Lecture XXIV

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera UCSC

# TEORIA DI HODGE

(rapidi cenni)

☆ Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana (liscia) orientata e compatta, $\dim M = n$

metrica

☆ $g$ induce una metrica su $\Lambda^p(M) \equiv \Lambda^p \quad p = 0, 1, 2, \ldots n$
($L^2$)

p-forme su $M$

Si consideri il complesso di de Rham

$$0 \to \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \ldots \Lambda^p \xrightarrow{d} \Lambda^{p+1} \to \ldots \Lambda^n \to 0$$

funzioni.

si ha $d^2 = 0$

($d$: differenziale esterno)

Siano $\delta : \Lambda^p \to \Lambda^{p-1}$ gli aggiunti di Hodge (**)

[ Per le funzioni $\Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1$ $\quad \langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$

$\Lambda^1 \xrightarrow{\delta} \Lambda^0 \xrightarrow{\delta=0} 0$

$\Delta = \delta d$ : operatore di Laplace Beltrami ]

In generale $\Delta := d\delta + \delta d$ Laplaciano di Hodge

$(\Delta : \Lambda^p \to \Lambda^p \quad \forall p)$

(**) Si introduce l'operatore $*$ di Hodge $(*^2 = \pm 1 \ldots)$

$* : \Lambda^p \to \Lambda^{n-p}$

Consideriamo ora il funzionale di Dirichlet

$$\mathcal{Y}(\omega) = \langle \omega | \Delta \omega \rangle \quad (\geq 0)$$

$\omega \in \Lambda^p$

$$\mathcal{Y}(\omega) = \langle \omega | (d\delta + \delta d)\omega \rangle =$$

$$= \| \delta\omega \|^2 + \| d\omega \|^2$$

$\mathcal{Y}$ è minimo $\iff \Delta\omega = 0$ forme armoniche

$\iff \delta\omega = d\omega = 0$

Sia $\mathcal{H}^p(M)$ = p-forme armoniche

osserviamo che

$$\mathcal{H}^p(M) \subset Z^p(M)$$

p-forme chiuse: $d\omega = 0$

Ricordiamo: $B^p(M)$ = p-forme esatte $\omega = d\alpha$, $\alpha \in \Lambda^{p-1}$

$$H^p_{DR}(M) := Z^p(M) / B^p(M)$$

p-esimo gruppo di coomologia di de Rham

$\dim H^p_{DR}(M) \equiv b_p$ p-esimo numero di Betti

de Rham

$$\left( \cong \check{H}^p(M) \cong H_p(M) \right)$$

Weil, coom. di Čech; omologia singolare o simpliciale...

Ma $\quad d\delta\alpha = 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = \| d\delta\alpha \|^2 \Rightarrow \ldots \| \delta\alpha \|^2 = 0 \Rightarrow \quad \delta\alpha = 0$$

cioè $\quad \omega = \omega_c + d\beta$

$\Rightarrow \quad [\omega_c] = [\omega] \text{ in } H^p$

$(\text{e che } \|\omega\|^2 \geq \|\omega_c\|^2 \quad (= \Leftrightarrow \omega = \omega_c)$

§ Per dimostrare che $\underline{\underline{\dim \mathcal{H}^p < \infty}}$ si

studia l'operatore $\quad 1 + \Delta$.

$\ker (1+\Delta) = \{0\}$

infatti, se $\omega \neq 0 \quad \langle \omega | (1+\Delta)\omega \rangle \geq \|\omega\|^2 > 0$

§§ <u>fatto fondamentale</u>

$$G = (1+\Delta)^{-1} \quad \text{esiste ed è } \underline{\underline{\text{compatto}}}$$

(questo segue dal <u>teorema di Rellich</u>[4])
(come per <u>Sturm</u> - <u>Liouville</u>)

$\Rightarrow \quad G \rightsquigarrow \{\mu_n\} \quad \text{e } \mu_n \to 0$

$\quad \Rightarrow \quad \Delta \rightsquigarrow \{\lambda_n\} \text{ con } \quad \dfrac{1}{1+\lambda_n} = \mu_n$

$\lambda_n \to +\infty$, e se 1 <u>è autovalore</u>, <u>ha necessariamente molteplicità finita</u>!

✧ Teorema di Hodge

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ dove $h^p < \infty$

$$(\diamond)\quad \Lambda^p = \mathcal{H}^p \oplus \operatorname{Im}\delta \oplus \operatorname{Im} d$$

$$(\diamond\diamond)\quad \omega = \omega_h + \delta\alpha + d\beta \quad (\text{conv. in } L^2)$$

$$\Rightarrow \|\omega\|^2 = \|\omega_h\|^2 + \|\delta\alpha\|^2 + \|d\beta\|^2 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ in ogni classe $[\omega] \in H^p_{DR}(M)$ esiste

ed è unico il rappresentante armonico,

e ha norma minima. Dunque

$$\mathcal{H}^p(M) \cong H^p_{DR}(M)$$

Verifichiamo che il secondo membro di $(\diamond)$ è effettivamente una decomposizione ortogonale

$$\langle \delta\alpha \mid d\beta \rangle = \langle \alpha \mid d^2\beta \rangle = 0 \qquad (d^2 = 0)$$

$$\langle \omega_h \mid \delta\alpha \rangle = \langle d\omega_h \mid \alpha \rangle = 0$$

$$\langle \omega_h \mid d\beta \rangle = \langle \delta\omega_h \mid \beta \rangle = 0$$

$\Rightarrow (*)$ segue subito ed è $\geq \|\omega_h\|$

(se $\omega$ è data da $(\diamond\diamond)$) vedi in fondo

Se $d\omega = 0$ ($\omega \in Z^p$) si ha

$$0 = d\omega = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d\omega_h} + d\delta\alpha + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d^2\beta} = d\delta\alpha$$

In particolare

$$(1+\Delta)\,\omega = \omega \iff \underline{\omega \text{ è armonica}}$$

$\Rightarrow \quad \dim \mathcal{H}^p < +\infty$

( $\Rightarrow$ $H^p_{DR}(M)$ <u>ha dim. finita</u> : quest'ultimo fatto si può provare <u>indipendentemente</u> tramite tecniche di <u>topologia algebrica</u>)

$\Leftarrow$ ora $\omega \in L^2$. In base alla "<u>regolarità ellittica</u>" $\omega$ è $\mathcal{C}^\infty$ (.. come per S.L.)

[ (segue dalla 1ª pagina)

$\Leftarrow$ osserviamo infine che se $\omega \in \Lambda^p$ e

$\omega \perp \mathcal{H}^p \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im}\delta$,

allora $\omega = 0$

$\langle \omega \mid d\gamma \rangle = 0 \;\; \forall\gamma \quad \Rightarrow \quad \delta\omega = 0$

$\langle \omega \mid \delta\xi \rangle = 0 \;\; \forall\xi \quad \Rightarrow \quad d\omega = 0$

$\Rightarrow \omega \in \mathcal{H}^p \quad \Rightarrow$, se $\omega \perp \mathcal{H}^p$ è $\omega = 0$ ]

{{{ una dim. più dettagliata farebbe uso del fatto che $\operatorname{Im} d$ e $\operatorname{Im}\delta$ <u>sono chiusi</u> .. in $\mathcal{L}^2$

XXIV - 5

Formule per gli operatori di proiezione
(def. su $\mathcal{C}^\infty$)

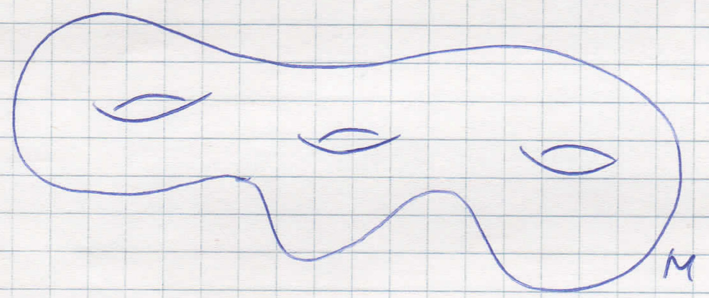
$$P_1 = P_{\mathrm{Im}\,\delta} = \delta \cdot \Delta^{-1} \cdot d$$

$$P_2 = P_{\mathrm{Im}\,d} = d \cdot \Delta^{-1} \cdot \delta$$

Da $d^2 = \delta^2 = 0$ si ha $P_{\frac{1}{2}}^2 = P_{\frac{1}{2}}^* = P_{\frac{1}{2}}$

$P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ (come deve essere!)

$$P_{\mathcal{H}} = 1 - P_1 - P_2$$




dim $\mathcal{H}^1(M) = b_1 = 3\cdot 2 = 6$

$b_0 = 1$

$b_2 = 1$

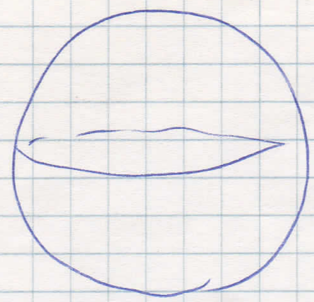
dim $\mathcal{H}^1(M) = b_1 = 6 \cdot 2 = 12$

Dalla teoria di Hodge segue facilmente

$$b_p = b_{n-p}$$ (Poincaré)

☇ Commento : calcolo di $b_0 = 1$ per $S^2$

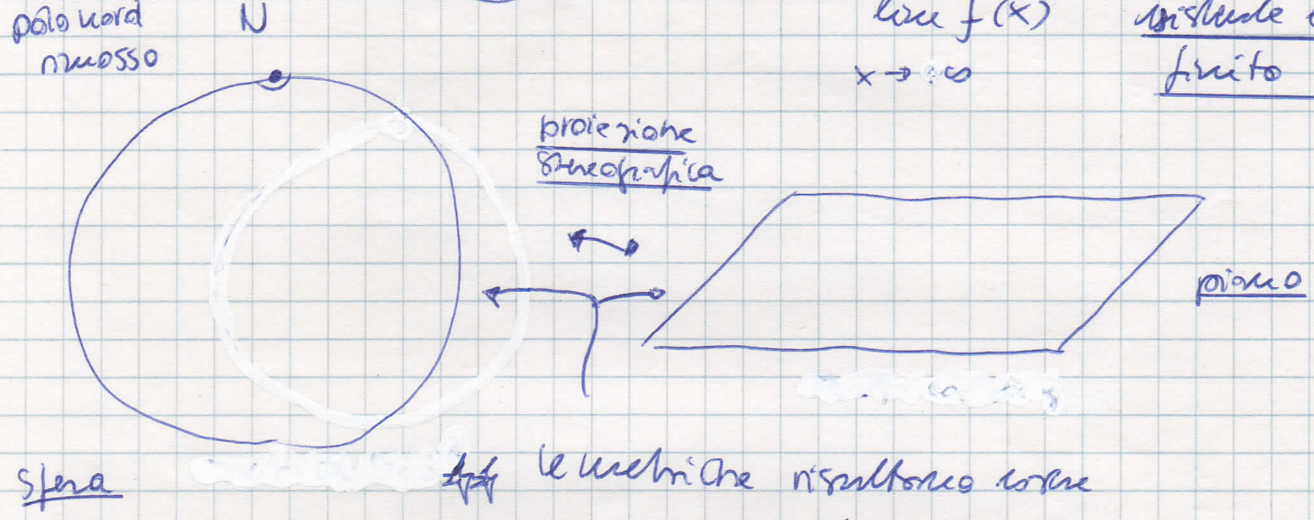
caso $\Delta f = 0$ su $S^2$



☇ ⇒ caso, in $\mathbb{R}^2$

$\Delta f = 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ esistente e finito




☇ le metriche risultano come conformemente equivalenti, ma

☇ l'armonicità è invariante per transf. conformi...

⇒ trovo $f = \text{cost}$ (Dirichlet) ⇒ l'asserto.

XXIV-7