Lecture XXVII - add - 2

ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Prof. M. Spera UCSC - Brescia

Elliptic functions: a primer

Definizione 2.1. *Sia f una funzione doppiamente periodica e siano ω_1, ω_2 i suoi due periodi. Chiamiamo* reticolo *associato a ω_1, ω_2 l'insieme:*

$$\Lambda := \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

e chiamiamo parallelogramma fondamentale *l'insieme:*

$$\mathcal{P} := \{a\omega_1 + b\omega_2 : a, b \in [0, 1]\}$$

Consideriamo $\mathbb{C}/\Lambda$ ovvero l'insieme quoziente che identifica tutti i parallelogrammi nel parallelogramma fondamentale $\mathcal{P}$. Possiamo ora restringere il codominio di ψ a questo insieme, così che $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ risulti essere una funzione ben definita. Stavolta l'insieme quoziente è omeomorfo a un *toro*. I due percorsi di integrazione che circondano i tagli precedentemente evidenziati sono infatti i due percorsi non banali che troviamo sul toro, che ha proprio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come gruppo fondamentale.

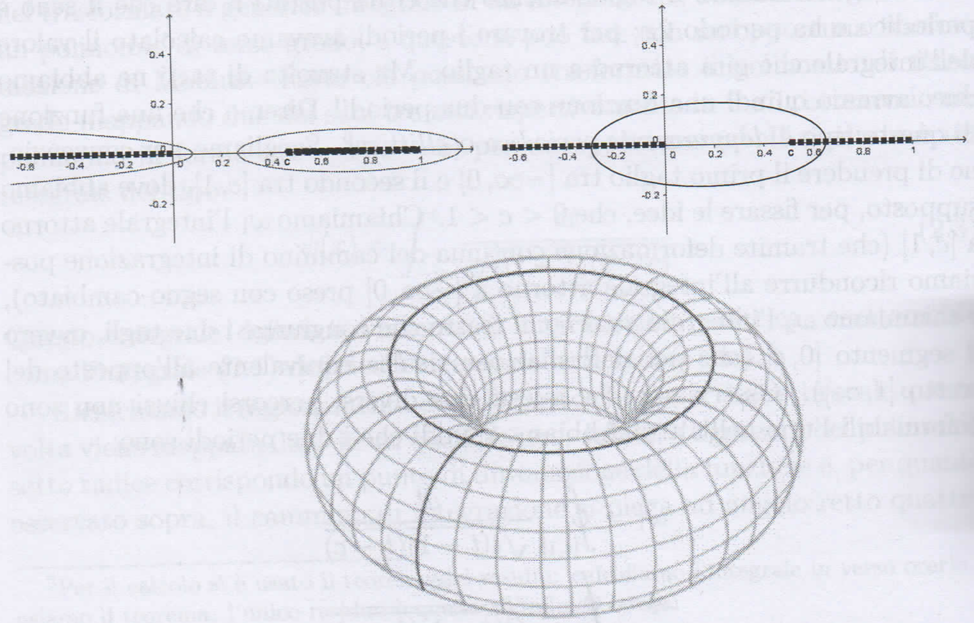


Figura 2.2: I due percorsi di integrazione

2.2 Teoria generale delle funzioni ellittiche

Abbiamo detto che una funzione ellittica è una funzione f doppiamente periodica, ovvero tale che

meromorphic

$$f(z) = f(z + m\omega_1 + n\omega_2)$$

Tesi E. Galvagni (relatore MS)

F. TRICOMI : Funzioni ellittiche

XXVII - add -

dove ω_1 e ω_2 sono i due periodi di f. Equivalentemente possiamo dire che f è ellittica quando

$$f(z) = f(z + \omega)$$

con $\omega \in \Lambda$. Osserviamo che ω_1 e ω_2 devono essere linearmente indipendenti, ovvero non devono essere allineati. Tale condizione si può esprimere dicendo che il rapporto $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ non può essere reale (questa condizione emergeva implicitamente nella costruzione della sezione precedente, quando abbiamo assunto che la funzione ψ mappava $\mathbb{C}$ in un quadrilatero).

$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$

Un primo fatto fondamentale è che le funzioni ellittiche formano una classe di funzioni "stabile": un *campo*. Infatti somme, differenze, prodotti e quozienti di funzioni ellittiche sono ancora funzioni ellittiche con gli stessi periodi. Inoltre la derivata di una funzione ellittica è a sua volta ellittica sempre con gli stessi periodi. Quest'ultimo fatto è facilmente verificabile per controllo diretto: sia f tale che $f(z) = f(z + m\omega_1 + n\omega_2)$ come da definizione. Derivando membro a membro rispetto a z otteniamo $f'(z) = f'(z + m\omega_1 + n\omega_2)$ e quindi vale ancora la periodicità.

Il teorema seguente mostra che una funzione doppiamente periodica deve essere per forza meromorfa, ovvero deve avere delle singolarità di tipo polo nel suo dominio.

Teorema 2.2. *Sia f una funzione doppiamente periodica e intera, ovvero analitica su tutto $\mathbb{C}$. Allora f è costante.*

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ whenever defined

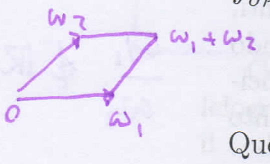
Dimostrazione. Se f fosse analitica nel suo dominio fondamentale $\mathcal{P}$ vorrebbe dire che in $\mathcal{P}$ può essere limitata dalla costante $M := \max|f(z)|_{z\in\Lambda}$. Ma essendo che f è una copia di se stessa ovunque in $\mathbb{C}$, allora f è limitata da M in $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville una funzione limitata e analitica deve essere costante, da cui la tesi. □

Una semplice conseguenza di questo teorema è il fatto che due funzioni ellittiche f, g con gli stessi poli e gli stessi zeri (ovviamente contando tutto con la dovuta molteplicità) sono la stessa funzione a meno di un fattore moltiplicativo costante. Infatti f/g è una funzione analitica e ancora ellittica, e deve allora essere costante. In realtà si può dire di più sul numero di poli minimo che una funzione ellittica deve avere per non ridursi a una costante:

Teorema 2.3. *Sia f una funzione doppiamente periodica e meromorfa. Allora f ha almeno due poli.*

XXVII - add - 2 — 2

Dimostrazione. Calcoliamo l'integrale lungo il bordo del dominio fondamentale $\mathcal{P}$:



$$\oint_{\partial\mathcal{P}} f(z)dz = \int_0^{\omega_1} f(x)dx + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} f(x)dx + \int_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_2} f(x)dx + \int_{\omega_2}^{0} f(x)dx$$
$$= \int_0^{\omega_1} f(x)dx + \int_0^{\omega_2} f(x-\omega_1)dx + \int_{\omega_1}^{0} f(x-\omega_2)dx + \int_{\omega_2}^{0} f(x)dx$$

Quest'integrale è nullo poiché a causa della periodicità di f le quattro parti in cui è stato suddiviso il cammino si elidono due a due. D'altra parte, per il teorema dei residui:

$$\oint_{\partial\mathcal{P}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in\mathcal{P}} Res\left[f(z)\right]_z = 0$$

Ne deduciamo quindi che la somma dei residui deve fare zero. Se ci fosse un solo polo semplice, il suo coefficiente nello sviluppo in serie di Laurent di f dovrebbe essere per forza diverso da zero, altrimenti la funzione sarebbe in realtà analitica. Ma d'altra parte ciò non è possibile perché per il teorema dei residui tale coefficiente è proprio zero. □

order of f:
\# poles in P

Chiamiamo *ordine* di una funzione ellittica il numero di poli che essa possiede in $\mathcal{P}$. Un'altra importante proprietà delle funzioni ellittiche è la seguente:

Teorema 2.4. *Una funzione ellittica f di ordine r assume un qualunque valore complesso $c \in \mathbb{C}$ esattamente r volte in ogni parallelogramma.*

Dimostrazione. Osserviamo che basta dimostrare la proprietà nel caso $c = 0$, dal momento che definendo $g(z) := f(z) - c$, si ha che g è ancora ellittica, e se $g(z) = 0$ allora $f(z) = c$. Detto ciò dimostriamo che se f ha r poli allora ha altrettanti zeri. Usiamo il teorema dell'indicatore logaritmico:

$$\boxed{\oint_{\partial\mathcal{P}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P}$$

dove Z e P indicano rispettivamente il numero di poli e il numero di zeri, e dimostriamo che tale integrale è nullo. Scomponendo l'integrale in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 2.3 si vede che per la periodicità di f'/f tale integrale è zero. □

XXVII - add - 2

Teorema 2.5. *Sia f una funzione ellittica di ordine r. Detti a_j e b_j ($j = 1, ..., n$) rispettivamente i poli e gli zeri di f, ripetuti con la dovuta molteplicità, vale la formula:*

$$\boxed{\sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{j=1}^{r} b_j = m\omega_1 + n\omega_2} \tag{2.4}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Usiamo la formula generalizzata dell'indicatore logaritmico usando come percorso di integrazione il bordo di $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\oint_{\partial\mathcal{P}} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{j=1}^{r} b_j \right).}$$

D'altra parte se calcoliamo l'integrale di circuito come somma degli integrali sui quattro segmenti otteniamo

$$\int_0^{\omega_1} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz + \int_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_2} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz + \int_{\omega_2}^{0} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz.$$

Facciamo ora il seguente cambio di variabile: poniamo $u = z - \omega_1$ nel secondo integrale e $u = z - \omega_2$ nel terzo integrale, così da ricondurre le due coppie di integrali ad avere gli stessi estremi. Sfruttando poi la periodicità di f otteniamo ulteriori semplificazioni, e alla fine ciò che resta è

$$-\omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{f'(u)}{f(u)} du - \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)} du = 2\pi i (m\omega_1 + n\omega_2)$$

per $m, n \in \mathbb{Z}$, dove nell'ultima uguaglianza è stato applicato il teorema dell'indicatore logaritmico. □

Una scrittura equivalente a (2.4) è la seguente:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{j=1}^{r} b_j \equiv 0 \pmod{\Lambda}.}$$

In pratica il teorema precedente afferma che sommando i numeri complessi $a_1, ..., a_r, -b_1, ..., -b_r$ il risultato è un punto che deve stare sul reticolo Λ, cioè un punto equivalente a 0 secondo la relazione di equivalenza che identifica tutti i parallelogrammi nel dominio fondamentale $\mathcal{P}$.

Premessi questi risultati di carattere generale sulle funzioni ellittiche studiamo ora una funzione speciale che fa da "prototipo" per tutte le funzioni di questo tipo.

XXVII - add - 2 - 4

2.3 La funzione di Weierstrass

Per il teorema 2.3 il numero minimo di poli che una funzione ellittica può avere nel suo dominio fondamentale è 2. Cerchiamo allora di costruire una funzione nel modo più semplice possibile che rispetti questo requisito. Prendiamo una funzione che abbia un polo doppio in tutti i punti di Λ. Fissato un reticolo Λ definiamo la seguente funzione:

$$\boxed{\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]} \tag{2.5}$$

dove con Λ^* indichiamo tutti i punti del reticolo eccetto l'origine.

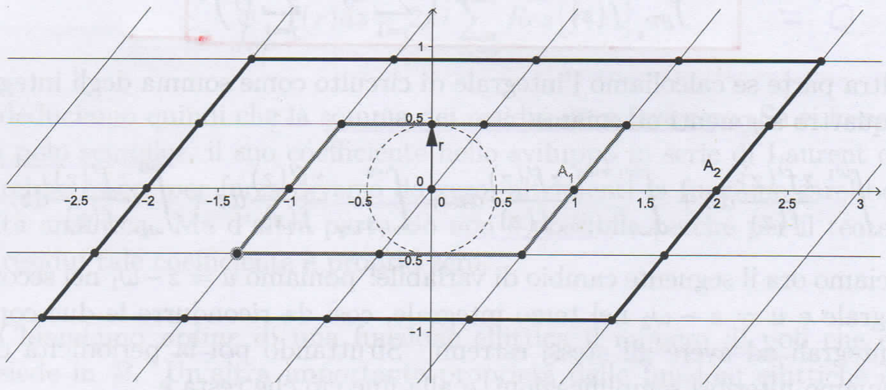


Figura 2.3: Anelli sul reticolo

Dimostriamo che la serie che definisce $\wp$ converge, e quindi la funzione è ben definita. La prima osservazione da fare è che nella (2.5) l'espressione tra parentesi quadre ha un ordine di convergenza di $\frac{1}{|\omega|^3}$, quindi è sufficiente dimostrare che la serie (doppia)

$$\sum_{\omega\in\Lambda*}\frac{1}{\omega^3}$$

è assolutamente convergente. Ciò può essere provato raggruppando i termini della serie per successivi "anelli" $\mathcal{A}_i$ attorno all'origine, e definendo la somma parziale S_i come la somma di tutti gli elementi che stanno sull' i-esimo anello, come raffigurato nell'illustrazione 2.3. Ragioniamo intanto sul primo anello $\mathcal{A}_1$; questo conterrà otto punti, che saranno tutti distanti dall'origine non meno di r, dove r è la minima distanza tra l'origine e l'anello stesso. Dunque $r \leq |\omega|, \forall\omega \in \mathcal{A}_1$.

XXVII - add - 2 - 5

Allora la serie parziale S_1 potrà essere maggiorata in questo modo:

$$S_1 = \sum_{\omega \in \mathcal{A}_1} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{r^3} = \frac{8}{r^3}.$$

Il secondo anello $\mathcal{A}_2$ conterrà sedici punti del reticolo, e quindi la seconda somma parziale sarà maggiorabile da

$$S_2 = \sum_{\omega \in \mathcal{A}_2} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{j=1}^{16} \frac{1}{(2r)^3} = \frac{16}{2^3 r^3}$$

e così via per le successive serie parziali. Ora per verificare la convergenza della serie (2.3) è sufficiente sommare tra loro tutte le maggiorazioni trovate:

$$\sum_{\omega \in \Lambda*} \frac{1}{\omega^3} = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots \leq \frac{8}{r^3} + \frac{16}{2^3 r^3} + \frac{24}{3^3 r^3} + \cdots$$

$$= \frac{8}{r^3} + \frac{8}{2^2 r^3} + \frac{8}{3^2 r^3} + \cdots = \frac{8}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che è una somma convergente. Quindi, per il teorema del confronto tra serie, anche la serie (2.3) risulta convergente.

Dimostrato ciò, è lecito derivare termine a termine ottenendo la seguente espressione:

$$\boxed{\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}.} \tag{2.6}$$

È importante ricordare che sia $\wp$ che $\wp'$ dipendono dal reticolo scelto, ovvero dai due periodi ω_1, ω_2. Cambiando reticolo si ottiene una diversa $\wp$.

Abbiamo detto che la funzione $\wp$ è una funzione "prototipo" per il campo delle funzioni ellittiche, e il motivo è il teorema seguente:

Teorema 2.6. *Il campo delle funzioni ellittiche relative al reticolo Λ è generato dalle funzioni $\wp, \wp'$. In particolare ogni funzione ellittica può essere espressa razionalmente con una formula del tipo*

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + R_2(\wp(z))\wp'(z)$$

dove R_1 e R_2 denotano funzioni razionali nei loro argomenti.

functions of rational type

Dimostrazione. Dimostriamo prima il caso in cui la funzione è pari. Se f è pari, cioè $f(z) = f(-z)$, allora di certo l'ordine della funzione è un numero pari $r = 2h$. Ciò significa che scelto un valore complesso $c \in \mathbb{C}$ esistono r

Show first that $\wp$ & $\wp'$ are periodic, see XVII-add2-8

XXVII - add 2 - 6

punti in $\mathcal{P}$ in cui la funzione assume il valore c. Questi r valori sono a coppie uno l'opposto dell'altro; ad esempio, detto z_0 uno di questi valori, si dovrà avere $f(z_0) = c = f(-z_0)$, e quindi anche $-z_0$ è un punto di $\mathcal{P}$ in cui la funzione assume il valore c.

Detto ciò consideriamo due valori complessi a e b. Chiamiamo

$$\pm u_1, \ldots, \pm u_h$$
$$\pm v_1, \ldots, \pm v_h$$

rispettivamente gli r punti in cui f assume il valore a e gli r punti in cui assume il valore b, ovvero

$$f(\pm u_i) = a, \quad f(\pm v_i) = b, \quad \forall i = 1, \ldots, h.$$

Questi $2r$ valori faranno da poli e da zeri della funzione che adesso andiamo a costruire, e cioè

$$\boxed{F(z) = \frac{(\wp(z) - u_1) \cdots (\wp(z) - u_h)}{(\wp(z) - v_1) \cdots (\wp(z) - v_h)}.}$$

Ma d'altra parte possiamo costruire la seguente funzione

$$G(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b}$$

che ha esattamente gli stessi poli e gli stessi zeri di F. Allora, per le proprietà delle funzioni ellittiche, F e G devono differire al più per un fattore costante k ovvero $G(z) = kF(z)$. Allora

$$\frac{f(z) - a}{f(z) - b} = kF(z)$$

che risolta rispetto a f fornisce

$$f(z) = \frac{a - bkF(z)}{1 - kF(z)}$$

Se ora sostituiamo al posto di F la sua espressione in funzione di $\wp$ otteniamo una funzione razionale del tipo $f(z) = R(\wp(z))$.

Se la funzione f è dispari allora chiaramente la funzione

$$\boxed{g(z) = \frac{f(z)}{\wp'(z)}}$$

XXVII-add 2 - 7

è pari e ricade quindi nel caso precedente. Possiamo quindi rappresentare g come

$$g(z) = \frac{f(z)}{\wp'(z)} = R(\wp(z)) \quad \Rightarrow \quad f(z) = R(\wp(z))\wp'(z).$$

Infine se f non è né pari né dispari, possiamo sempre scomporla in una somma di una funzione pari f_1 e una funzione dispari f_2, dove:

$$f_1(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{e} \quad f_2(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Vediamo ora alcune delle proprietà fondamentali di $\wp$ e della sua derivata $\wp'$, in modo da poter usare con scioltezza queste nuove funzioni. Innanzitutto è evidente che $\wp$ è una funzione pari ovvero

$$\wp(z) = \wp(-z).$$

$\wp' = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$

Inoltre $\wp$ è chiaramente meromorfa con poli doppi in tutti e soli i punti del reticolo Λ. È altresì evidente che $\wp'$ è dispari cioè

$$\wp'(-z) = -\wp(z)$$

e che ha poli tripli in tutti e soli i punti di Λ. Inoltre è chiaro dalla (2.6) che $\wp'$ è periodica: infatti se nella definizione sostituiamo z con $z + \omega$, $\omega \in \mathbb{C}$, otteniamo come unico risultato quello di cambiare l'ordine dei termini. Non è invece evidente che anche $\wp$ è periodica, dato che dalla (2.5) la cosa non traspare. Per dimostrarlo basta considerare la periodicità di $\wp'$ ovvero

$$\wp'(z) = \wp'(z + \omega_1) = \wp'(z + \omega_2)$$

e integrare queste due equazioni ottenendo

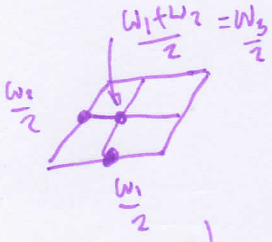
$$\wp(z) = \wp(z + \omega_1) + c_1$$
$$\wp(z) = \wp(z + \omega_2) + c_2.$$

Dimostriamo ora che $c_1 = 0 = c_2$; infatti siccome $\wp$ è pari se la valutiamo in $-\frac{\omega_1}{2}$ otteniamo

$$\wp(-\frac{\omega_1}{2}) = \wp(-\frac{\omega_1}{2} + \omega_1) + c_1$$

da cui $c_1 = 0$. Valutando poi $\wp$ in $-\frac{\omega_2}{2}$ otteniamo che anche $c_2 = 0$ e quindi pure $\wp$ è periodica.

XXVII - add 2 - 8



Zeros of $\wp'$

Sfruttando un ragionamento simile, ma usando la disparità di $\wp'$ possiamo trovarne gli zeri:

$$\wp'(\frac{\omega_1}{2}) = -\wp'(-\frac{\omega_1}{2}) = -\wp'(\omega_1 - \frac{\omega_1}{2}) = -\wp'(\frac{\omega_1}{2})$$

da cui $\wp'(\frac{\omega_1}{2}) = 0$. Allo stesso modo si trova che $\wp'(\frac{\omega_2}{2}) = 0$ e che $\wp'(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}) = 0$. Siccome $\wp'$ è di ordine 3 (ha infatti un polo triplo), non può avere altri zeri. Se chiamiamo per comodità $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ possiamo porre

$$e_1 := \wp(\frac{\omega_1}{2}), \quad e_2 := \wp(\frac{\omega_2}{2}), \quad e_3 := \wp(\frac{\omega_3}{2}).$$

Vediamo che $\frac{\omega_1}{2}$ è uno zero per la funzione $g_i(z) := \wp(z) - e_i$, e inoltre tale zero è doppio poiché annulla anche la derivata: infatti se deriviamo otteniamo $g_i'(z) = \wp'(z)$ che in $\frac{\omega_1}{2}$ fa ancora zero. Queste osservazioni saranno necessarie per dimostrare il prossimo teorema, ma prima completiamo l'analisi di $\wp$ cercando il suo sviluppo in serie di Laurent.

Isoliamo il termine polare e sviluppiamo la quantità nella sommatoria vedendola come risultato di una serie geometrica.

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{\omega^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^k \right]^2 - \frac{1}{\omega^2} \right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^k - \frac{1}{\omega^2} \right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^k \right] = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$c_k = \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{k+1}{\omega^{k+2}}$$

Usando la notazione

$$S_k = \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^k}$$

possiamo scrivere lo sviluppo esplicitamente:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3S_4 z^2 + 5S_6 z^4 + \cdots$$

XXVII-add2-9

Differenziando termine a termine otteniamo invece:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6S_4 z + 20S_6 z^3 + \cdots$$

Possiamo ora dimostrare con facilità il seguente teorema, che è di importanza fondamentale nella teoria delle funzioni ellittiche ed è la chiave di collegamento con la teoria delle cubiche affrontata nel primo capitolo.

Teorema 2.7. *Le funzioni $\wp$ e $\wp'$ soddisfano alla seguente equazione differenziale*

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \tag{2.7}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che due funzioni ellittiche con gli stessi poli e gli stessi zeri differiscono solo a meno di un fattore moltiplicativo. Il membro di sinistra ha un polo del sest'ordine in 0 poiché $\wp'$ ha un polo di ordine 3; ha inoltre zeri doppi in $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2}$ in quanto $\wp'$ ha zeri semplici in questi stessi punti. D'altra parte a destra abbiamo un polo di ordine sei in 0 dovuto al prodotto di tre poli doppi di $\wp$, e tre zeri doppi sempre in $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2}$ per quanto osservato precedentemente. Allora membro destro e membro sinistro sono la stessa funzione, a meno di un fattore moltiplicativo costante. Per dimostrare che questo fattore è unitario basta confrontare la parte polare dello sviluppo di Laurent di $\wp$ e $\wp'$ nell'origine: per il membro di sinistra e il membro di destra abbiamo rispettivamente

$$\left(-\frac{2}{z^3}\right)^2 \quad \text{e} \quad 4\left(\frac{1}{z^2}\right)^3$$

e questo prova il teorema. □

A questo punto è interessante notare un'ultima analogia tra funzioni semplicemente periodiche e funzioni ellittiche. Torniamo per un momento all'integrale (2.1): supponiamo di non sapere che questo integrale è la funzione arcsin e di volerlo risolvere esplicitamente. Procediamo così: se chiamiamo $s = \varphi(t)$ l'integrale indefinito, allora

$$\int ds = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

che passando ai reciproci e ponendo $t = \varphi^{-1}(s) =: S(s)$ diventa

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow [S'(s)]^2 = 1 - [S(s)]^2 \Rightarrow [S'(s)]^2 + [S(s)]^2 = 1$$

che ha evidentemente soluzione $S(s) = \varphi^{-1}(s) = \sin s$, ovvero $s = \varphi(t) = \arcsin(t)$ come volevamo dimostrare.

XXVII - aold2 - 10

Abbiamo quindi ricondotto il problema di integrazione a un'equazione differenziale[7] e siccome la funzione seno risolve tale equazione, ne abbiamo dedotto che la sua inversa è uguale all'integrale da calcolare.

*** inversion problem

Applichiamo un procedimento simile al problema dell'integrale ellittico, cioè trovare una funzione la cui inversa sia proprio l'integrale indefinito in questione. Troveremo che tale funzione è proprio $\wp$. Poniamo stavolta $s = \psi(t)$ e ripetiamo i conti otteniamo

$$\int ds = \int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-c)}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t(t-1)(t-c)}}$$

e ponendo $t = \varphi^{-1}(s) =: P(s)$:

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{t(t-1)(t-c)} \Rightarrow [P'(s)]^2 = P(s)(P(s)-1)(P(s)-c).$$

Abbiamo così trovato che la funzione P che inverte ψ deve soddisfare l'equazione differenziale scritta sopra, ovvero è proprio la funzione ellittica di Weierstrass. Questo risolve il problema che ci eravamo posti in partenza: risolvere l'integrale ellittico (sempre a patto di saperlo ricondurre in una forma canonica del tipo (2.3)).

$\psi = \int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-c)}}$

Avendo a disposizione l'intero sviluppo in serie della funzione di Weierstrass, possiamo anche ottenere in un altro modo l'equazione differenziale. Il confronto tra le due scritture fornirà identità interessanti.

Procediamo in modo costruttivo: eleviamo al quadrato lo sviluppo di $\wp'(z)$ e eleviamo al cubo lo sviluppo di $\wp$, e consideriamo i termini in cui z ha esponente negativo o nullo[8]. Fatto ciò aggiungeremo termini correttivi per fare sì che le parti polari e costanti risultino le stesse a destra e a sinistra. Partendo dagli sviluppi di Laurent si ricava facilmente che

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24}{z^2}S_4 - 80S_6 - \cdots$$

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9}{z^2}S_4 + 15S_6 + \cdots$$

Di certo dobbiamo moltiplicare per 4 la seconda espressione, in modo da far corrispondere negli sviluppi i coefficienti di z^{-6}. Fatto ciò, se sottraiamo la

[7]Un po' il contrario di quel che si fa per risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili, in cui si parte dall'equazione e la si integra dopo aver separato le variabili.

[8]Infatti per quanto dimostrato sarà sufficiente un confronto tra questi soli termini. I rimanenti risulteranno coincidere per le proprietà intriseche delle funzioni ellittiche.

XXVII - add 2 - 11

prima alla seconda, rimangono i seguenti termini:

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 &= -\frac{24}{z^2}S_4 - 80S_6 - \frac{36}{z^2}S_4 - 60S_6 + A(z)\\ &= -\frac{60}{z^2}S_4 - 140S_6 + A(z)\end{aligned}$$

dove con $A(z)$ abbiamo indicato la parte analitica della funzione, ovvero tutta la parte di sviluppo contenente termini a esponente positivo. Per fare in modo di elidere anche gli ultimi termini a esponente negativo o nullo superstiti sottraiamo un multiplo di $\wp$; più precisamente:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - 60S_4\wp(z) = -140S_6 + A(z).$$

Infine togliamo il termine costante $140S_6$ e otteniamo l'equazione differenziale voluta, che, se conveniamo di porre

$$\boxed{g_2 := 60S_4 = 60\sum_{\omega\in\Lambda^*}\frac{1}{\omega^4} \qquad g_3 := 140S_6 = 140\sum_{\omega\in\Lambda^*}\frac{1}{\omega^6},}$$

si presenta nella forma

$$\boxed{\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3} \tag{2.8}$$

A questo punto possiamo confrontare le due versioni. In particolare se nella (2.7) moltiplichiamo le tre parentesi, a destra otteniamo

$$4\wp^3(z) - 4(e_1+e_2+e_3)\wp^2(z) + 4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)\wp(z) - 4e_1e_2e_3$$

e per confronto con la (2.8) otteniamo le seguenti identità

$$\boxed{\begin{cases} e_1+e_2+e_3 = 0\\ 4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1) = -g_2\\ 4e_1e_2e_3 = g_3.\end{cases}} \tag{2.9}$$

La conseguenza fondamentale del legame differenziale tra $\wp$ e $\wp'$ appena dimostrato è che una cubica del tipo canonico (1.1) può essere parametrizzata dalle funzioni $\wp$ e $\wp'$ attraverso una funzione $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}^2$

$\mathcal{C}$: $y^2 = x(x-1)(x-c)$

$$z \mapsto (x,y) = (\wp(z), \wp'(z)) \tag{2.10}$$

che associa a ogni punto del toro il punto del piano euclideo avente le coordinate (x,y) definite come sopra. In realtà perché la parametrizzazione sussista deve risultare che la cubica

$$\boxed{y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

XXVII - add 2-12

sia non singolare. Questo fatto è vero in quanto le tre radici e_1, e_2, e_3 sono sempre distinte. Supponiamo per assurdo che non sia così, per esempio supponiamo $e_1 = e_2$. Allora avremmo che la funzione $g(z) = \wp(z) - e_1$ ha uno zero in $\frac{\omega_1}{2}$ e uno zero in $\frac{\omega_2}{2}$. Però se deriviamo g scopriamo che gli zeri di g sono zeri anche per g', e quindi zeri doppi. Allora abbiamo trovato una funzione di ordine 2 che però ha in totale 4 zeri, il ché è assurdo.

Ricapitolando: a ogni punto z di un toro $\mathbb{C}/\Lambda$ risulta associata una coppia di valori $(\wp(z), \wp'(z)) \in \mathbb{C}^2$ ovvero una coppia di numeri complessi. Tali numeri individuano un punto di una cubica $\mathcal{C}$ a punti complessi, avente equazione (1.1) e le coppie che risultano essere reali sono rappresentabili in un grafico in $\mathbb{R}^2$.

Per essere precisi, non tutti i punti di $\mathbb{C}/\Lambda$ sono associati a un punto di $\mathcal{C}$: manca infatti il polo in "O", dal momento che $\wp(0) = \infty$. Per definire una migliore parametrizzazione diciamo che l'origine resta associata al punto all'infinito della cubica, vista dunque non come sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ ma come sottoinsieme del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La parametrizzazione definitiva risulta allora essere

$$\boxed{z \mapsto \begin{cases} [1, \wp(z), \wp'(z)] & \text{se } z \neq 0 \\ Y_\infty = [0,0,1] & \text{se } z = 0 \end{cases}} \tag{2.11}$$

Ora che, grazie all'equazione differenziale (2.7), abbiamo fatto luce sulla strada che connette la teoria delle cubiche non singolari con la teoria delle funzioni ellittiche cerchiamo per via analitica quegli aspetti geometrici che abbiamo incontrato nel primo capitolo.

2.4 Il teorema di addizione

Proprio come esistono formule di addizione, duplicazione, ecc per seno e coseno, esistono formule analoghe anche per la funzione $\wp$. In questa sezione vediamo come ricavare esplicitamente la formula di addizione, e vedremo che si otterrà la stessa formula trovata per via geometrica.

Scegliamo due numeri complessi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$ con $z_1 \neq z_2$. A ognuno di questi numeri complessi z_i corrisponde un punto P_i della cubica $\mathcal{C}$ tramite la parametrizzazione (2.10). Troviamo ora la retta passante per P_1, P_2. Per farlo scriviamo la generica equazione di una retta in $\mathbb{R}^2$

$$y = ax + b$$

e imponiamo il passaggio per P_1, P_2, ottenendo

$$\begin{cases} \wp'(z_1) = a\wp(z_1) + b \\ \wp'(z_2) = a\wp(z_2) + b. \end{cases} \tag{2.12}$$

XXVII - add2 - 13