

1.5 I teoremi di Poincaré-Hopf e di Eulero-Poincaré

Vediamo ora alcuni concetti e risultati ben noti, ma che ci torneranno molto utili in seguito.

compact oriented without boundary (i.e. closed)

Sia M una varietà compatta, orientata e senza bordo, sia X un campo vettoriale con un numero finito di punti critici.

Definizione 11. Un punto $P \in M$ è critico (o singolare) per X se $X(P) = 0$.

Definiamo **indice** di P , $i_P(X)$, la variazione angolare totale divisa per 2π del campo lungo un circoletto C centrato in P e orientato in senso antiorario, che non contenga altri punti critici oltre a P . In altre parole:

Definizione 12. L'indice è un numero intero che misura il numero di giri che fa il campo X quando percorre un circoletto attorno al punto P .



In formule, se $X = (X, Y)$ localmente e $X \neq 0$:

make a, any simple closed curve traversed counterclockwise

$$i_P(X) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_C d \arctan \frac{Y}{X}$$

Osservazione 1. Anche moltiplicando il campo vettoriale X per una funzione non nulla ξ e ponendo per esempio

$$X_1 = \xi X, \quad Y_1 = \xi Y,$$

si ottiene comunque:

$$\frac{X_1 dY_1 - Y_1 dX_1}{X_1^2 + Y_1^2} = d \arctan \frac{Y_1}{X_1} = d \arctan \frac{Y}{X},$$

perciò $\forall \xi \neq 0$ si avrà

$$i_P(X) = i_P(\xi X).$$



Osservazione 2. Se P non è critico, $i_P(X) = 0$.

Se abbiamo un numero finito di punti critici, possiamo anche definire l'indice di X :

$$i(X) = \sum_{P \in M} i_P(X).$$

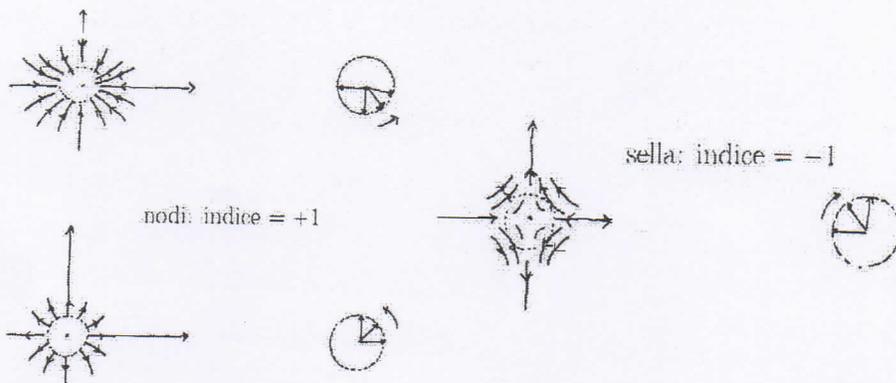
saddle points

Si prova facilmente che nel caso di **nod**i l'indice è $+1$, nel caso di **selle** l'indice è -1 , come mostrato in figura.

nodes

XX-1

M. Spina: appendice a Squashina-Zuccheri 2006
M. Compagnaro } Henri BS relazione MS
G. Zanzi



(†)

L'indice è particolarmente importante in quanto NON dipende da \mathbf{X} e ciò ha un significato topologico. Per illustrarlo calcoliamo $i(\mathbf{X})$ per una somma connessa di g tori Σ_g , per esempio prendiamo il caso $g = 2$.

height function

Consideriamo $f : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}$ la *funzione altezza*, che associa P a $z(P)$. Prendiamo $\mathbf{X} = \nabla f$; esso possiede $2 + 2g$ punti critici:

- il punto di massimo D (nodo stabile, $i = +1$),
- il punto di minimo A (nodo instabile, $i = +1$),
- $2g$ selle B, B', C, C' ($i = -1$).

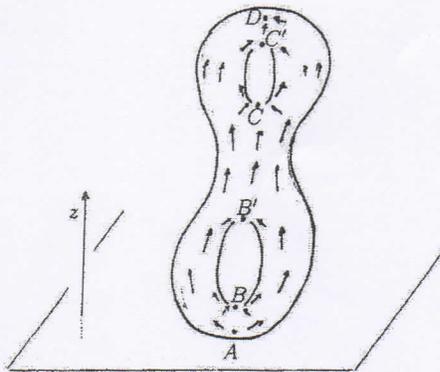
(†) This will be proved in a forthcoming lecture

basic idea:

$$i(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} \iint_M K \, d\sigma$$

K : curvature of any metric on M

e.g. $K =$ gaussian curvature for an embedded surface



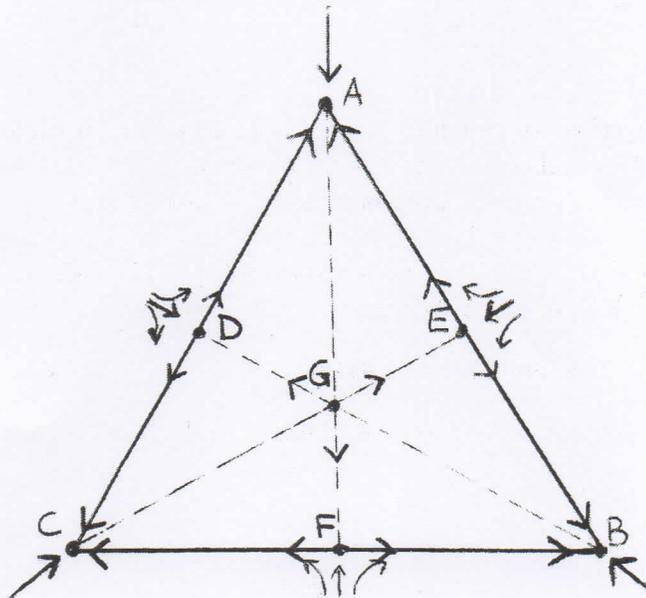
Risulta quindi:

$$i(\mathbf{X}) = 2 - 2g = \chi(\Sigma_g)$$

che non è altro che l'enunciato del *teorema di Poincaré-Hopf*.

Se invece consideriamo una triangolazione di Σ_g , viene definito un campo vettoriale \mathbf{X} , adattato alla triangolazione, avente come punti critici:

- i vertici del triangolo A,B,C (nodi stabili),
- il punto interno al triangolo G (nodo instabile),
- i punti D,E,F sui lati del triangolo (selle).



Allora vale:

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g = i(\mathbf{X}) = V - E + F$$

dove V è il numero di vertici, E il numero di spigoli e F il numero di facce, che non è altro che l'enunciato del *teorema di Eulero-Poicaré*:

$$V - E + F = \chi(\Sigma_g).$$

Infine, dimostriamo una formula che ci servirà in seguito e che lega il numero di zeri e di poli di una 1-forma meromorfa al teorema di Poincaré-Hopf.

Sia $f = u + iv$ una funzione complessa liscia con

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

e sia $\mathbf{V} = (u, v) \equiv f$, ovvero vediamo f come un campo vettoriale su un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 .

Sia z_0 tale che $f(z_0) = 0$ uno zero isolato. Definiamo la molteplicità di z_0 come segue:

$$m_{z_0}(f) = i_{z_0}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \log f = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}.$$

cf. the argument principle

Ora poniamo $\alpha = f(z) dz$:

$$\alpha = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy)$$

$$\bar{\alpha} = (udx - vdy) - i(vdx + udy)$$

e osserviamo che

$$\bar{\mathbf{V}} = (u, -v) \iff \bar{f} = u - iv,$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{u d(-v) + v du}{u^2 + v^2} &= -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2} \\ \implies m_{z_0}(f) &= -i_{z_0}(\bar{\mathbf{V}}). \end{aligned}$$

Se Σ_g è una superficie di Riemann chiusa di genere g e α è una 1-forma olomorfa, per Poincaré-Hopf abbiamo che

$$\# \text{zeri di } \alpha = -\chi(\Sigma_g) = 2g - 2.$$

α holomorphic ↗

Se poi $\alpha = f(z) dz$ è una 1-forma meromorfa con poli $\frac{1}{z^k} = z^{-k}$, l'indice di $\bar{\mathbf{V}}$ in questi punti è $-k$ e il ragionamento precedente può essere generalizzato alterando il campo nell'intorno di un polo in modo da renderlo ivi nullo (ciò è possibile in quanto moltiplicando un campo per un'opportuna funzione punto per punto, il ritratto di fase non cambia). Pertanto, sempre utilizzando Poincaré-Hopf, si ottiene la seguente formula:

$$\# \text{zeri di } \alpha - \# \text{poli di } \alpha = 2g - 2 = -\chi(\Sigma_g),$$

α meromorphic ↗

dove sia gli zeri sia i poli sono contati con le loro molteplicità.

$$\{ \#Z - \#P = -\chi(\Sigma_g) \}$$

phase portrait

XX-4

★ (Important) digression

$$f = u + iv$$

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

(Smooth) complex function

$V = (u, v) \equiv f$
vector field

(f as a vector field on (an open subset of) \mathbb{R}^2)

Let $z_0 : f(z_0) = 0$

[assume zeros are isolated]

with multiplicity m

$$\text{index}_{z_0}(V) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d \log f = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}$$

\parallel
 multiplicity of z_0 $m(z_0)$

see box \downarrow

Now set $\alpha = f(z) dz$

f holomorphic but momentarily this is not needed

Then

$$\alpha = (u + iv)(dx + i dy)$$

$$= (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

$$\bar{\alpha} = (u dx - v dy) - i(v dx + u dy)$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2[u dx - v dy]$$

$$f = |f| e^{i\varphi}$$

$$\log f = \log |f| + i\varphi = \text{arctan} \frac{v}{u}$$

$$\bar{f} = |f| e^{-i\varphi}$$

$$\log \bar{f} = \log |f| - i\varphi$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d \log f =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d \log |f| + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\varphi$$

$= 0$

$m \in \mathbb{Z}$

★ Notice that $\bar{V} \equiv (u, -v) \leftrightarrow \bar{f} = u - iv$

\Rightarrow

$$m_{z_0}(f) = -\text{index}_{z_0}(\bar{V})$$

If Z_g is a closed RS of genus g

then by Poincaré - Hopf

we have

XX-5

$$\chi = -\chi(Z_g) = 2g - 2$$

zeros of f (counted with multiplicities)

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{u(-v) + v du}{u^2 + v^2} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}$$

\Rightarrow

(1)

Now, take $\alpha = f(z)dz$

* meromorphic 1-form

The previous result can be generalized as follows

$$\text{pole} \sim \frac{1}{z^k} = z^{-k}$$

index of $\bar{v} = -k$
thereat

(again via Riemann-Roch)

[immediate application]

$$\boxed{Z - P = 2g - 2 = -\chi(\Sigma_g)}$$

zeros of f counted with multiplicities

poles of f counted with multiplicities

$\int_0^1 f$ smoothed out near the pole in order that the corresponding v.f. vanishes

(cf Donaldson Ch 7)

the topological picture persists

→ Examples

① \mathbb{CP}^1 : $g=0$ $Z-P = -2$

$$\alpha = \frac{dz}{z}$$

is a meromorphic 1-form

with no zeros ($z=0$) & two poles

(at $z=0$ and $z=\infty$ ($\xi=0$))

[with opposite residues ...

$$z = \frac{1}{\xi} \quad \xi = \frac{1}{z} \quad d\xi = -\frac{1}{z^2} dz$$

$$\alpha = \frac{d(\frac{1}{\xi})}{\frac{1}{\xi}} = \xi \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) d\xi = -\frac{d\xi}{\xi}$$

one cannot have non-trivial holomorphic 1-forms ($Z=2$)

see below on elementary proof

② Σ_1 : $g=1$ $Z=P$; there exists a holomorphic 1-form

(never vanishing : $\omega = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ holomorphic differential)

where $R(z)$ is a polynomial

* There are no non-trivial holomorphic 1-forms on $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong \bar{\mathbb{C}}$
 (Riemann sphere)

Elementary Computation

Let $\alpha(z) = f(z) dz$ be a holomorphic 1-form on $\bar{\mathbb{C}}$
 restricted to \mathbb{C}

$$\text{Then } \bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}(f dz) = \bar{\partial}f dz = 0$$

i.e. f is holomorphic on \mathbb{C} (entire)

Around ∞ :

$$f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = \alpha\left(\frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz$$

and $f\left(\frac{1}{z}\right) \sim \frac{1}{z^2}$ at least in order to yield

a finite value, i.e. $f(z) \sim \frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow f$ is an entire, bounded function on \mathbb{C}

\Rightarrow (Liouville) f is constant

\Rightarrow (since $f(z) \rightarrow 0$ for $z \rightarrow \infty$)

$$f \equiv 0 \quad \text{i.e. } \boxed{\alpha \equiv 0}$$

of crucial observation

$$X_1 = \sum X \quad Y_1 = \sum Y \quad \sum \neq 0$$

$$\text{Then} \quad \frac{X_1 dY_1 - Y_1 dX_1}{X_1^2 + Y_1^2} =$$

$$= \frac{\sum X d(\sum Y) - \sum Y d(\sum X)}{\sum^2 (X^2 + Y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sum} \frac{\sum (X dY - Y dX) + \cancel{XY d\sum} - \cancel{XY d\sum}}{X^2 + Y^2}$$

$$= \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}$$

This is also clear upon observing that

$$\frac{X_1 dY_1 - Y_1 dX_1}{X_1^2 + Y_1^2} = d \arctan \frac{Y_1}{X_1} = d \arctan \frac{Y}{X}$$

XX-9

(11)