Letture
XXIII - bis

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES
Prof. M. Spera UCSC

1.7 La teoria di Hodge

Sia (M, g) una varietà riemanniana, con M varietà liscia di dimensione n. Il *tensore metrico* (o *metrica*) g è un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$, ovvero 2-covariante, dotato delle seguenti proprietà:

1. g è simmetrico;
2. $g|_x$ è definita positiva (come forma quadratica) $\forall x \in M$.

In altre parole $g|_x$ è un *prodotto scalare* definito sullo spazio tangente in ogni punto, che varia in modo liscio.

Localmente:

$$\boxed{g \equiv ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j}$$

1. $g_{ij} = g_{ji}$;
2. (g_{ij}) con autovalori positivi.

Ora ricordiamo che un prodotto scalare su V (con $(V, \langle\ \ \rangle)$ spazio euclideo) consente di identificare V con V^*, tramite la classica procedura di "alzare e abbassare gli indici"(*isomorfismi musicali*):

$$V \ni v^i \longleftrightarrow g_{ij}\, v^j \equiv v_i \in V^*$$

con

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Data (M, g) orientata e $g = \det(g_{ij})$

$$\Longrightarrow g = \epsilon^{i_1 \ldots i_n}_{1 \ldots n}\, g_{i_1 1}\, g_{i_2 2} \cdots g_{i_n n}$$

con ϵ il tensore totalmente antisimmetrico di Levi Civita.

Definiamo quindi la **forma di volume** (o elemento di volume) associata a g:

$$\tau := \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots dx^n.$$

g induce una metrica (L^2) sullo spazio $\Lambda^p(M) \equiv \Lambda^p$, $p = 0, 1, 2 \ldots n$ delle p-forme su M.

Sia
$$\alpha = \frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,dx^{i_1}\wedge\dots dx^{i_p}$$
(si somma su tutte le permutazioni di $1\dots p$); sia β espressa da una formula analoga.

Allora si ha
$$(\alpha,\beta) := \frac{1}{p!}\,\alpha_{i_1\dots i_p}\,\beta^{i_1\dots i_p}.$$

Risulta definito l'operatore **″star″di Hodge**:
$$* : \Lambda^p \to \Lambda^{n-p}$$
tale che
$$(\alpha,\beta)\tau = \alpha\wedge *\beta.$$
Esplicitamente, si trova per esempio
$$(*\beta)_{i_{p+1}\dots i_n} = \tau_{1\dots p\,i_{p+1}\dots i_n}\,\beta^{1\dots p} = \frac{1}{p!}\,\tau_{i_1\dots i_n}\,\beta^{i_1\dots i_p}.$$

Sia ora (M,g) compatta e orientata e definiamo un prodotto scalare globale su Λ^p:
$$\boxed{\langle\alpha\,|\,\beta\rangle := \int_M \alpha\wedge *\beta.}$$

Vediamo qualche proprietà:

- $\tau = *1$
- $*f\alpha = f * \alpha$
- $\alpha\wedge *\beta = \beta\wedge *\alpha$ (che assicura la simmetria: $\langle\beta\,|\,\alpha\rangle = \langle\alpha\,|\,\beta\rangle$)
- $\alpha\wedge *\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ (che implica $\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle \geq 0$ e $= 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$)
- $\langle *\alpha\,|\,*\beta\rangle = \langle\alpha\,|\,\beta\rangle$.

Definiamo il **codifferenziale** o **aggiunto di Hodge** $\delta : \Lambda^p \to \Lambda^{p-1}$ tramite l'espressione:
$$\delta = (-1)^{np+n+1} * d * .$$

XXIII-bis - 2

Ricordiamo che il **differenziale esterno** $d : \Lambda^p \to \Lambda^{p+1}$ soddisfa:

$$\boxed{d^2 = 0;}$$

allo stesso modo δ è lineare e soddisfa

$$\boxed{\delta^2 = 0.}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $\langle \alpha \,|\, d\beta \rangle = \langle \delta\alpha \,|\, \beta \rangle$, ($\delta$ è l'aggiunto di d);
- $*\delta\alpha = (-1)^p \, d * \alpha$;
- $*d\alpha = (-1)^{p+1} \, \delta * \alpha$.

Definiamo ora il **laplaciano di Hodge**:

$$\Delta := d\delta + \delta d, \qquad \Delta : \Lambda^p \to \Lambda^p \quad \forall p.$$

Definizione 13. *α è detta **armonica alla Kodaira** se $\Delta\alpha = 0$.*

*α è detta **armonica alla Hodge** se è chiusa ($d\alpha = 0$) e co-chiusa ($\delta\alpha = 0$).*

Si dimostra facilmente che α è armonica alla Kodaira se e solo se è armonica alla Hodge.

Infine, richiamiamo il **complesso di de Rham**:

$$0 \to \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \ldots \Lambda^p \xrightarrow{d} \Lambda^{p+1} \xrightarrow{d} \ldots \Lambda^n \to 0$$

e il **p-esimo gruppo di coomologia di de Rham**:

$$H^p_{dR}(M) := \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

la cui dimensione viene chiamata *numero di Betti.* pth - Betti number

Definizione 14. *Siano $Z^p(M)$ l'insieme delle p-forme chiuse e $B^p(M)$ l'insieme delle p-forme esatte.*

Sia $\mathcal{H}^p(M)$ lo spazio delle p-forme armoniche; ovviamente si ha

$$\mathcal{H}^p(M) \subset Z^p(M).$$

XXIII - bis - 3

Ora prendiamo $\omega \in \Lambda^p$ e consideriamo il **funzionale di Dirichlet**:

$$\mathcal{F}(\omega) = \langle \omega, \Delta\omega \rangle = \langle \omega, (d\delta + \delta d)\omega \rangle = ||\delta\omega||^2 + ||d\omega||^2.$$

$\mathcal{F}$ è minimo se e solo se $\Delta\omega = 0$ (i.e. sono forme armoniche), se e solo se $\delta\omega = d\omega = 0$.

Il seguente teorema sarà di fondamentale importanza nel prossimo capitolo:

Teorema 2 (**Teorema di Hodge**). ortogonal decomposition

$$\Lambda^p = \mathcal{H}^p \oplus Im\,\delta \oplus Im\,d, \qquad \dim \mathcal{H}^p < \infty$$

$$\implies \omega = \omega_1 + \delta\alpha + d\beta$$

$$\implies ||\omega||^2 = ||\omega_1||^2 + ||\delta\alpha||^2 + ||d\beta||^2$$

ovvero, in ogni classe $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$ esiste ed è unico il rappresentante armonico e ha norma minima.

$\boxed{\textit{Dunque } \mathcal{H}^p(M) \cong H^p_{dR}(M).}$

Il fatto che $\dim \mathcal{H}^p < \infty$ implica che anche $H^p_{dR}(M)$ abbia dimensione finita; quest'ultima osservazione si può provare però anche indipendentemente, tramite tecniche di topologia algebrica ed in particolare usando le successioni di Mayer-Vietoris e l'esistenza di un buon ricoprimento (necessariamente finito) su una varietà compatta.

XXIII - bis - 4