partial v}{\partial q} \end{cases}$$

XX-add -2

Dalla prima equazione del sistema ricaviamo $\dfrac{\partial v}{\partial p}$:

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \left(F\,\frac{\partial u}{\partial p} - E\,\frac{\partial u}{\partial q} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}$$

e sostituiamolo nella seconda per ottenere

$$\frac{\partial v}{\partial q} = \left(G\,\frac{\partial u}{\partial p} - F\,\frac{\partial u}{\partial q} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{g}},$$

dove abbiamo sfruttato la relazione $g = EG - F^2$.
Queste ultime due equazioni sono le condizioni di Cauchy-Riemann generalizzate, dette anche di *Korn-Lichtenstein*.

Analogamente si può ricavare $\dfrac{\partial u}{\partial p}$ dalla seconda equazione del sistema e sostituirlo nella prima ottenendo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial q} = \left(F\,\dfrac{\partial v}{\partial q} - G\,\dfrac{\partial v}{\partial p} \right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{g}} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial p} = \left(E\,\dfrac{\partial v}{\partial q} - F\,\dfrac{\partial v}{\partial p} \right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{g}} \end{cases}$$

Per il Lemma di Schwarz ricordiamo che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial^2 u}{\partial q\,\partial p}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial^2 v}{\partial q\,\partial p}.$$

Se introduciamo **l'operatore di Laplace-Beltrami**:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{F\,\frac{\partial}{\partial p} - E\,\frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{F\,\frac{\partial}{\partial q} - G\,\frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} \right]}$$

upshot

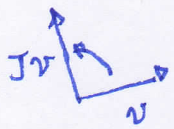
si può provare che $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v = 0$, ovvero u e v sono armoniche in senso generalizzato.
Poiché si può provare che l'equazione $\mathcal{L}u = 0$ ha soluzione localmente, ciò significa che esiste u, e si può trovare anche v a meno di una costante (e dunque ξ).
Le funzioni u e v sono coordinate isoterme, perciò si ha:

$$z = u + iv, \qquad \bar{z} = u - iv$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{ds^2 = |\xi|^{-2}\,dz\,d\bar{z}.}$$

(+) complex structure (in dim 2)
$J_\cdot : T_\cdot M \to T_\cdot M$
$J^2 = -\mathbb{1}$

(+) in dim > 2 one must add an integrability condition



xx - add - 3

Further details

4.2 Seconda fase

Consideriamo sempre una superficie riemanniana bidimensionale e orientabile X; siano (x^1, x^2) le coordinate locali in un intorno aperto U di X. Allora l'espressione locale della metrica riemanniana di X è:

$$\boxed{ds^2 = E(dx^1)^2 + 2F\,dx^1 dx^2 + G(dx^2)^2.}$$

Come prima definiamo $g = \det(g_{ij})$ con

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

Ora prendiamo una funzione f t.c. sia $\mathcal{C}^\infty$ e a valori reali su U e riscriviamo la condizione $\mathcal{L}f = 0$ dalla definizione di operatore di Laplace-Beltrami vista nel capitolo precedente (a meno del segno):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\left(G\frac{\partial f}{\partial p} - F\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\left(-F\frac{\partial f}{\partial p} + E\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\left(G\frac{\partial f}{\partial x^1} - F\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\left(-F\frac{\partial f}{\partial x^1} + E\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}\sum_{\beta=1}^{2} g^{1\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}\sum_{\beta=1}^{2} g^{2\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Se ora poniamo

$$\omega_1 = -\sqrt{g}\sum_{\beta=1}^{2} g^{2\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta},$$

$$\omega_2 = \sqrt{g}\sum_{\beta=1}^{2} g^{1\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}$$

l'espressione $\mathcal{L}f = 0$ diventa semplicemente:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} = 0,$$

ossia la forma differenziale lineare $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$ è chiusa.

Per il *lemma di Volterra-Poincaré*, una forma differenziale chiusa su un dominio semplicemente connesso è anche esatta, pertanto esiste una funzione $h \in \mathcal{C}^\infty$ a valori reali su U semplicemente connesso t.c.

$$\boxed{\omega = dh.}$$

XX-add-4

La funzione h viene anche chiamata **potenziale** e naturalmente valgono:

$$\frac{\partial h}{\partial x^1} = \omega_1, \qquad \frac{\partial h}{\partial x^2} = \omega_2.$$

Ora cerchiamo di esprimere $\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ in termini di h; indichiamo con $\delta_{\gamma\beta}$ il simbolo di Kronecker:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma} &= \sum_\beta \delta_{\gamma\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta} = \sum_\beta \Big(\sum_\alpha g_{\gamma\alpha}\, g^{\alpha\beta}\Big)\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\\ &= \sum_\beta \Big(g_{\gamma 1}\, g^{1\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta} + g_{\gamma 2}\, g^{2\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(g_{\gamma 1}\frac{\partial h}{\partial x^2} - g_{\gamma 2}\frac{\partial h}{\partial x^1}\Big)\end{aligned}$$

e ricordando che $g^{11} = \dfrac{1}{g}\, g_{22}$, $g^{22} = \dfrac{1}{g}\, g_{11}$, $g^{12} = -\dfrac{1}{g}\, g_{12}$ e $g^{21} = -\dfrac{1}{g}\, g_{21}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^1} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(g_{11}\frac{\partial h}{\partial x^2} - g_{12}\frac{\partial h}{\partial x^1}\Big) = \sqrt{g}\Big(g^{22}\frac{\partial h}{\partial x^2} + g^{12}\frac{\partial h}{\partial x^1}\Big),\\ \frac{\partial f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(g_{21}\frac{\partial h}{\partial x^2} - g_{22}\frac{\partial h}{\partial x^1}\Big) = -\sqrt{g}\Big(g^{21}\frac{\partial h}{\partial x^2} + g^{11}\frac{\partial h}{\partial x^1}\Big).\end{aligned}$$

Basta porre $(x^1, x^2) = (p, q)$ per vedere subito che la funzione f è la u della fase precedente, mentre h corrisponde alla funzione v.
Abbiamo così dimostrato l'esistenza della funzione h (i.e. v) a partire dall'esistenza di una funzione f (i.e. u) soluzione dell'equazione $\mathcal{L}f = 0$.

Riscriviamo anche le espressioni di $\dfrac{\partial h}{\partial x^2}$ e di $\dfrac{\partial h}{\partial x^1}$ con queste notazioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(g_{22}\frac{\partial f}{\partial x^1} - g_{12}\frac{\partial f}{\partial x^2}\Big) = \sqrt{g}\Big(g^{11}\frac{\partial f}{\partial x^1} + g^{12}\frac{\partial f}{\partial x^2}\Big),\\ \frac{\partial h}{\partial x^1} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(- g_{11}\frac{\partial f}{\partial x^2} + g_{21}\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big) = -\sqrt{g}\Big(g^{22}\frac{\partial f}{\partial x^2} + g^{21}\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big).\end{aligned}$$

XX-add-5

Moltiplichiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial x^1} &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\sqrt{g}\left(g^{11}\frac{\partial f}{\partial x^1}+g^{12}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)+\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial x^2}\sqrt{g}\left(g^{22}\frac{\partial f}{\partial x^2}+g^{21}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)\\ &= \sqrt{g}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\\ &= \sqrt{g}\,\langle df, df\rangle,\end{aligned}$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare definito nel fibrato cotangente T^*X (duale del fibrato tangente TX) dalla metrica riemanniana su X.

In modo analogo si ottiene anche:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial h}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial x^1} &= \sqrt{g}\left(g^{22}\frac{\partial h}{\partial x^2}+g^{12}\frac{\partial h}{\partial x^1}\right)\frac{\partial h}{\partial x^2}+\\ &\quad+\sqrt{g}\left(g^{21}\frac{\partial h}{\partial x^2}+g^{11}\frac{\partial h}{\partial x^1}\right)\frac{\partial h}{\partial x^1}\\ &= \sqrt{g}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial x^\alpha}\frac{\partial h}{\partial x^\beta}\\ &= \sqrt{g}\,\langle dh, dh\rangle,\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \langle df, df\rangle = \langle dh, dh\rangle$$

e si può anche provare che

$$\langle df, dh\rangle = 0 \quad \text{su}\, U.$$

Ora restringiamo U in modo tale che $\langle df, df\rangle > 0$ in ogni punto di U. Poniamo

$$y^1 = f(x^1, x^2), \qquad y^2 = h(x^1, x^2),$$

allora varrà:

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x^1} & \frac{\partial f}{\partial x^2}\\ \frac{\partial h}{\partial x^1} & \frac{\partial h}{\partial x^2}\end{bmatrix} = \sqrt{g}\,\langle df, df\rangle > 0$$

XX-add-6

che è positivo in quanto (g_{ij}) è definita positiva, la stessa cosa vale per l'inversa e di conseguenza anche per il prodotto scalare definito in base all'inversa.

Se assumiamo che (y^1, y^2) siano coordinate locali su U, possiamo riscrivere l'espressione della metrica riemanniana nel modo seguente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= E(dx^1)^2 + 2F dx^1 dx^2 + G(dx^2)^2 \\ &= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \sum_{\alpha,\beta} g'_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta \end{aligned}$$

con $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^\alpha} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^\beta}$.

Per definizione di prodotto scalare nello spazio duale ciò significa che

$$g'_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\rangle$$

e si può provare che

$$g'_{11} = \frac{1}{\langle df, df\rangle} \qquad g'_{22} = \frac{1}{\langle dh, dh\rangle} \qquad g'_{12} = g'_{21} = 0.$$

Posti quindi $a = g'_{11} = g'_{22}$, $\quad z = y^1 + iy^2 \quad$ (e $dz = dy^1 + idy^2$), si ha:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} g'_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta = a\,(dy^{1^2} + dy^{2^2}) = a\,|dz|^2$$

con $a > 0$ per aver ristretto U in modo che $\langle df, df\rangle > 0$.

Abbiamo così scritto l'espressione locale della metrica riemanniana in maniera conforme e utilizzando le coordinate y^1 e y^2 che sono perciò dette **isoterme** su U, mentre z è detta coordinata complessa associata.

Siamo quindi riusciti a dimostrare che localmente esistono delle coordinate f e h isoterme per una superficie di Riemann.

□

XX-add-7