Prof. M. Spera
UCSC

Theorem Let $\rho \in \Lambda^2(S)$, S a closed RS (compact, no boundary)

Then one can solve the

Poisson equation $\boxed{\Delta f = \rho}$ for $f \in \Lambda^2(S)$ unique up to a constant (abuse of language)

if and only if $\boxed{\int_S \rho = 0}$

equivalently: given $\rho \in \Lambda^0(S)$ then $\Delta f = \rho$ can be uniquely solved (up to a constant) if and only if $\int_S \rho \, vol = 0$

"area form"

Lecture XXXI

Proof (via Hodge theory, actually elliptic operator theory)

The equation $\Delta f = \rho \quad (*)$ is equivalent

$$d(\delta f) + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\delta(df)} = \rho$$

$(df \in \Lambda^3(S) = \{0\})$

and hence to $d(\delta f) = \rho$

and this equation can be solved provided

ρ is exact, that is $\int_S \rho = 0$ (de Rham)

Let f_1 and f_2 be two solutions of $(*)$

Then $f = f_1 - f_2$ satisfies $\boxed{\Delta f = 0}$

$\Rightarrow$ f is constant $(H^0 \cong \mathcal{H}^0 \cong \mathbb{R})$

upon identifying $f \cdot vol$ with f via Hodge : $*1 = vol$

Theorem Let X be a connected, simply connected, non-compact RS. Then $X \cong$ $\mathbb{C}$ complex plane
$\mathbb{H}$ upper-half plane $\approx \mathbb{D}$

equivalent ≡ biholomorphic

Uniformization Theorem (Poincaré - Koebe)

<u>Preliminaries</u>

If $\phi : X \to \mathbb{R}$ (X non-compact top. space)

we say that "$\phi \to c$ at ∞" ($c \in \mathbb{R}$)

if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon \subset X$, K_ε compact, such that $|\phi(x) - c| < \varepsilon$ for $x \in X \setminus K_\varepsilon$

We say that "$\phi \to +\infty$ at ∞" if, $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists K_A \subset X$, K_A compact, with $\phi(x) > A$ $\forall x \in X \setminus K_A$

Similarly, "$\phi \to -\infty$" if $-\phi \to +\infty$

<u>Basic tool</u> (⊛)

Let X be a connected, simply connected, non-compact RS. Let ρ be a real 2-form on X, compactly supported, such that $\int_X \rho = 0$

Then there exists ϕ on X with $\Delta\phi = \rho$ and such that $\phi \to 0$ at ∞ in X

$\rho \equiv \rho \, d\sigma$ (abuse of notation)
area: $d\sigma$

→ In other words, one can solve the **Poisson equation on X**

Also, the solution is unique:
$\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \rho \Rightarrow \Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ $\quad \phi := \phi_1 - \phi_2$ is harmonic & with compact support $\Rightarrow \phi \equiv 0$

XXXI-2

Let us assume the above result

Take $p \in X$ and a local coordinate z around p.

Set $A = \bar\partial\left(\frac{\beta}{z}\right)$ (β cut-off function)

β

$A \in \Omega^{0,1}$, supported in an annulus around p

for $z \neq 0$
$$\bar\partial\left(\frac{\beta}{z}\right) = \frac{1}{z}\bar\partial\beta + \beta\underbrace{\bar\partial\frac{1}{z}}_{=0} = \underbrace{\frac{1}{z}\bar\partial\beta}_{\substack{=0\\ \text{near } p}}$$

Set $\rho = \partial A = \partial\bar\partial\left(\frac{\beta}{z}\right) = d\left(\bar\partial\left(\frac{\beta}{z}\right)\right)$ $\quad \left(d = \partial + \bar\partial, \ \bar\partial^2 = 0\right)$

$$\int_X \rho = \int_X d\left(\bar\partial\frac{\beta}{z}\right) = 0 \quad (\text{Stokes} : \partial X = 0)$$

Applying the result (*) to ρ (actually, to its real & imaginary parts), we get a function g such that
$$\partial\bar\partial g = \rho$$
(with $\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g \to 0$ at infinity)

Let $\quad a = (A - \bar\partial g) + (\bar A - \overline{\bar\partial g})$ (a real 1-form)

Then $\partial(A - \bar\partial g) = \partial A - \partial\bar\partial g = \rho - \rho = 0$

Thus
$$da = d(A - \bar\partial g) + d(\bar A - \overline{\bar\partial g}) = \bar\partial(A - \bar\partial g) + \partial(\bar A - \overline{\bar\partial g})$$
$$= \bar\partial A + \partial\bar A = \underbrace{\bar\partial\left(\bar\partial\left(\tfrac{\beta}{z}\right)\right)}_{=0} + \underbrace{\partial\left(\overline{\bar\partial\left(\tfrac{\beta}{z}\right)}\right)}_{=0} = 0, \text{ i.e.}$$

$da = 0$ (a closed)

XXXI-3

2

Therefore, in view of $H^1(X) = 0$, $\quad a = d\psi$ * real-valued

$$a = d\psi = A - \bar{\partial} g + (\bar{A} - \bar{\bar{\partial} g})$$

$$\| $$

$$\partial\psi + \bar{\partial}\psi \qquad \Rightarrow \qquad A = \bar{\partial} g + \bar{\partial}\psi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{\partial}\left[\frac{B}{z} - (g+\psi)\right] = 0} \qquad \text{on } X \setminus \{p\}$$

Thus $\quad f := g + \psi$

is meromorphic on X, with a simple pole at p, and $\operatorname{Im} f \to 0$ at infinity ($\operatorname{Im} f \to 0$ outside a disc $D \ni p$)

we wish to show that f maps X injectively onto an open set $U \subset S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ (Riemann sphere),

$U \supset \underset{\substack{\text{open}\\\text{upper}\\\text{half-plane}}}{H_+} \cup \underset{\substack{\text{open}\\\text{lower}\\\text{half-plane}}}{H_-} \cup \{\infty\}$, namely $U = S^2 \setminus I$

$I \subset \mathbb{R}$ compact.

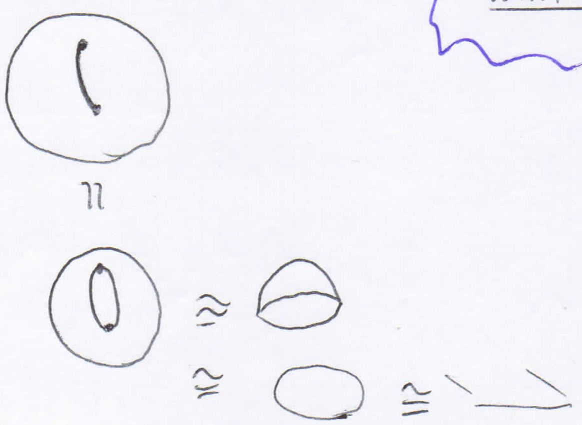
Now $I = [a,b]$, $a < b$ or $I = \{pt\} \subset \mathbb{R}$

(a single closed interval) since U is simply connected

get a biholomorphism with $\mathbb{H}$

get a biholomorphism with $\mathbb{C}$

PUNCH LINE



XXXI-4

3

Let us prove injectivity of $f : X \to U$

$f : X \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is holomorphic

$H_\pm$ = upper / lower half-planes in $\mathbb{C}$ $\quad X_\pm := f^{-1}(H_\pm)$

both open in X

$X_+ \cup X_-$ is dense in X, being f an open map.

So we have restrictions $f_\pm : X_\pm \to H_\pm$ (holomorphic)

Claim $\quad f_\pm$ are proper. Let $B \subset H_+$ compact.

$\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. $\mathrm{Im}\, z > \varepsilon \quad \forall z \in B$

But, since $\mathrm{Im}\, f \to 0$ at infinity,
this entails $f^{-1}(B) \subset X$ compact, that is $f_+^{-1}(B) \subset X_+$

f yields a local homeomorphism from a neighbourhood of p to a neighbourhood of ∞ in S^2; in particular $X_\pm \neq \emptyset$. Thus $f_\pm$ have degrees $d_\pm \geq 1$. We claim that $\boxed{d_\pm = 1}$. Let $K \subset X$ compact such that $(\mathrm{Im}\, f)(x) < 1$ for $x \notin K$. Let $d_+ \geq 2$.

Then $\forall\, n \geq 1$, $\exists\, x_n, \tilde{x}_n$ with $f(x_n) = f(\tilde{x}_n) = in$ and $x_n, \tilde{x}_n$ are either distinct or $x_n = \tilde{x}_n$ and $f'(x_n) = 0$

$x_n, \tilde{x}_n \subset K$ so there exists a subsequence $\{n'\}$ s. that

$$x_{n'} \to x, \quad \tilde{x}_{n'} \to \tilde{x}. \quad \text{But } in \to \infty \implies$$

$f(x) = f(\tilde{x}) = \infty$ and, having f just one pole, we get $x = \tilde{x} = p$. But this is a contradiction to injectivity near p

So $f : X_\pm \to H_\pm$ yields bijections.

Indeed, $f : X \to S^2$ is an injection:

XXXI-4

Let $x_1 \neq x_2$ with $f(x_1) = f(x_2) = z \in S^2$.

$$\underset{D_1}{\odot_{x_1}} \quad \underset{D_2}{\odot_{x_2}} \xrightarrow{f} \underset{N}{\odot_{z}}$$

we find D_i, disjoint discs and $N \ni z$ such that

$f(D_i) \supset N$

Choose $z' \in N \cap H_+$: then $\exists$ $x_1' \neq x_2'$ in D_1, D_2 mapping to z', contradicting injectivity of f on $X_\pm$.

So $f : X \to \underset{\text{open}}{U} \supset H_+ \cup H_- \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow$ $U = S^2 \setminus I$ compact in $\mathbb{R}$ as requested. $\square$

Σ : compact connected Riemann surface

- Σ simply connected $\pi_1(\Sigma) = 1$

  $\Sigma \sim S^2$ $\star$ metric with curvature $= +1$

- $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}^2$ $\quad$ Σ torus $\quad$ $\Sigma = \mathbb{C}/\Lambda$ $\quad$ universal cover $\quad$ $\Lambda \simeq \pi_1(\Sigma)$ $\quad$ lattice

  $+$ with a flat metric curv $= 0$

  coming into moduli: equiv. classes as RS $\quad$ j invariant

- $\pi_1(\Sigma) =$

  $\langle \underbrace{a_1 \ldots a_g\ b_1 \ldots b_g}_{\text{generators}} \mid \underbrace{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}}_{\text{relator}} \rangle$

  $(\diamond = 1)$

  $\Sigma = \mathbb{H}/F$ $\quad$ $F \simeq \pi_1(\Sigma)$ $\quad$ Fuchsian group $\star$

  $\star$ metric with curv $= -1$ $\quad$ possessing moduli

XXXI-5

6 IL TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE DI RIEMANN

Riprendiamo ora il discorso fatto alla fine del quarto capitolo e l'interpretazione di superficie di Riemann come varietà. Abbiamo visto che si può fornire un rivestimento universale $\mathcal{K}$ di una verietà complessa tramite la naturale struttura complessa ed esso sarà inoltre semplicemente connesso.
Riprendendo il celebre lavoro di Klein (1882), Poincaré (1907) e Koebe (1909-1914) vediamo quali possibilità si presentano:

- o $\mathcal{K}$ è equivalente alla sfera $\mathbb{P}^1$,
- o $\mathcal{K}$ è equivalente al piano $\mathbb{C}$,
- oppure $\mathcal{K}$ è equivalente al disco $D : |x| < 1$.

$S^2 \approx \mathbb{P}^1 \not\approx \mathbb{C}$ not even topologically equivalent

$D \not\approx S^2$
non compact, compact

D & $\mathbb{C}$ are topologically equivalent, however they cannot be related by a biholomorphism: $f : \mathbb{C} \to D$ would be entire & bounded, hence constant by Liouville

L'enunciato appena visto include il precedente *Teorema della mappa di Riemann* (1851):

Teorema 12 (della mappa di Riemann). *Una regione semplicemente connessa di sfera tolti due o più punti è conformemente equivalente ad un disco.*

La dimostrazione del teorema generale non è affatto semplice, Poincaré stesso non trovò una dimostrazione pienamente convincente.

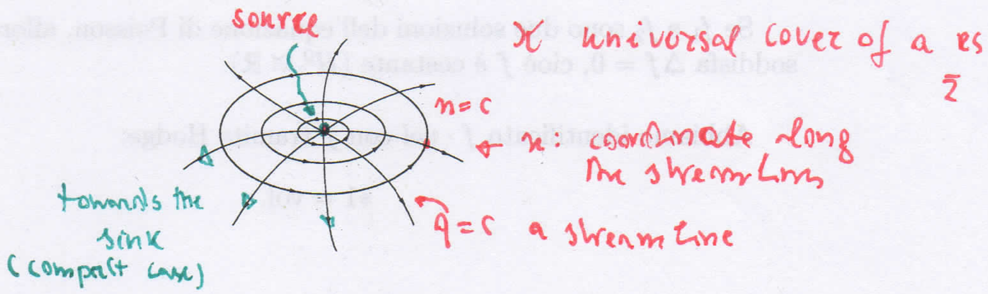
Back to Klein

Riprendiamo ora l'approccio più informale di Klein e la sua idea "idrodinamica" presentata nella lezione del 1893.
Prendiamo U in $\mathcal{K}$ dotato dei parametri locali $z(p) = x(p) + iy(p)$.
Il flusso irrotazionale di un fluido incomprimibile è dato dal campo di velocità $\vec{v}(p) = (v_1, v_2)$ t.c. $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ (per l'incomprimibilità) e $\mathrm{rot}\vec{v} = 0$ (essendo irrotazionale). Inoltre quest'ultima condizione implica anche l'esistenza di una funzione potenziale u t.c. $\vec{v} = \mathrm{grad}\, u$ e chiaramente u è una funzione armonica per le proprietà già viste.
Come avevamo detto nei precedenti capitoli, anche cambiando coordinate locali le linee di flusso rimangono invariate, ciò che cambia è solamente il campo di velocità. Tale ambiguità per la velocità è però inevitabile: $\mathcal{K}$ ha solamente una struttura conforme, perciò non esistono parametri locali "preferibili" per ciascun U.

XXXI - 6

L'idea di Klein è che $\mathcal{K}$ sia generato dalle linee di corrente di un fluido incomprimibile e irrotazionale prodotto da una singola sorgente in un punto o; chiaramente se $\mathcal{K}$ è compatto, sarà necessario un pozzo complementare nel punto o' dove il flusso sparisce.
La sorgente viene data tramite la funzione potenziale $u = \log|z(p)|$, con coordinata locale $z(p)$ che tende a zero per $p = o$. Bisogna però fare attenzione: se il parametro locale è scelto male, non è possibile estendere il flusso sull'intero $\mathcal{K}$ senza avere singolarità vicino al pozzo (nel caso compatto).
La parte difficile sta proprio nel provare l'esistenza di una funzione globale u con $\Delta u = 0$, quindi armonica nei punti ordinari di $\mathcal{K}$, con singolarità $\log|z(p)|$ alla sorgente e, nel caso compatto, una seconda singolarità $-\log|z'(p)|$ nel pozzo, con $z'(p)$ coordinata locale in quel punto.

Viene così definito un flusso sull'intero $\mathcal{K}$ con velocità $\vec{v} = (v_1, v_2) = \operatorname{grad} u$. Il flusso coniugato avrà velocità $(v_2, -v_1)$ e sarà ruotato di un angolo retto; esso ha una funzione potenziale associata q, determinata a meno di una costante additiva.
Si può vedere il nuovo parametro $z(p) = \exp[u(p) + iq(p)]$ come una funzione univoca su $\mathcal{K}$ con uno zero semplice nella sorgente e un polo semplice nel pozzo. Questa funzione è biunivoca: u funge da coordinata lungo le linee di corrente, q ci dice su quale linea di corrente sia.



Infine, distinguiamo tre casi in base al fatto che $\mathcal{K}$ sia compatto oppure no, e, nel caso non compatto, a seconda che u sia o non sia limitato:

- $\mathcal{K}$ è compatto. Allora esso è topologicamente equivalente ad una sfera e $z : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è un'equivalenza conforme tra $\mathcal{K}$ e la retta proiettiva. S^2
- $\mathcal{K}$ è non compatto e u è illimitato. Allora $z : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un'equivalenza conforme tra $\mathcal{K}$ e l'intero piano complesso. $\mathbb{C}$
- $\mathcal{K}$ è non compatto e u tende al numero finito $u(\infty)$. Allora z mappa $\mathcal{K}$ in un disco di raggio $r = \exp[u(\infty)]$. Questo è il caso della mappa di Riemann. $\mathbb{H} = D$

XXXI-7

Dopo aver ripreso le idee di Klein, cambiamo completamente approccio e dimostriamo nel modo più "standard" e analitico il teorema centrale di quest'ultimo capitolo, il *Teorema di uniformizzazione di Riemann*, seguendo l'approccio del Donaldson [2004]. Prima però dimostriamo un'importante formula che ci sarà utile in seguito.

Teorema 13 (Equazione di Poisson). *Sia $\rho \in \Lambda^2(X)$, con X superficie di Riemann chiusa, compatta e senza bordo. Data $f \in \Lambda^2(X)$ (unica a meno di una costante), si può risolvere l'equazione di Poisson $\Delta f = \rho$ se e solo se $\int_X \rho = 0$.*

Dimostrazione (tramite la teoria di Hodge).

L'equazione $\Delta f = \rho$ è equivalente a:

$$d(\delta f) + \delta(df) = \rho.$$

Poichè $df \in \Lambda^3(X) = \{0\}$, l'equazione precedente diventa

$$d(\delta f) = \rho$$

che può essere risolta a patto che ρ sia esatta, ovvero, per de Rham:

$$\int_X \rho = 0.$$

Se f_1 e f_2 sono due soluzioni dell'equazione di Poisson, allora $f = f_1 - f_2$ soddisfa $\Delta f = 0$, cioè f è costante ($H^0 \cong \mathbb{R}$).

Abbiamo identificato $f \cdot vol$ con f tramite Hodge:

$$*1 = \text{vol}.$$

□

Teorema 14 (Teorema di uniformizzazione).

Sia X una superficie di Riemann semplicemente connessa e non compatta. Allora X è equivalente o al piano complesso $\mathbb{C}$ o al semipiano superiore H.

Dimostrazione. Prima di iniziare la dimostrazione, diamo qualche definizione preliminare:

Definizione 15. *Data $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (con X spazio topologico non compatto), diciamo che "Φ tende a c all'infinito in X" ($c \in \mathbb{R}$), se $\forall \epsilon > 0$, $\exists K_\epsilon \subset X$, sottoinsieme compatto t.c.*

$$|\Phi(x) - c| < \epsilon \qquad \forall x \notin K_\epsilon.$$

XXXI-8

Diciamo che "Φ tende a $+\infty$ all'infinito in X "se $\forall A \in \mathbb{R}, \exists K_A \subset X$ t.c.

$$\Phi(x) > A \qquad \forall x \notin K_A$$

e similmente "Φ tende a $-\infty$"se $-\Phi$ tende a $+\infty$.

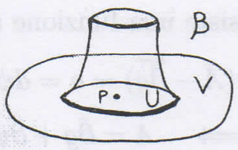
Teorema 15. *Sia X una superficie di Riemann semplicemente connessa e non compatta. Sia ρ una 2-forma reale a supporto compatto su X con $\int_X \rho =$ 0.*
Allora esiste una funzione Φ su X con $\Delta\Phi = \rho$ e tale che Φ tende a 0 all'infinito in X.

In altre parole si può risolvere l'equazione di Poisson su X.
Inoltre, la soluzione è unica:

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = \rho \quad \Longrightarrow \quad \Delta(\Phi_1 - \Phi_2) = 0,$$

posta $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$ questa è armonica e a supporto compatto, i.e. $\Phi \equiv 0$.
Assumiamo che quest'ultimo teorema sia valido, pur senza dimostrarlo.

Ora prendiamo un punto $p \in X$ e una coordinata locale complessa z vicino a p. Presa una funzione cut-off β, ovvero una funzione liscia $\beta \equiv 1$ in un intorno U di p e che si annulli al di fuori di U, per esempio nell'intorno $V \supset U$ mostrato in figura.



Sia $A = \bar{\partial}\left(\dfrac{\beta}{z}\right)$; allora $A \in \Omega^{0,1}$ a supporto in un anello attorno a p, infatti per $z \neq 0$ abbiamo:

$$\bar{\partial}(\frac{\beta}{z}) = \frac{1}{z}\bar{\partial}\beta + \beta\bar{\partial}\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\bar{\partial}\beta = 0$$

in quanto $\bar{\partial}\dfrac{1}{z} = 0$ e $\bar{\partial}\beta = 0$ vicino a p.

Poniamo $\rho = \partial A$, allora si ha:

$$\rho = \partial A = \partial\bar{\partial}\left(\frac{\beta}{z}\right) = d\left(\bar{\partial}\left(\frac{\beta}{z}\right)\right) \qquad (d = \partial + \bar{\partial},\, \bar{\partial}^2 = 0)$$

XXXI-9

e quindi per Stokes:

$$\int_X \rho = \int_X d\left(\bar{\partial}\frac{\beta}{z}\right) = 0.$$

Abbiamo quindi trovato che ρ è una 2-forma a valori complessi con integrale nullo, a cui possiamo applicare il Teorema 14 (rispettivamente alla parte reale e alla parte immaginaria di ρ). Si trova così una funzione g t.c.

$$\partial\bar{\partial}g = \rho$$

e le cui parti reale e immaginaria tendono a 0 all'infinito in X.

Ora consideriamo la 1-forma reale

$$a = (A - \bar{\partial}g) + (\bar{A} - \overline{\bar{\partial}g}).$$

Si ha che:

$$\partial(A - \bar{\partial}g) = \partial A - \partial\bar{\partial}g = \rho - \rho = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad da &= d(A - \bar{\partial}g) + d(\bar{A} - \overline{\bar{\partial}g}) = \bar{\partial}(A - \bar{\partial}g) + \partial(\bar{A} - \overline{\bar{\partial}g}) \\ &= \bar{\partial}A + \partial\bar{A} = \bar{\partial}\left(\bar{\partial}\left(\frac{\beta}{z}\right)\right) + \partial\left(\partial\left(\frac{\beta}{z}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

ovvero a è chiusa.
Perciò, poichè $H^1(X) = 0$, esiste una funzione a valori reali ψ t.c. $a = d\psi$.

$$\begin{aligned} (A - \bar{\partial}g) + (\bar{A} - \overline{\bar{\partial}g}) &= a = d\psi = \partial\psi + \bar{\partial}\psi \\ \Longrightarrow \quad A &= \bar{\partial}g + \bar{\partial}\psi \\ \Longrightarrow \quad \bar{\partial}\left[\frac{\beta}{z} - (g + \psi)\right] &= 0 \qquad \text{su } X \setminus \{P\}. \end{aligned}$$

Quindi $f := g + \psi$ è una funzione meromorfa su X, con un polo semplice in p e parte immaginaria che tende a 0 all'infinito in X (più precisamente $\mathrm{Im}f \to 0$ fuori da un disco aperto $D \ni p$).

Ora il nostro obiettivo è di mostrare che f mappa iniettivamente X in un insieme aperto $U \subset S^2 \cong \mathbb{CP}^1$ (sfera di Riemann), contenente $H_+ \cup H_- \cup \{\infty\}$, dove $H_\pm$ sono i semipiani aperti superiore ed inferiore in $\mathbb{C}$, ossia

$$U = S^2 \setminus I$$

per qualche sottoinsieme compatto I di $\mathbb{R}$. Perciò f fornisce un'equivalenza tra X e un suo sottoinsieme U; in particolare si presentano due casi:

XXXI-10

- se I è un intervallo chiuso $[a, b]$, con $a < b$, si ottiene un biolomorfismo tra $U = S^2 \setminus [a, b]$ e il semipiano superiore H
- se I è un singolo punto in $\mathbb{R}$, si ottiene un biolomorfismo col piano complesso $\mathbb{C}$

e ciò completerebbe la dimostrazione del *Teorema di uniformizzazione.*

Iniziamo col dimostrare l'iniettività di $f : X \to U$.
La funzione meromorfa f è una mappa olomorfa da X alla sfera di Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Ora definiamo

$$X_\pm := f^{-1}(H_\pm).$$

Questi $X_\pm$ sono sottoinsiemi aperti di X e inoltre $X_+ \cup X_-$ è denso in X, dal momento che f è una mappa aperta.
Possiamo allora restringere f e ottenere le mappe olomorfe

$$f_\pm : \quad X_\pm \to H_\pm.$$

Richiediamo che f_+ ed f_- siano mappe proprie.
Sia $B \subset H_+$ un sottoinsieme compatto, $\exists \epsilon > 0$ t.c. $\mathrm{Im} z > \epsilon \quad \forall z \in B$. Ma, poichè $\mathrm{Im} f$ tende a 0 all'infinito, questo implica che $f^{-1}(B)$ sia un sottoinsieme compatto di X, ovvero

$$f_+^{-1}(B) \subset X_+.$$

Sappiamo che f produce un omeomorfismo locale da un intorno di p in X ad un intorno di ∞ in S^2; in particolare $X_\pm \neq \emptyset$. Allora $f_\pm$ avranno gradi $d_\pm \geq 1$. Supponiamo che $d_\pm = 1$.
Sia $K \subset X$ compatto t.c.

$$(Imf)(x) < 1 \qquad \text{per}\, x \notin K.$$

Per assurdo sia $d_+ \geq 2$. Allora $\forall n \geq 1$, $\exists\, x_n, \tilde{x}_n$ con $f(x_n) = f(\tilde{x}_n) = in$ e x_n e $\tilde{x}_n$ sono o uguali o distinti, ma vale $f'(x_n) = 0$.
Ora, poichè K è un insieme compatto e $x_n, \tilde{x}_n \in K$, esiste una sottosuccessione $\{n'\}$ t.c.

$$x_{n'} \to x, \qquad \tilde{x}_{n'} \to \tilde{x}.$$

Ma $in \to \infty$, perciò $f(x) = f(\tilde{x}) = \infty$ e, poichè f ha un solo polo, dovremmo avere $x = \tilde{x} = p$. Ma questo è un assurdo per l'iniettività vicino al punto p. Abbiamo così dimostrato che f mappa $X_\pm$ biettivamente in $H_\pm$.

Più precisamente, vediamo che $f : X \to S^2$ è iniettiva.

Siano $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = z \in S^2$; possiamo trovare due dischi aperti disgiunti $D_i\,(i = 1, 2)$ e un intorno $N \ni z$ t.c. $f(D_i) \supset N$.

Ora prendiamo un punto $z' \in N \cap H_+$: esistono due punti $x_1' \neq x_2'$ in D_1, D_2 entrambi mappati in z', che contraddice l'iniettività di f in $X_\pm$.

Perciò abbiamo ottenuto che $f : X \to U \supset H_+ \cup H_- \cup \{\infty\}$ è una mappa iniettiva,

$$\Longrightarrow U = S^2 \setminus I$$

per qualche sottoinsieme compatto I di $\mathbb{R}$ come richiesto.

□

Corollario 1. *Ciascuna superficie di Riemann connessa è equivalente:*

- *o alla sfera di Riemann* S^2,
- *oppure a* $\mathbb{C}$ *o* $\mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *o* $\mathbb{C}/\Lambda$, *per qualche reticolo* Λ,
- *o al quoziente* H/Γ, *dove* $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ *è un sottogruppo discreto che agisce liberamente su* H.

Il corollario segue immediatamente dal fatto che ogni superficie di Riemann è un quoziente del suo ricoprimento universale tramite l'azione del suo gruppo fondamentale, e inoltre l'unica superficie di Riemann compatta semplicemente connessa è la sfera di Riemann.

XXXI-12