ALGEBRAIC CURVES & RIEMANN SURFACES

Extra material

Prof. M. Spera
UCSC Brescia

Lecture XXXIX

Capitolo 3

Il teorema di Riemann-Hurwitz e la curva delle radici

In questo capitolo affrontiamo il teorema di Abel da un punto di vista geometrico-topologico come ulteriore applicazione delle tecniche introdotte nel precedente capitolo.

Associeremo alle radici di un'equazione polinomiale una curva (detta di Bring o curva delle radici) e ne calcoleremo il genere. La non risolubilità delle equazioni polinomiali di grado superiore al quarto sarà ricondotta al fatto che, in grado 5, si ottiene una curva di genere $g = 4$, per cui non razionale (sapendo che le curve razionali hanno genere $g = 0$).

no via radicals

3.1 Rivestimenti ramificati e caratteristica di Eulero-Poincarè

already treated

Teorema 3.1. *Siano C e C' due curve algebriche connesse nel piano proiettivo complesso (ossia lette come superfici di Riemann) e sia $\pi : C' \to C$ un rivestimento ramificato di ordine d, pari al numero di fogli. Sia p un punto di diramazione e sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tutti i punti di diramazione. Allora*

$$\chi' = d \cdot \chi - \sum_{p \in C} (e(p) - 1) = d \cdot \chi - \sum_{p \in \mathcal{R}} (e(p) - 1) \tag{3.1}$$

dove χ e χ' sono le caratteristiche di Eulero-Poincarè di C e C', $e(p)$ è l'indice di diramazione o ramificazione in p e coincide con il numero di fogli che si incontrano in p.

L'equazione (3.1) prende il nome di formula di Hurwitz.

XXXIX-1

Osservazione 3.2. Per un punto che non sia di diramazione, si ha $e(p) = 1$; per cui, nella somma di (3.1) contano effettivamente solo i punti di diramazione.

Dimostriamo quindi la formula (3.1).

Dimostrazione. Si consideri C e la si triangoli, badando che i punti di diramazione siano presenti tra i vertici della triangolazione, e la si sollevi ad una triangolazione di C'. Allora si ha: $E' = d \cdot E$, $F' = d \cdot F$ e

$$V' = d \cdot V - \sum_{p \in \mathcal{R}} (e(p) - 1).$$

Dunque si ottiene:

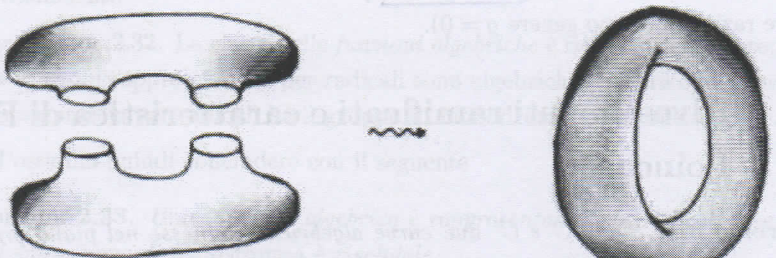
$$\chi' = V' - E' + F' = d \cdot (V - E + F) - \sum_{p \in \mathcal{R}} (e(p) - 1) = d \cdot \chi - \sum_{p \in \mathcal{R}} (e(p) - 1)$$

che è la formula cercata. □

Esempio 3.3. Sia $C' : y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ dove a, b, c, d sono distinti (se in particolare $d \to \infty$ si può prendere $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ dove $\lambda \notin \{0, 1\}$).
Esistono 4 punti di diramazione, per cui si ha: $e(p) = 2$ da cui si ottiene $e(p) - 1 = 1$ e 2 fogli, ossia $d = 2$.
In particolare, $C = \mathbb{P}^1$ e $\chi = 2$. Allora si ottiene:

$$\chi' = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$$

Ma $\chi' = 0$ porta a $g' = 1$ e riconfermiamo che si ottiene un *toro*.



3.2 Il teorema di Riemann-Hurwitz

Teorema 3.4. *Sia C una curva non singolare in $\mathbb{P}^2$ di grado n. Allora*

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

dove g è il genere *della curva C vista come superficie di Riemann.*

XXXIX-2

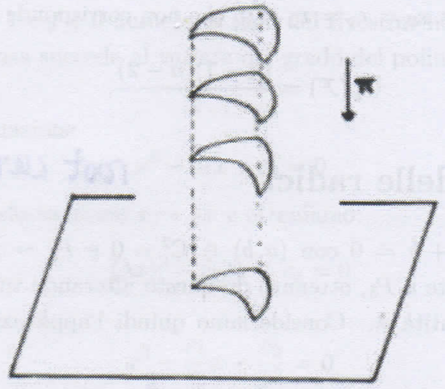
Dimostrazione. Senza perdere di generalità, C dà vita ad un rivestimento ramificato di ordine n.
Sia $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ e siano p_i i punti di diramazione. Essi si ottengono risolvendo

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

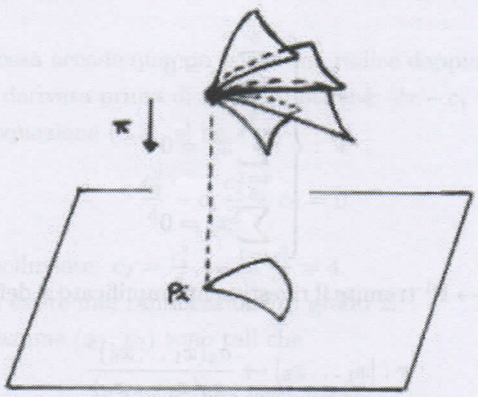
che non è altro che il problema di Dini, dove la prima equazione ha grado n e la seconda è una curva di grado $n-1$.
L'intersezione ha cardinalità $n(n-1)$ per il teorema di Bézout.
I punti di diramazione sono quindi $n-1$, in quanto ognuno assorbe n intersezioni.
Triangoliamo ora $\mathbb{P}'$, che visto come una superficie è una sfera, in modo che tra i vertici compaiano i punti di diramazione p_i. Allora si ha:

$$\chi(\mathbb{P}^1) = V - E + F = 2.$$

Tramite π, precisamente attraverso la controimmagine, si ottiene una triangolazione di C. In un punto regolare si ha il seguente schema:



In un punto di diramazione invece, n vertici collassano in uno solo, ossia $n \mapsto 1$ e gli n punti di diramazione p_i assorbono $n-1$ vertici e lo schema sarà il seguente:



XXXIX-3

Si trova allora:

$$\chi(C) = V' - E' + F' = n(V - E + F) - n(n-1) = 2n - n(n-1) = n(3-n).$$

In particolare, da $\chi(C) = n(3-n)$ e dal fatto che da $\chi = 2 - 2g$ si ricava $g = 1 - \frac{\chi}{2}$ si ottiene:

$$g = 1 - \frac{n(3-n)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

□

Esempio 3.5. Sia $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ la *curva di Fermat* in $\mathbb{P}^2$ di equazione

$$\mathcal{F} : x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0.$$

Essa è non singolare, in quanto

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

per $i = 0, 1, 2$ solo se $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, che non corrisponde ad alcun punto di $\mathbb{P}^2$. Pertanto si ha:

$$g(\mathcal{F}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

3.3 Curva delle radici

root curve

Sia $P_5 = x^5 + ax + b = 0$ con $(a, b) \in \mathbb{C}^2 - 0$ e $P_5 \sim \tilde{P}_5$, dove $\tilde{P}_5$ è un polinomio equivalente a P_5, ottenuto da questo alterando tutti i coefficienti di una medesima quantità λ. Consideriamo quindi l'applicazione $x \mapsto \lambda x$ con $\lambda \neq 0$; allora si ha:

$$a \mapsto \frac{a}{\lambda^4} \text{ e } b \mapsto \frac{b}{\lambda^5}$$

In tal modo si passa alla classe $[x_1 \dots x_5] \in \mathbb{P}^4$, dove $x_1, \dots, x_5$ sono le radici del polinomio P_5.

Si consideri ora:

$$V : \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 0 \end{cases}$$

Allora si ha che $V \to \mathbb{P}^1$ tramite il rivestimento ramificato π definito nel seguente modo:

$$\pi : [x_1 \dots x_5] \mapsto \frac{\sigma_4(x_1 \dots x_5)^5}{\sigma_5(x_1 \dots x_5)}.$$

r_i: root

$\sigma_1 = r_1 + \dots r_5$

$\sigma_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots r_4 r_5$

$= \sum_{i<j} r_i r_j$

$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots i_k} r_{i_1} \dots r_{i_k}$

XXXIX - 4

V è liscia in
$$\mathbb{P}_3 \sim \sum_{i=1}^{5} x_i = 0$$
e può essere vista come intersezione di una quadrica Q con una cubica C che si intersechino trasversalmente, ossia $V = Q \cap C$ e, prese x_i in modo che siano radici al più doppie, la matrice
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \end{pmatrix}$$
avrà rango 3 su V.
Il genere di V, detta **curva di Bring**, si calcola tramite il teorema di Riemann-Hurwitz e in particolare si ha:
$$\sum_p i_p = 2(f + g - 1) \tag{3.2}$$
dove p è un generico punto di diramazione, i_p è l'indice di diramazione di p, pari a: $i(p) = \mathit{ordine} - 1$ e f è il numero di fogli del rivestimento.
Analizziamo ora cosa succede al variare del grado del polinomio.

- **d=2**

Consideriamo l'equazione
$$x^2 - c_1 x + c_2 = 0 \tag{3.3}$$
applichiamo la trasformazione $x \mapsto \lambda x$ e otteniamo:
$$(\lambda x)^2 - c_1 \lambda x + c_2 = 0$$
da cui si ha:
$$x^2 - \frac{c_1}{\lambda} x + \frac{c_2}{\lambda^2} = 0$$
Allora, siccome $c_1 \mapsto \frac{c_1}{\lambda}$ e $c_2 \mapsto \frac{c_2}{\lambda^2}$, l'elemento $\frac{c_1^2}{c_2}$ è invariante per la trasformazione considerata.
Sapendo che $x \in [x_1, x_2]$, dove x_1 e x_2 sono le radici, cerchiamo i punti di ramificazione.
Intanto vediamo cosa accade quando esiste una radice doppia e per farlo poniamo pari a zero la derivata prima di (3.3). Si ottiene: $2x - c_1 = 0$ da cui $x = \frac{c_1}{2}$.
Sostituendo nell'equazione (3.3), si ha:
$$\frac{c_1^2}{4} - c_1 \frac{c_1}{2} + c_2 = 0$$
da cui si ricava facilmente: $c_2 = \frac{c_1^2}{4}$, ossia $\frac{c_1^2}{c_2} = 4$.
Quindi, per $\xi = 4$ esiste una ramificazione di grado 2.
I punti di ramificazione (x_1, x_2) sono tali che
$$(x_1, x_2) \mapsto (\omega x_1, \omega x_2)$$

XXXIX - 5

per cui si ha:

$$c_1\omega = c_1 \text{ e } c_2\omega^2 = c_2.$$

In particolare, se $c_1 = 0$, allora $c_2 \neq 0$ e $\omega^2 = 1$, per cui si ha una ramificazione di grado 2 su $\xi = 0$.
Inoltre, se $c_2 = 0$, allora $c_1 \neq 0$ e $\omega = 1$, ossia non esiste alcuna ramificazione.
Quindi, per $d = 2$, esistono 2 ramificazioni di grado 2, rispettivamente una su $\xi = 0$ e una su $\xi = 4$.
Dalla formula (3.2) quindi si ottiene:

$$1 + 1 = 2(2 + g - 1)$$

ossia **g=0**.

- **d=3**

Consideriamo l'equazione

$$x^3 + c_2x - c_3 = 0 \tag{3.4}$$

applichiamo la trasformazione $x \mapsto \lambda x$ e otteniamo:

$$(\lambda x)^3 + c_2\lambda x - c_3 = 0$$

da cui si ha:

$$x^3 + \frac{c_2}{\lambda^2}x - \frac{c_3}{\lambda^3} = 0$$

Allora, siccome $c_2 \mapsto \frac{c_2}{\lambda^2}$ e $c_3 \mapsto \frac{c_3}{\lambda^3}$, l'elemento $\xi = \frac{c_2^3}{c_3^2} \in \mathbb{P}^1$ è invariante per la trasformazione considerata, sapendo che $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, altrimenti si avrebbe $x^3 = 0$, ossia $x = 0$ sarebbe una radice tripla.
Come nel caso precedente, cerchiamo i punti di ramificazione e vediamo cosa accade quando esiste una radice doppia. Per farlo poniamo pari a zero la derivata prima di (3.4). Si ottiene: $3x^2 + c_2 = 0$ da cui $c_2 = -3x^2$ e $x^2 = -\frac{c_2}{3}$.
Sostituendo nell'equazione (3.4), si ha:

$$x\left(-\frac{c_2}{3} + c_2\right) - c_3 = 0$$

da cui si ricava facilmente: $c_3 = \frac{2}{3}xc_2$. Inoltre:

$$\xi = \frac{c_2^3}{c_3^2} = \frac{-3^3x^6}{\frac{4}{9}x^2 \cdot 9x^4} = \frac{3^3}{2^2}.$$

Anche qui, i punti di ramificazione (x_1, x_2) sono tali che

$$(x_1, x_2) \mapsto (\omega x_1, \omega x_2)$$

per cui si ha:

$$c_2\omega^2 = c_2 \text{ e } c_3\omega^3 = c_3.$$

XXIX-6

In particolare, se $c_2 = 0$, allora $c_3 \neq 0$, $\xi = 0$ e $\omega^3 = 1$. Da $\frac{3!}{3} = 2$, si ha che esistono 2 ramificazioni di grado 3 per $\xi = 0$.
Inoltre, se $c_3 = 0$, allora $\xi = \infty$ e si ha dalla (3.4):

$$x(x^2 + c_2) = 0$$

da cui si ottiene una radice nulla. Per $\xi = \infty$ quindi si hanno 3 ramificazioni di grado 2.
Per $\xi = -\frac{3^3}{2^2}$ infine si ha una radice doppia, e poichè si ha

$$\binom{3}{2} = 3$$

possiamo affermare che per $\xi = -\frac{3^3}{2^2}$ esistono 3 ramificazioni di grado 2.
Dalla (3.2) si ha perciò:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 2(6 + g - 1)$$

da cui si ottiene g=0.

- **d=4**

Consideriamo l'equazione

$$x^4 - c_3 x + c_4 = 0 \tag{3.5}$$

applichiamo la trasformazione $x \mapsto \lambda x$ e otteniamo:

$$(\lambda x)^4 - c_3 \lambda x + c_4 = 0$$

da cui si ha:

$$x^4 - \frac{c_3}{\lambda^3} x + \frac{c_4}{\lambda^4} = 0$$

Allora, siccome $c_3 \mapsto \frac{c_3}{\lambda^3}$ e $c_4 \mapsto \frac{c_4}{\lambda^4}$, l'elemento $\xi = \frac{c_3^4}{c_4^3} \in \mathbb{P}^1$ è invariante per la trasformazione considerata, sapendo che $(c_3, c_4) \neq (0, 0)$, altrimenti si avrebbe $x^4 = 0$, ossia $x = 0$ sarebbe una radice quadrupla.
Come nei casi precedenti, cerchiamo i punti di ramificazione e vediamo cosa accade quando esiste una radice doppia. Non vi sono invece radici triple o quadruple. Per farlo poniamo pari a zero la derivata prima di (3.5). Si ottiene: $4x^3 - c_3 = 0$ da cui $c_3 = 4x^3$ e quindi $c_4 = c_3 x - x^4 = 4x^4 - x^4 = 3x^4$. Inoltre:

$$\xi = \frac{c_3^4}{c_4^3} = \frac{4^4 x^{12}}{3^3 x^{12}} = \frac{4^4}{3^3}.$$

Analogamente ai casi precedenti, i punti di ramificazione (x_1, x_2) sono tali che

$$(x_1, x_2) \mapsto (\omega x_1, \omega x_2)$$

per cui si ha:

$$c_3 \omega^3 = c_3 \text{ e } c_4 \omega^4 = c_4.$$

XXIX - 7

In particolare, se $c_3 = 0$, allora $c_4 \neq 0$, $\xi = 0$ e $\omega^4 = 1$. Da $\frac{4!}{4} = 6$, esistono 6 ramificazioni di grado 4 su $\xi = 0$.

Inoltre, se $c_4 = 0$, allora $\xi = \infty$, $\omega^3 = 1$ e $x = 0$ è una radice. Da $\frac{4!}{3} = 8$, esistono 8 ramificazioni di grado 3 su $\xi = \infty$.

Infine, poichè si ha

$$\binom{4}{2} = 12$$

esistono 12 ramificazioni di grado 2 su $\xi = \frac{4^4}{3^3}$.

Dalla (3.2) si ha perciò:

$$6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 2(24 + g - 1)$$

da cui si ottiene **g=0**.

- **d=5**

Consideriamo l'equazione

$$x^5 + c_4 x - c_5 = 0 \tag{3.6}$$

applichiamo la trasformazione $x \mapsto \lambda x$ e otteniamo:

$$(\lambda x)^5 + c_4 \lambda x - c_5 = 0$$

da cui si ha:

$$x^5 + \frac{c_4}{\lambda^4} x - \frac{c_5}{\lambda^5} = 0$$

Allora, siccome $c_4 \mapsto \frac{c_4}{\lambda^4}$ e $c_5 \mapsto \frac{c_5}{\lambda^5}$, l'elemento $\xi = \frac{c_4^5}{c_5^4} \in \mathbb{P}^1$ è invariante per la trasformazione considerata, sapendo che $(c_4, c_5) \neq (0, 0)$, altrimenti si avrebbe $x^5 = 0$, ossia $x = 0$ sarebbe una radice quintupla.

Analogamente ai casi precedenti, cerchiamo i punti di ramificazione e vediamo cosa accade quando esiste una radice doppia. Non vogliamo invece radici triple, quadruple e quintuple. Per farlo poniamo pari a zero la derivata prima di (3.6). Si ottiene: $5x^4 + c_4 = 0$ da cui $c_4 = -5x^4$ e $c_5 = x^5 + c_4 x = x(x^4 + c_4) = -4x^5$. Inoltre:

$$\xi = \frac{c_4^5}{c_5^4} = \frac{-5^5 x^{20}}{4^4 x^{20}} = \frac{5^5}{4^4}.$$

I punti di ramificazione (x_1, x_2), anche qui, sono tali che

$$(x_1, x_2) \mapsto (\omega x_1, \omega x_2)$$

per cui si ha:

$$c_4 \omega^4 = c_4 \text{ e } c_5 \omega^5 = c_5.$$

In particolare, se $c_4 = 0$ e $c_5 \neq 0$, allora $\xi = 0$ e $\omega^5 = 1$. Da $\frac{5!}{5} = 24$, si hanno 24 punti di ramificazione di grado 5 per $\xi = 0$.

Se invece $c_5 = 0$ e $c_4 = 0$, allora $\xi = \infty$ e $x = 0$ è una radice. Poichè $\frac{5!}{4} = 30$,

XXXIX - 8

esistono 30 punti di ramificazione di grado 4 per $\xi = \infty$.
Per $\xi = -\frac{5^5}{4^4}$ infine, dal fatto che

$$\binom{5}{2} \cdot 3! = 60$$

A4 Kepler stellated dodecahedron (see McKean-Moll)

esistono 60 punti di ramificazione di grado 2.
Dalla (3.2) si ha perciò:

$$24 \cdot 4 + 30 \cdot 3 + 60 \cdot 1 = 2(120 + g - 1)$$

da cui si ottiene **g=4**. Per $d \geq 5$ quindi non si ottiene una curva razionale.

3.4 Il teorema di Plücker

Concludiamo la nostra esposizione con il

Teorema 3.6 (Teorema di Plücker). *Sia C una curva in $\mathbb{P}^2$ di grado n, con δ punti doppi, nodi o cuspidi. Allora si ha:*

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$$

Dimostrazione. Alteriamo opportunamente i coefficienti di C: si ottiene una curva C' non singolare e si ha:

$$g' = g'(C) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

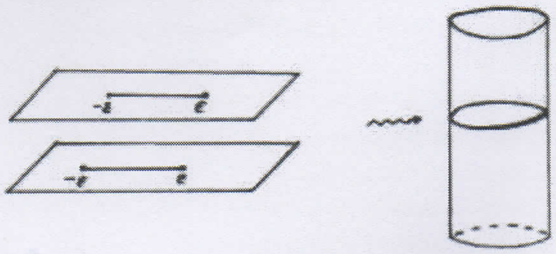
already treated

se e solo se $g = g' - \delta$.
Analizziamo quindi cosa succede in un punto doppio dal punto di vista topologico.
Innanzi tutto $xy = 0$ in coordinate complesse non omogenee. Equivalentemente, con un cambiamento di coordinate del tipo:

$$x = x' + iy'$$

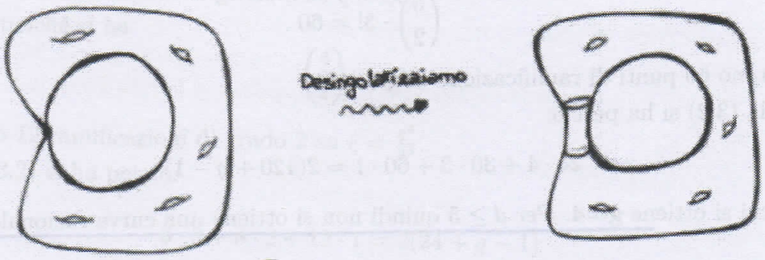
$$y = x' - iy'$$

si ottiene $x'^2 + y'^2 = \varepsilon^2$ dove, per fissare le idee, si considera $\varepsilon > 0$.
Per desingolarizzare, consideriamo innanzi tutto $y'^2 = \varepsilon^2 - x'^2$; i punti $\pm\varepsilon$ sono i punti di diramazione.
Consideriamo poi due copie del piano tagliato da $-\varepsilon$ a ε e incollate nel solito modo: si ottiene un cilindro, come mostrano le seguenti figure.



XXXIX-9

Sia ora C con un solo punto singolare doppio e desingolarizziamo. Le seguenti figure mostrano quanto accade:



In realtà il punto è doppio, per cui si passa da:

Dunque si guadagna un manico. Viceversa, nel passaggio dalla curva non singolare a quella singolare si perde un manico e di conseguenza si ha:

$$g' = g' - 1 = g.$$

In definitiva, in presenza di δ punti doppi il genere della curva cambia da g' a $g' = g - \delta$. $\square$

XXXIX-10