

4.3 L'esempio del toro e gli integrali ellittici

Vediamo un esempio significativo in cui si utilizzano le coordinate isoterme trovate in precedenza.

Consideriamo il caso in cui la superficie S rappresenti un toro. Sappiamo che questa superficie ha genere $g = 1$ e si può provare il seguente risultato:

Teorema 7. Una funzione meromorfa su S avente m poli, possiede $2m + 2g - 2$ punti singolari.

Dimostrazione. Un punto singolare, anche chiamato cross-point, ha indice $c = -1$ (come zero del campo vettoriale $\mathbf{V} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$), mentre ciascuna singolarità logaritmica ha indice $\mu = +1$.

In virtù del teorema di Poincaré-Hopf:

$$i(\mathbf{V}) = 2 - 2g$$

$$\mu - c = 2 - 2g \quad \implies \quad c = \mu + 2g - 2$$

e poichè m sono le discontinuità algebriche (poli):

$$\implies 2m = \# \text{singolarità logaritmiche} = \mu, \text{ che è la nostra tesi.} \quad \square$$

Se nel nostro esempio supponiamo di avere 2 poli sul toro, abbiamo quindi $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 = 4$ punti singolari.

Immaginiamo di costruire una mappa conforme che mappi il toro in un ricoprimento a due-fogli del piano, ovvero una superficie di Riemann con 4 punti di diramazione. Siano:

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos \alpha) \cos \varphi, \\ y = (R + \rho \cos \alpha) \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \alpha, \end{cases}$$

dove φ è l'angolo di longitudine e α è l'angolo di latitudine.

Per ottenere una coppia di coordinate isoterme da (α, φ) , osserviamo che:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(R + \rho \cos \alpha)^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\alpha^2}.$$

Se poniamo $\xi = \varphi$ e

$$\eta = \int_0^\alpha \frac{\rho d\alpha}{R + \rho \cos \alpha},$$

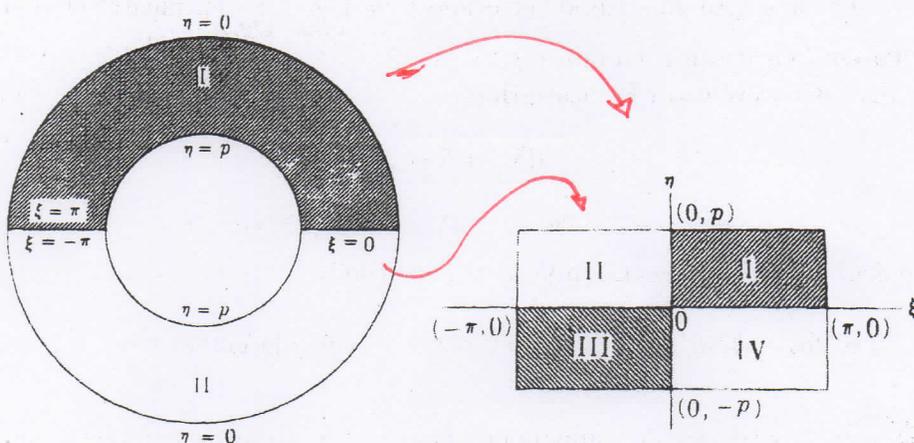
$$\implies ds = (R + \rho \cos \alpha) \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}.$$

Le coordinate (ξ, η) così ottenute sono coordinate isoterme sul toro che mappano il toro in modo conforme sul piano (ξ, η) .

Ora, poichè φ e α variano tra $[-\pi, \pi]$, anche $\xi \in [-\pi, \pi]$, mentre η varia tra $-p$ e p , dove

$$p = \int_0^\pi \frac{\rho d\alpha}{R + \rho \cos \alpha}.$$

Le coordinate (ξ, η) formano un rettangolo nel piano (ξ, η) (come mostrato in Figura 6).



(a) Figura 5

(b) Figura 6

In Figura 5 è mostrata la metà superiore del nostro toro; la parte più scura, chiamata I, è mappata nel rettangolo I in figura 6. Allo stesso modo la metà non colorata del toro, denominata II, è mappata nel rettangolo II. I rettangoli III e IV rappresentano la metà inferiore del toro.

Osserviamo che i punti sulle rette $\xi = \pi$ e $\xi = -\pi$ aventi la stessa coordinata η corrispondono al medesimo punto del toro. La stessa cosa vale per i punti che stanno sulle rette $\eta = p$ e $\eta = -p$ aventi la stessa coordinata ξ .

Ora consideriamo nel piano $z = x + iy$ quattro punti: $z = -\frac{1}{k}$, -1 , 1 , $\frac{1}{k}$ con $k < 1$. La funzione

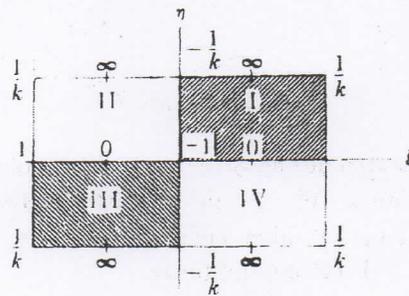
$$\zeta = a + b \int_0^z \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

mappa conformemente il semipiano superiore $y > 0$ in un rettangolo del piano $\xi + i\eta = \zeta$, con i quattro punti specifici z che vanno a finire nei vertici del rettangolo.

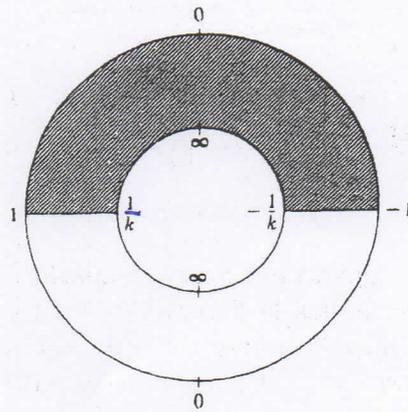
Possiamo scegliere k in modo che il rettangolo sia simile al rettangolo I in Figura 6 e prendere a e b in modo che $\zeta(z)$ mappi $y > 0$ nel rettangolo I nel seguente modo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} &\longrightarrow ip \\ -1 &\longrightarrow 0 \\ 1 &\longrightarrow \pi \\ \frac{1}{k} &\longrightarrow \pi + ip \end{aligned}$$

come mostrato in Figura 7.



(a) Figura 7



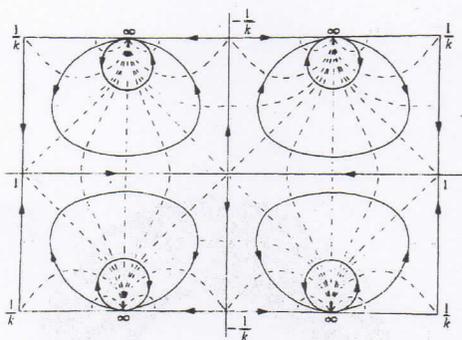
(b) Figura 8

Ciascuno dei punti $-\frac{1}{k}$, -1 , 1 , $\frac{1}{k}$ è un punto di diramazione di ordine 2 per la funzione $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, perciò se tagliamo il piano tra $-\frac{1}{k}$ e -1 e tra 1 e $\frac{1}{k}$ e vi attacchiamo un altro foglio proprio lungo questi tagli, otteniamo che $\zeta = \zeta(z)$ mappa questa superficie di Riemann a due fogli nell'intero rettangolo in Figura 6 e in modo conforme.

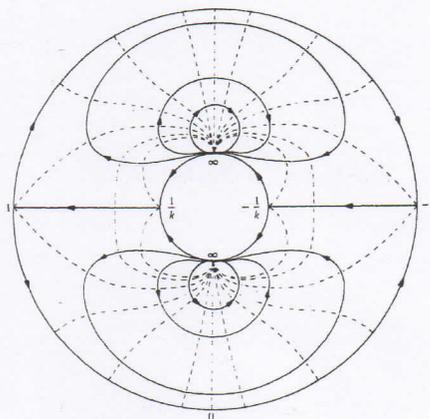
La funzione inversa $z = z(\zeta)$ fornisce allora una mappa iniettiva e conforme dal toro alla superficie di Riemann a due fogli.

Infatti, i due lati del rettangolo compresi tra $\xi = \pi$ e $\xi = -\pi$ sono le immagini dei segmenti compresi tra 1 e $\frac{1}{k}$, mentre i lati sulle rette $\eta = p$ e $\eta = -p$ sono le immagini dei segmenti tra $\frac{1}{k}$ e $-\frac{1}{k}$ che attraversano ∞ .

La funzione $z = z(\zeta)$ genera un unico potenziale complesso sul toro, con poli nei due punti indicati con ∞ in Figura 8, e con quattro punti singolari in $-\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k}$.



(a) Figura 9



(b) Figura 10

Questo potenziale complesso è il potenziale del flusso nel rettangolo (come mostra la Figura 9) e nel toro (Figura 10). Le linee tratteggiate sono le linee equipotenziali $x = \text{costante}$, mentre le linee continue sono quelle di flusso $y = \text{costante}$; le frecce indicano la direzione del flusso.

*x=c
equipot. lines
stream lines
y=c*

Sulla superficie di Riemann a due fogli, possiamo prendere due funzioni meromorfe z e $w = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$ indipendenti. Chiaramente è soddisfatta la relazione algebrica

$$w^2 - (1 - z^2)(1 - k^2 z^2) = 0$$

e ogni altra funzione meromorfa su questa superficie, e quindi sul toro, è una funzione razionale di z e w .

I potenziali complessi polidromi sul toro sono della forma:

$$\int R(z, w) dz$$

e sono chiamati **integrali ellittici**.

XXI-4

Se $g = 1$, c'è un solo potenziale complesso polidromo indipendente e ovunque finito, come mostrato in Figura 10.

La funzione analitica

$$\zeta(z) = \int_0^z \frac{dz}{w} \quad \text{holomorphic 1-form}$$

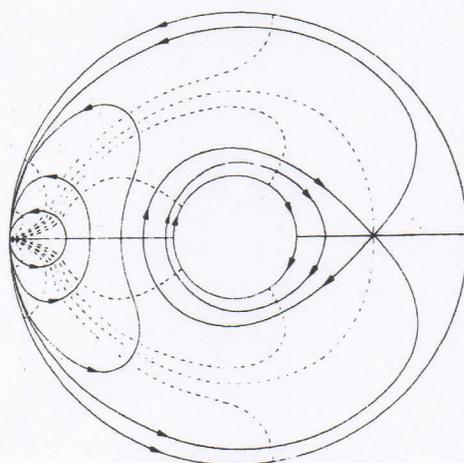
mappa la superficie a due fogli in un rettangolo e perciò è finita sulla superficie. Questo è (a meno di una costante moltiplicativa) l'unico potenziale complesso polidromo ovunque finito sul toro.

Esso è chiamato **integrale ellittico di prima specie** ed è la forma canonica di ciascun integrale ellittico finito su una superficie di Riemann a due fogli.

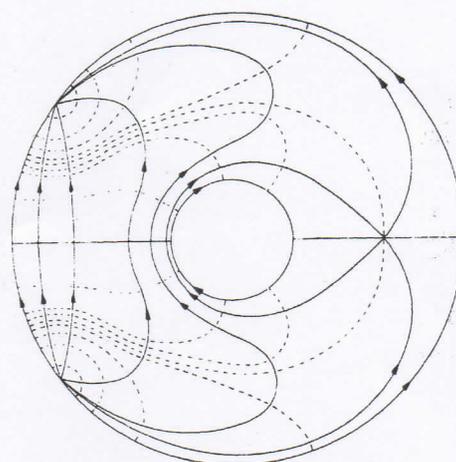
first kind

Le funzioni polidrome sul toro che hanno unicamente dei poli come punti singolari sono chiamate **integrali ellittici di seconda specie**, mentre quelle che presentano singolarità logaritmiche sono dette di **terza specie**.

I flussi corrispondenti ad integrali ellittici di seconda e terza specie sono rappresentati rispettivamente in Figura 11 e 12. Ciò completa la classificazione degli integrali ellittici.



(a) Figura 11



(b) Figura 12

Abbiamo visto che su ciascuna superficie possiamo trovare un sistema di coordinate isoterme che sono valide nell'intorno di un dato punto e che ci permettono di mappare questo intorno in una regione del piano complesso.

Tuttavia, la domanda che possiamo porci è la seguente: è possibile trovare un sistema di coordinate isoterme valide sull'intera superficie?

Si può dimostrare che se tale superficie ha la proprietà che ciascuna curva semplice chiusa la divide in due parti, ovvero è semplicemente connessa, esistono coordinate isoterme che mappano l'intera superficie in una regione del piano complesso in modo conforme e iniettivo.

Anche nel caso in cui la superficie non soddisfi la proprietà sopra citata, è comunque possibile trovare coordinate isoterme $\sigma + i\tau = t$ t.c. differenti valori di t determinano punti diversi della superficie, ma ad un singolo punto sulla superficie corrispondono diversi valori di t . Se consideriamo la superficie di Riemann della funzione algebrica $w(z)$ definita dalla coppia (z, w) , possiamo considerare questa superficie come una curva algebrica, e la coordinata t ci permette di scrivere $z = z(t)$ e $w = w(t)$, perciò a ciascun punto (z, w) corrisponde un unico valore di t .

t viene chiamato parametro uniformizzante sulla superficie di Riemann.

Questo problema verrà ripreso nell'ultimo capitolo.

uniformization problem