

5 IL TEOREMA DI RIEMANN-HURWITZ

Teorema 8 (Formula di Hurwitz). *irreducibile*

RS

Siano X e X' due curve algebriche connesse nel piano proiettivo complesso, ossia due superfici di Riemann. Sia $\pi : X \rightarrow X'$ un rivestimento ramificato di ordine d , pari al numero di fogli. Sia x un punto di diramazione e \mathcal{R} l'insieme di tutti i punti di diramazione. Allora:

$$\chi = d \cdot \chi' - \sum_{x \in \mathcal{R}} (k_x - 1) = d \cdot \chi' - \sum_{x \in \mathcal{R}} (k_x - 1)$$

branching index at x
sheets merging at x

dove χ e χ' sono le caratteristiche di Eulero-Poincaré di X e X' , mentre k_x è l'indice di diramazione o ramificazione in x e coincide col numero di fogli che si incontrano in x .

Si può osservare che per un punto che non sia di diramazione si ha che $k_x = 1$, perciò nella sommatoria si contano effettivamente solo i punti di diramazione.

Dimostrazione. Si consideri X' e la si triangoli, in modo che i punti di diramazione siano presenti tra i vertici della triangolazione, e la si sollevi ad una triangolazione di X . Allora si ha:

lift

$$\begin{aligned} E &= d \cdot E', & F &= d \cdot F', \\ V &= d \cdot V' - \sum_{x \in \mathcal{R}} (k_x - 1). \end{aligned}$$

Perciò si ottiene:

$$\chi = V - E + F = d \cdot (V' - E' + F') - \sum_{x \in \mathcal{R}} (k_x - 1) = d \cdot \chi' - \sum_{x \in \mathcal{R}} (k_x - 1).$$

□

Esempio 1.

Prendiamo $X : y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, con a, b, c, d distinti, che sappiamo essere un toro, ma ora vogliamo dimostrarlo utilizzando la formula di Hurwitz.

Esistono 4 punti di diramazione, perciò $k_x = 2$ e $k_x - 1 = 1$. Inoltre ci sono 2 fogli, da cui $d = 2$.

Se prendiamo $X' = \mathbb{P}^1$ e $\chi' = 2$ si ha:

$$\chi = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$$

$$\Rightarrow g = 1$$

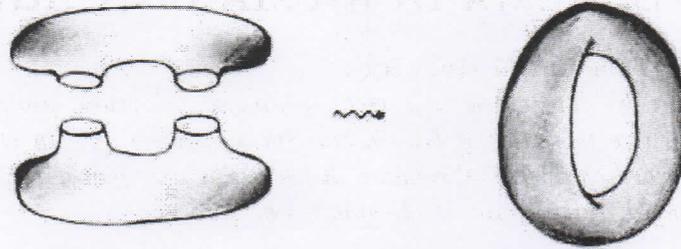


Figura 13

È quindi confermato che si tratta di un toro, avendo $\chi = 0$ e quindi $g_X = 1$ (Figura 13).

Prima di procedere, vediamo un altro modo per affrontare il Teorema di Hurwitz, tramite 1-forme meromorfe.

RH
 →
 Alternate
 proof

Teorema 9. Sia $f : X \rightarrow X'$ una mappa olomorfa non-costante tra due superfici di Riemann compatte e connesse (f è quindi una funzione propria). Denotiamo con

$$\mathcal{R}_f = \sum_{x \in X} (k_x - 1) = \sum_{x \in \mathcal{R}} (k_x - 1)$$

l'indice di ramificazione. Allora si ha:

$$\chi = d \cdot \chi' - \mathcal{R}_f.$$

Dimostrazione. Sia β una 1-forma meromorfa su X' , allora $f^*(\beta)$ è una 1-forma meromorfa su X .

Un polo o uno zero di β che non sia un punto di diramazione genera d poli/zeri con la stessa molteplicità.

Sia x un punto di diramazione e definiamo localmente attorno ad esso

$$f : z \rightarrow w = z^k, \quad k > 1.$$

Se $\beta = g(w) dw$ con g meromorfa, allora

$$f^*\beta = k z^{k-1} g(z^k) dz.$$

Se g possiede degli zeri di ordine $l \in \mathbb{Z}$, allora $z^{k-1}g(z^k)$ ha zeri di ordine $k \cdot l + k - 1$.

Se poniamo

$$d = \sum_{x \in f^{-1}(x')} k_x,$$

il contributo totale degli zeri/poli di $f^*\beta$ proveniente da $x = f^{-1}(x')$ sarà:

$$\sum_{x \in f^{-1}(x')} (k_x \cdot l + k_x - 1) = l \cdot d + \sum_{x \in f^{-1}(x')} (k_x - 1),$$

dove l'ultimo termine è l'indice di ramificazione locale.

Ora, se α è una 1-forma meromorfa non banale su una superficie di Riemann compatta S , allora vale la formula che abbiamo dimostrato nel primo capitolo:

$$\# \text{zeri di } \alpha - \# \text{poli di } \alpha = 2g_S - 2 = -\chi(S),$$

perciò

$$\begin{aligned} \chi(X) = \chi = 2 - 2g_X &= - \left[\# \text{zeri di } f^*\beta - \# \text{poli di } f^*\beta \right] \\ &= d \cdot (2 - 2g_{X'}) - \mathcal{R}_f = d \cdot \chi' - \mathcal{R}_f \\ \implies \chi &= d \cdot \chi' - \mathcal{R}_f. \end{aligned}$$

□

Vediamo ora di dimostrare un altro fondamentale risultato:

Teorema 10 (Teorema di Riemann-Hurwitz).

Sia X una curva non singolare in \mathbb{P}^2 di grado n . Allora si ha:

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Thus $g = p$
↑
defined algebraically

dove g è il genere della curva X vista come superficie di Riemann.

Dimostrazione. X dà vita ad un rivestimento ramificato di ordine n . Sia $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ e siano x_i i punti di diramazione. Essi si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

che non è altro che il problema di Dini, dove la prima equazione ha grado n e la seconda è una curva di grado $n-1$.

L'intersezione ha cardinalità $n(n-1)$ per il teorema di Bézout.

I punti di diramazione sono quindi $n - 1$, in quanto ognuno assorbe n intersezioni.

Procediamo come prima e triangoliamo \mathbb{P}^1 (che visto come una superficie è una sfera) in modo che tra i vertici compaiano i punti di diramazione x_i :

$$\chi(\mathbb{P}^1) = V' - E' + F' = 2.$$

Tramite π , precisamente attraverso la controimmagine, si ottiene una triangolazione di X . In un punto regolare si ha il seguente schema:

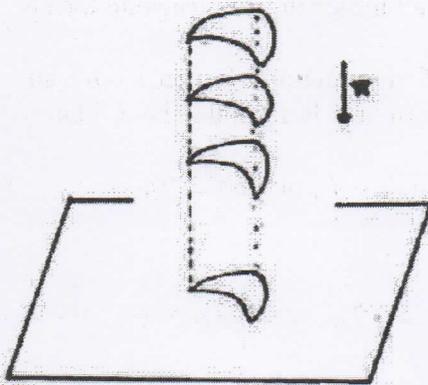


Figura 14

In un punto di diramazione, invece, n vertici collassano in uno solo e gli n punti di diramazione x_i assorbono $n - 1$ vertici; lo schema è il seguente:

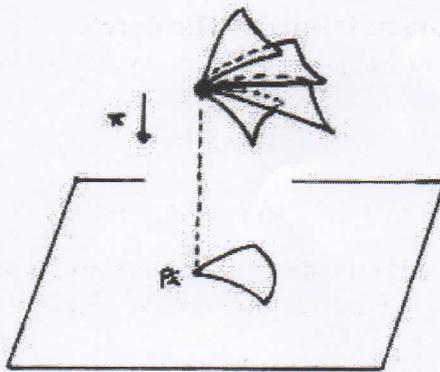


Figura 15

Si trova quindi:

$$\chi(X) = V - E + F = n(V' - E' + F') - n(n - 1) = 2n - n(n - 1) = n(3 - n).$$

Then

$\chi = 2 - 2g \implies g = 1 - \frac{\chi}{2}$ e perciò si ottiene:

$$g = 1 - \frac{n(3-n)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

□

Enunciamo infine, senza dimostrarlo, un altro importante risultato:

Teorema 11 (Teorema di Plücker).

Sia X una curva in \mathbb{P}^2 di grado n , con δ punti doppi, nodi o cuspidi. Allora si ha:

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta.$$

← done!

5.1 L'approccio di Klein a Riemann-Hurwitz e Poincaré-Hopf

Prendiamo $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma' = S^2$ un rivestimento ramificato.

La prima osservazione fatta da Klein è la seguente:

$$\# \text{punti singolari su } \Sigma = \# \text{punti di diramazione su } \Sigma'$$

Se chiamiamo l'insieme di tutti i punti di diramazione (branch-points) con b , e il numero di fogli con m , per Riemann-Hurwitz abbiamo:

$$\chi(\Sigma) = m \cdot \chi(S^2) - b \implies 2 - 2g = 2m - b$$

$$\implies b = 2m + 2g - 2$$

formula che avevamo già dimostrato in precedenza per i punti singolari.

$2m$ indica il numero di singolarità logaritmiche, anche indicato con μ , mentre m sono le discontinuità algebriche.

La **formula di Klein** è infatti la seguente:

$$\# \text{cross-points} = \mu + 2g - 2.$$

Ecco come Klein ha poi illustrato concretamente ciò che succede al flusso nel caso del toro.

Prendiamo una superficie con $g = 2$ e una coppia di flussi coniugati su di essa, come mostrato in Figura 16. Sulla destra di entrambe le figure ci sono 2 cross-points, uno visibile e l'altro nascosto dietro il primo.

hidden

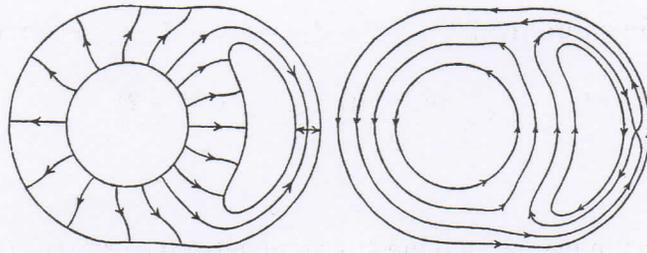


Figura 16

Ora facciamo un ragionamento che si potrebbe fare con qualsiasi superficie con $g > 1$ e avente un flusso ovunque finito che scorre su di essa. Deformiamo le due figure precedenti in questo modo:

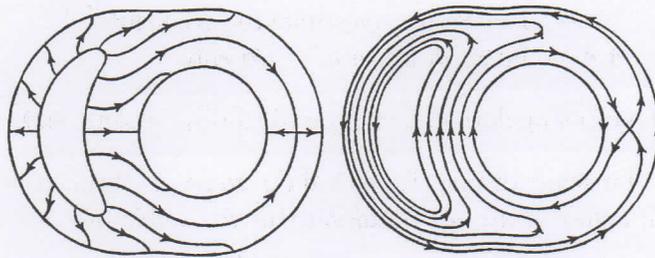


Figura 17

e poi riduciamo in entrambe il foro di sinistra

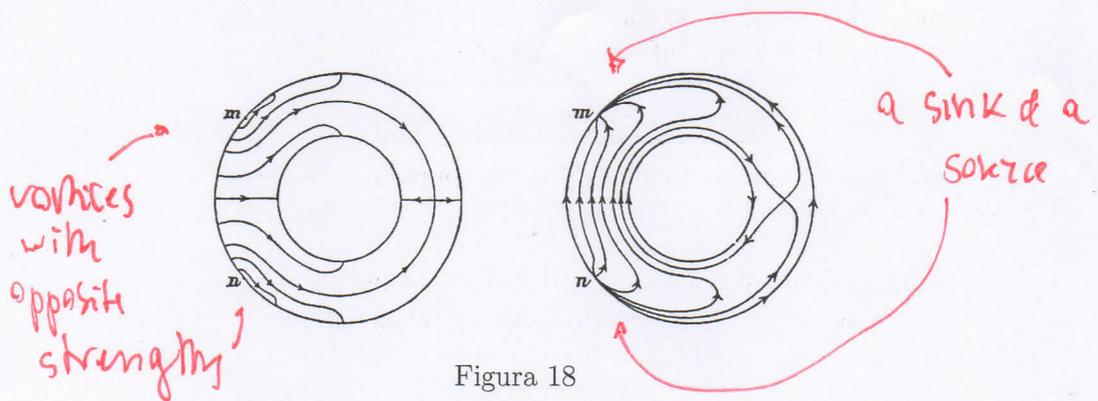


Figura 18

Abbiamo così ottenuto un toro ($g = 1$) su cui scorre un flusso avente due singularità logaritmiche che chiamiamo m ed n . I due cross-points a destra rimangono invece invariati.

Analizzando nello specifico i due tori ottenuti, in quello di sinistra m ed n formano dei vortici di intensità uguale ma opposta, in quello a destra sono rispettivamente un pozzo e una sorgente.

Se infine facciamo coincidere m ed n dando vita ad una discontinuità algebrica semplice otteniamo:

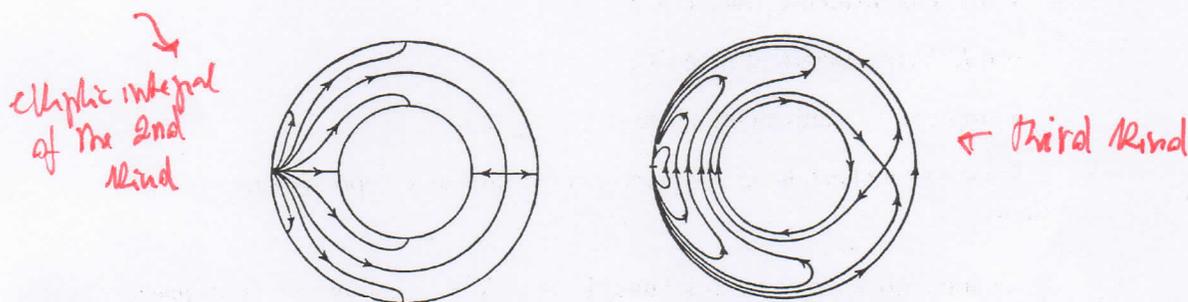


Figura 19

Se applichiamo la **formula di Klein** per il toro a sinistra in Figura 18:

$$c = 2 = \mu + 2 - 2$$

$$\Rightarrow \mu = 2 = 2 \cdot 1 \quad \Rightarrow m = 1$$

ovvero otteniamo una sola discontinuità algebrica, come mostrato in Figura 19. È il caso dell'**integrale ellittico di seconda specie** visto nel capitolo precedente.

Nel toro "duale" di destra, avente un flusso coniugato rispetto al primo, si ottiene un integrale ellittico di **terza specie**, essendo ancora presente una singularità logaritmica, come mostra la Figura 19.

Abbiamo poi già visto nell'esempio del precedente capitolo che se vogliamo mappare un toro in un ricoprimento ramificato di $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ (tramite una funzione meromorfa) abbiamo bisogno di 4 branch-points e si ottiene un integrale ellittico di prima specie.

* Riemann-Hurwitz via
meromorphic 1-forms

Let $f: X \rightarrow Y$ be a non-constant holomorphic map between compact connected R.S (f is then a proper map)

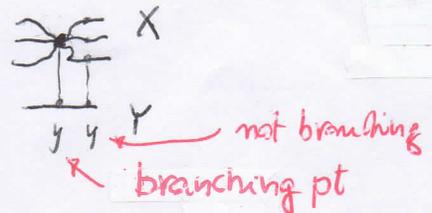
Set $d(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} R_x$
 (a finite sum) \rightarrow the unique $R \geq 1$ such that one can find charts around α and $y=f(\alpha)$ such that f is locally represented as $z \mapsto z^R$

The number $d(y)$ is in fact independent of y

$d = d(y) : \text{degree of } f$ [it agrees with the topological definition]

If $R_x > 1$, then α is called a branch point (or ramification point)

* branch points: R [in local charts, they correspond to the zeros of f'] where "leaves" come together



* meromorphic function on X: a holomorphic map $f: X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (Riemann sphere) not identically equal to ∞
 pole: $f^{-1}(\infty) \approx \frac{1}{z^R}$ of order R

* ramification index

$R_f = \sum_{x \in X} (R_x - 1)$

XXII-8

$\sum_{p \in R} (R_p - 1)$

number of sheets collapsing at p

since $R_x = 1$ except for a finite number of points, the sum is actually a finite one

Assume existence of a meromorphic l -form β on Y

Then $f^*(\beta)$ is a meromorphic l -form on X

A pole / zero of β which is not a branch point yields d poles/zeros with the same multiplicity

Let α be a branch point: locally around it

$$f: z \mapsto w = z^{1/k} \quad k > 1$$

If $\beta = g(w)dw$ (g meromorphic), then

$$f^*\beta = k \cdot z^{k-1} g(z^k) dz$$

If g has a "zero" of order $l \in \mathbb{Z}$,

then $z^{k-1} g(z^k)$ has a zero of order $k \cdot l + k - 1$

The contribution to the total count of zero/poles of $f^*\beta$ coming from $\alpha = f^{-1}(y)$ is

$$\sum_{\alpha \in f^{-1}(y)} (R_\alpha l + R_\alpha - 1) = d \cdot \underbrace{\sum_{\alpha \in f^{-1}(y)} R_\alpha}_d + \underbrace{\sum_{\alpha \in f^{-1}(y)} (R_\alpha - 1)}_{\text{local ramification index}}$$

However, if d is a non-trivial meromorphic 1-form on a compact Riemann surface Σ , then $\# \text{ zeros of } d - \# \text{ poles of } d$

$$= 2g_{\Sigma} - 2 - \chi(\Sigma) \quad (\square)$$

So $\chi(X)$

$$2 - 2g_X = -[\# \text{ zeros of } f^*\beta - \# \text{ poles of } f^*\beta]$$

$$= d \cdot \underbrace{(2 - 2g_Y)}_{\chi(Y)} - R_f$$

↑
total ramification index

yielding the Riemann-Hurwitz formula

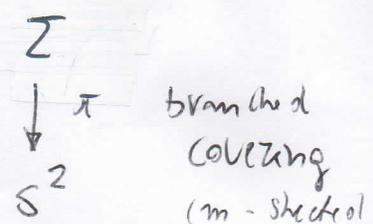
$$f: X \rightarrow Y$$

$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - R_f$$

Klein's approach, Riemann-Hurwitz, Poincaré-Hopf

basic observation (Klein)

Cross-points singular pts on Σ = # branching points on Σ'



$\chi(\Sigma) = m \chi(S^2) - b$
 $2 - 2g = 2m - b$

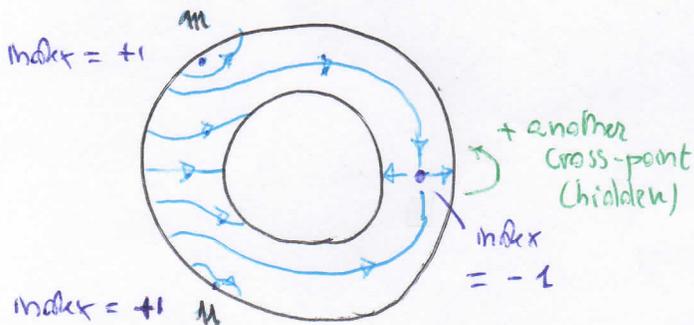
R-H: $b = 2m + 2g - 2$

"logarithmic singularities" or "logarithmic infinities"

$2 - 2g = 2m - b$
 $\chi(\Sigma)$ $\text{index}(X)$ total index

X any v. field on Σ

(X smoothed out, $\text{index} = 0$ at m, n)



Example:

$2 - 2 = 0 = \chi(\text{torus})$

$2m = \# \text{ logarithmic infinities}$
 $\leadsto m$ "algebraic discontinuities"

Klein formula: $\# \text{ cross-points} = \mu + 2g - 2$

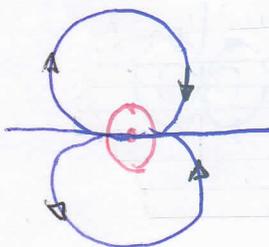
\uparrow
 # logarithmic infinities

In the example:

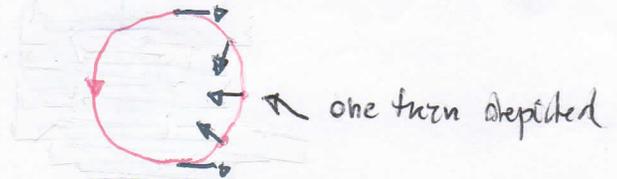
$m = 2 = 2 \cdot 1 = 1$ "algebraic discontinuity"

"elliptic integral" of the 2nd kind

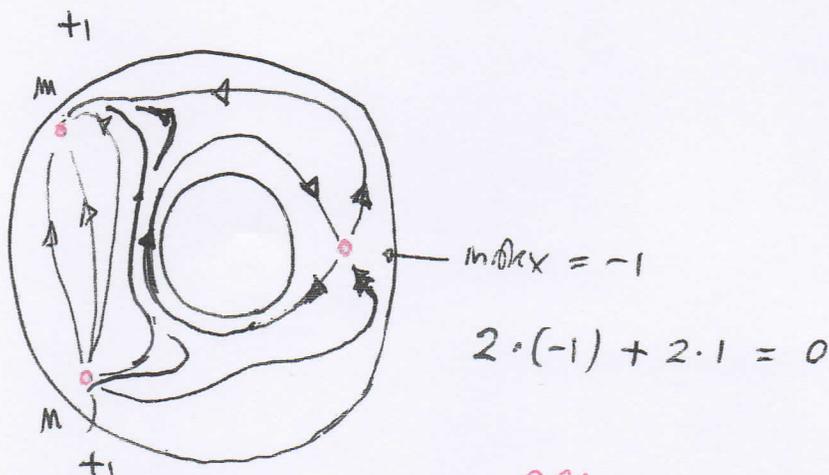
XXII-11



of index = 2



"dual example"



no elliptic integral of the 3rd kind

Notice that, if we want to realize a torus as a branched covering of $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, we need at least 4 branch-points: via a meromorphic function

$$0 = 2 \cdot m - b \quad m = 2 \Rightarrow b = 4$$

indeed, we must avoid logarithmic singularities altogether and resort to cross-points

no elliptic integral of the 1st kind
multivalued, uniform

cross pts = $\mu + 2g - 2$
 $= 2m + 2g - 2$
algebraic sing

Proof: cross-pt \leftrightarrow index = -1
 $V = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right)$ logarithmic sing: index = +1

Poincaré - Hopf
 index (V) = $2 - 2g$
 $\mu - c = 2 - 2g$
 $c = \mu + 2g - 2$

□