Additional analytical details (not required)

Lecture XXV - add

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera UCSC Brescia

Teorema 4. *Tutte le 1-forme lisce ω a valori reali si scompongono in modo unico nella somma di tre 1-forme:*

$$\omega = \omega_h + dF + *dG\,,$$

dove ω_h è una forma armonica liscia mentre F e G sono due funzioni lisce a valori reali definite globalmente su S.

Dimostrazione. Introduciamo sullo spazio $\Omega^1(S)$ delle 1-forme differenziali reali su S il prodotto scalare:

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{L^2} := \int_S \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_P \, vol_P = \int_S \omega_1 \wedge *\omega_2.$$

Completando, si ottiene lo spazio di Hilbert $(\Omega^1_{L^2}(S), \langle\,,\rangle_{L^2})$.

Siano E lo spazio delle forme esatte lisce su $\Omega^1_{L^2}(S)$ e E^* quello delle forme co-esatte lisce; prendiamo poi ω una 1-forma e F una funzione, entrambe lisce. Tramite Leibniz $d(F * \omega) = dF \wedge *\omega + Fd(*\omega)$ e Stokes abbiamo che:

$$\int_S \langle dF, \omega \rangle \, vol = -\int_S dF \wedge *\omega = \int_S Fd(*\omega). \qquad \diamond$$

Applichiamo questa formula a $\omega = *dG$, dove G è una funzione liscia ($\omega \in E^*$):

$$\Longrightarrow \langle dF, *dG \rangle_{L^2} = 0,$$

ovvero gli spazi E ed E^* sono ortogonali.

Se introduciamo H spazio ortogonale ad $E \oplus E^*$, otteniamo la seguente scomposizione in somme dirette ortogonali:

$$\Omega^1_{L^2}(S) = H \oplus E \oplus E^*.$$

Non ci resta che mostrare che H è lo spazio delle forme armoniche lisce globali. Per fare ciò è necessario introdurre il seguente lemma:

Lemma 2. *(di Weyl).*

Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario munito della metrica euclidea standard $dx^2 + dy^2$. Ciascuna 1-forma su $\mathbb{D}$ misurabile, a quadrato sommabile e ortogonale alle forme esatte e co-esatte a supporto compatto è armonica.

Dimostrazione. Prendiamo ω come da ipotesi. Osserviamo che se ω è liscia, allora è armonica, perciò si tratta di dimostrare che ω è chiusa e co-chiusa, o ugualmente che $*\omega$ è chiusa.

Ma per ipotesi ω è ortogonale alle forme chiuse a supporto compatto, perciò per la formula $\diamond$ la forma $d(*\omega)$ è ortogonale a tutte le funzioni a supporto compatto. Pertanto questa forma è nulla e perciò $*\omega$ è chiusa.

L'idea ora è di regolarizzare ω tramite *convoluzione*. Ricordiamo che se il nucleo di convoluzione viene scelto invariante per rotazione, la forma ω è uguale alla sua convoluzione. Ciò proviene dal *Teorema della media nel piano*, che assicura che il valore di una funzione armonica in un punto è uguale alla sua media su tutto l'intorno centrato in quel punto.

Teorema 5 (Teorema della media).
Data ω funzione armonica in U (aperto, limitato e connesso) fissiamo un punto $P \in U$ e consideriamo il disco D_r di centro P e raggio r, t.c. $D_r \subset U$. Utilizziamo le coordinate polari (r, θ), con $\theta \in [0, 2\pi)$. Dimostriamo che

$$\overline{\omega}_{D_r} := \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D_r} \omega \, dl = \omega(P)$$

Dimostrazione. Poniamo $\overline{\omega}_{D_r} \equiv \overline{\omega}(r)$ e deriviamo rispetto a r:

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\omega}}{dr} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(r,\theta)\, d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega}{\partial r}(r,\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{n}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D_r} \frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{n}}\, dl,
\end{aligned}$$

dove n è la normale esterna a D_r e dove abbiamo utilizzato l'elemento di lunghezza

$$dl = r\, d\theta.$$

Ora, per il Teorema della divergenza (in questa formulazione anche noto come Teorema di Gauss-Green) ed essendo ω armonica per ipotesi si ha:

$$\begin{aligned}
0 = \int_{D_r} \Delta\omega \, dv &= \int_{D_r} \operatorname{div}(\nabla\omega)\, dv \\
&= \int_{\partial D_r} \nabla\omega \cdot \mathrm{n}\, dl = \int_{\partial D_r} \frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{n}}\, dl.
\end{aligned}$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nell'equazione precedente, otteniamo che $\overline{\omega}$ non dipende da r e quindi $\overline{\omega}(r) = \omega(P)$. $\square$

XXV-add-2

Ora non ci resta che mostrare che ω è uguale alla sua convoluzione e quindi è liscia.

Formalmente, $\forall \rho \in (0,1)$ denotiamo con D_ρ il disco chiuso di centro 0 e raggio ρ e introduciamo un nucleo regolarizzante $(K_\rho)_{\rho\in(0,1)}$ tale che:

- K_ρ sia una funzione positiva e liscia definita su $\mathbb{D}$, con supporto D_ρ e integrale pari a 1;
- $K_\rho(x,y)$ dipenda solo da x^2+y^2.

Ora $\forall$ funzione integrabile $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ e $\forall \rho \in (0,1)$ consideriamo la funzione $M_\rho f$ definita da:

$$\boxed{M_\rho f(x,y) = \int_{\mathbb{D}} K_\rho(x'-x, y'-y) f(x',y') dx' dy'.}$$

Similmente, $\forall$ 1-forma $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy$ su $\mathbb{D}$ e $\forall \rho \in (0,1)$, prendiamo la 1-forma $M_\rho \omega$ definita da:

$$M_\rho \omega = (M_\rho \omega_x)dx + (M_\rho \omega_y)dy.$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall$ funzione integrabile f, la funzione $M_\rho f$ è definita e liscia su $D_{1-\rho}$.

2. $\forall$ funzione integrabile f si ha che: $M_\rho df = d(M_\rho f)$ su $D_{1-\rho}$. Similmente, per tutte le 1-forme ω si avrà: $M_\rho(*\omega) = *(M_\rho \omega)$ su $D_{1-\rho}$.

3. $\forall$ coppia di funzioni f_1 e f_2 con f_1 a supporto in $D_{1-\rho}$, si ha che: $\langle M_\rho f_1, f_2\rangle = \langle f_1, M_\rho f_2\rangle$.

4. $\forall$ funzione integrabile f e $\forall \rho, \rho' \in (0,1)$ si ha: $M_\rho M_{\rho'} f = M_{\rho'} M_\rho f$ su $D_{1-\rho-\rho'}$.

5. $\forall 0 < r < 1$ le funzioni $M_\rho f$ convergono a f in $L^2(D_r)$ quando ρ tende a 0.

6. Se u è una funzione armonica su $\mathbb{D}$, allora $M_\rho u = u$ su $D_{1-\rho}$.

Quest'ultimo punto, cruciale, deriva dal *Teorema della media* per le funzioni armoniche e dalla scelta di K_ρ invariante per rotazione.

XXV-add-3

Le proprietà 2. e 3. mostrano che se ω è ortogonale a tutte le forme lisce esatte e co-esatte a supporto compatto, allora $M_\rho\omega$ è ortogonale a tutte le forme esatte e co-esatte il cui supporto sia contenuto in $D_{1-\rho}$.
Ma siccome $M_\rho\omega$ è liscia su $D_{1-\rho}$ per la proprietà 1, questo implica che essa è armonica su $D_{1-\rho}$.

Per concludere, ci resta da dimostrare che M_ρ è q.o. uguale a ω su $D_{1-\rho}$.

Per le proprietà 2. e 4. $\forall \rho, \rho'$ t.c. $0 < \rho, \rho' < 1$ abbiamo che:

$$M_{\rho'}M_\rho\omega = M_{\rho'}(du) = d(M_{\rho'}u) = du = M_\rho\omega$$

su $D_{1-\rho-\rho'}$, dove u è un potenziale di $M_\rho\omega$.

Dalla proprietà 5. ricaviamo che

$$M_\rho\omega = M_{\rho'}M_\rho\omega = M_\rho M_{\rho'}\omega = M_{\rho'}\omega.$$

Allora $\forall\, 0 < r < 1$ la famiglia $M_\rho\omega$ è costante per $0 < \rho < 1 - r$ e tende a ω in $\Omega^1_{L^2}(B(0,r))$ quando ρ tende a 0.

Abbiamo così mostrato che ω è q.o. uguale ad una forma armonica liscia, che è la nostra tesi. Il *Lemma di Weyl* risulta pertanto dimostrato.

□

Per concludere la dimostrazione ci serve però un secondo lemma:

Lemma 3. *Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario munito della metrica euclidea standard $dx^2 + dy^2$. Sia ω una 1-forma liscia su $\mathbb{D}$. Esistono due funzioni lisce F e G definite sul disco tali che*

$$\omega = dF + *dG.$$

Questo lemma è un risultato **locale** specifico per il disco, nel nostro teorema ci sarà infatti anche ω_h.

Dimostrazione. Se ω è chiusa, allora è anche esatta su $\mathbb{D}$. Cerchiamo allora una funzione G tale che $\omega - *dG$ sia chiusa. Prendiamo una funzione ψ definita sul piano tale che $d\omega = \psi dx \wedge dy$. Per la formula $\diamond$ si ha:

$$d(\omega - *dG) = (\psi - \Delta G)dx \wedge dy.$$

Basta quindi risolvere l'equazione $\Delta G = \psi$ su $\mathbb{D}$ per ottenere la tesi.

□

XXV-add-4

Abbiamo perciò tutti gli elementi per dimostrare che

$$\omega = \omega_h + a + b$$

dove ω_h è armonica, $a \in E$ e $b \in E^*$.

Proviamo che localmente a e b sono forme lisce.
Consideriamo un disco D su S sufficientemente piccolo; per l'ultimo lemma esistono due funzioni lisce F e G tali che:

$$\omega_h + a - dF = *dG - b.$$

Il membro di sinistra è ortogonale a forme co-esatte a supporto compatto in D, mentre quello di destra è ortogonale a forme esatte a supporto compatto su D. Il Lemma di Weyl ci assicura quindi che questa forma differenziale è armonica e liscia, ovvero a e b sono lisce. a (b) c(a)
Si può infine provare che tutte le forme lisce di questo tipo sono anche esatte, e ciò conclude la dimostrazione del teorema.

$\square$

XXV-add-5