

Geometria II

Elementi di Geometria Differenziale-
Prof.Mauro Spera- UCSC Brescia

Documenti gentilmente e digitalmente rilegati da
Stefano Martire

Geometria II -programma 2013/14

PROF. MAURO SPERA

OBIETTIVO DEL CORSO

Il corso si prefigge lo scopo di introdurre ed elaborare i concetti fondamentali della geometria differenziale delle curve e delle superficie, in modo rigoroso ma nello stesso tempo concreto e basato su esempi, allo scopo di sviluppare ulteriormente negli allievi l'intuizione geometrica, la capacità di astrazione e l'abilità di calcolo analitico, anche in vista delle applicazioni nei corsi paralleli e successivi.

Gli argomenti si intendono corredati delle relative dimostrazioni (o idee di queste), salvo avviso contrario.

PROGRAMMA DEL CORSO

Il programma del corso è interamente contenuto (come sottoinsieme proprio!) nelle dispense del docente (GeometriaV3 I-XII), e appendici [GEO-add I-V] con richiami di calcolo differenziale, scaricabili dalla pagina ufficiale del corso di Geometria della Facoltà di Scienze MM FF NN, Università di Verona.

****E' altresì disponibile nella pagina unicatt del docente una versione riveduta delle stesse dispense, lezioni I-XXVI****

1- Geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio

Curve parametriche regolari. Lunghezza d'arco. Curve piane: lunghezza d'arco in coordinate polari.

Curve piane: curvatura (con segno), raggio di curvatura e cerchio osculatore e sua caratterizzazione come limite dei cerchi tangenti alla curva in un punto e passanti per un altro punto della curva. Formula generale per la curvatura, formalismo complesso e formalismo "misto". Ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido (teorema fondamentale per le curve piane), formula esplicita.

Esempi: rette, coniche e altre curve classiche (cicloide, trattrice, clotoide ecc.). Evoluta ed evolvente. L'evoluta di una trattrice e' una catenaria. L'evoluta di una cicloide e' una cicloide.

Curve spaziali: curvatura, biregolarità, triedro principale, torsione, formule di Fre'net-Se'rret.
Teorema fondamentale (curvatura e torsione caratterizzano una curva biregolare a meno di uno spostamento rigido), con idea della dimostrazione.
Formule generali per la curvatura e la torsione.
Studio locale di una curva (biregolare) tramite il triedro di Fre'net.
Teoria del Dini.
Sfera osculatrice e teorema di de Saint Venant.
Esempi: cubica gobba, eliche, finestra di Viviani...

3. Geometria differenziale delle superficie

Richiami di calcolo vettoriale.
Superficie parametriche regolari. Prima forma fondamentale (metrica).
Carta di Mercator. Proiezione stereografica (e proprietà di quest'ultima di inviare cerchi in cerchi). Metrica sulle superficie di rivoluzione; la pseudosfera di Beltrami.

L'applicazione di Gauss e relativo operatore di forma.
Seconda forma fondamentale e sue interpretazioni geometriche (teorema di Meusnier; scostamento dal piano tangente)
curvature principali, linee asintotiche, linee di curvatura e teorema di Rodrigues. Teorema di Eulero. Indicatrice di Dupin.
Curvatura gaussiana e curvatura media e loro formule di calcolo. La seconda forma fondamentale per le superficie di rivoluzione. Curvature principali e loro significato geometrico (curvatura del meridiano e reciproco della grannormale).
Curvatura della pseudosfera. Esempi vari (elicoide, catenoide...).

Formule di Weingarten. Il Theorema Egregium e di Codazzi-Mainardi (schema generale della dimostrazione). Formule varie per la curvatura. Derivata covariante e sua interpretazione geometrica (Levi-Civita). Simboli di Christoffel.
Dimostrazione del Theorema Egregium.
Teorema fondamentale della teoria delle superficie (cenno).
Trasporto parallelo e suo significato geometrico. Formula di Levi-Civita. Trasporto parallelo sulla sfera.

[Prologo: richiami di meccanica analitica. Principio di azione stazionaria ed equazioni di Lagrange, coordinate cicliche e relative grandezze conservate (integrali primi)].

Geodetiche e loro proprietà intrinseche ed estrinseche:

curve autoparallele, cammini critici dei funzionali energia e lunghezza

(se si usa l'ascissa curvilinea, in quest'ultimo caso), curve di curvatura geodetica nulla (def. di curvatura geodetica e suo significato geometrico, con dim.).

Determinazione delle geodetiche in alcuni esempi: piano euclideo,

sfera, piano iperbolico, superficie di rivoluzione (teorema di Clairaut).

Formula di Gauss per i triangoli geodetici. Applicazione alle geometrie non euclidee: sfera, piano proiettivo (ellittico), piano iperbolico.

Teorema di Gauss-Bonnet.

Cenni su: applicazione esponenziale, coordinate normali e polari,

cerchi geodetici, lemma di Gauss e caratterizzazioni intrinseche della curvatura (formula di Bertrand e Puiseux), teorema di Minding.

Esempi, esercizi e complementi vari, tecniche di calcolo:

quadriche, superficie sviluppabili, rigate, superficie minime e loro caratterizzazione variazionale (elicoide, catenoide...).

BIBLIOGRAFIA

M. ABATE - F. TOVENA, *Curve e superfici*, Springer, Milano, 2006.

M. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

A. GRAY - E. ABBENA - S. SALAMON, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Boca Raton, 2006.

D. HILBERT - S. COHN-VOSSEN, *Geometria intuitiva*, Boringhieri, Torino, 1972.

M. LIPSCHUTZ, *Geometria differenziale Schaum*, Etas Libri, 1984.

A. PRESSLEY, *Elementary Differential Geometry*, UTMSpringer, New York, 2000.

E. SERNESI, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

METODO DI VALUTAZIONE

Prova scritta e prova orale.

AVVERTENZE

Il docente riceve gli studenti nel proprio studio nei giorni di lezione e su appuntamento.

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

M. Spina - UCSC Brescia

Lezione I

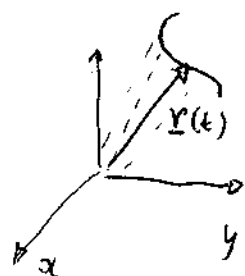
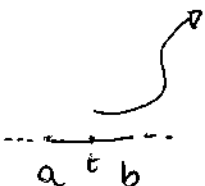
* Curve regolari (rechiami)

una funzione $\underline{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (} \mathbb{R}^2 \text{)}$

intervallo aperto

$t \mapsto \underline{r}(t)$

* identificati
con vettori
geometrici
applicati nell'origine



\underline{r} detta curva (parametrica)
regolare spaziale (in \mathbb{R}^3)
piana (in \mathbb{R}^2)

fissiamo sempre un
sistema di riferimento
Cartesiano $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$
(o $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$)
vettori degli assi



Se valgono le seguenti condizioni:

①. \underline{r} \in di classe \mathcal{C}^1

(i.e. continua assieme alla sua derivata,
ottenuta derivando le componenti)

di fatto parametrizza $\underline{r} \in \mathcal{C}^1(a, b)$
notazione abbreviata

(\underline{r} liscia, ovvero infinitamente derivabile)

②. \underline{r} \in iniettiva [i.e. \underline{r} \in una curva semplice]

$$(t_1 \neq t_2 \Rightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2))$$

③. $\underline{r}'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a, b)$ ($\underline{\cdot} = \frac{d}{dt}$)
velocità vettore nullo

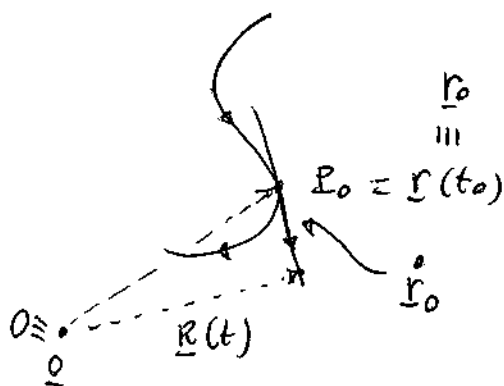
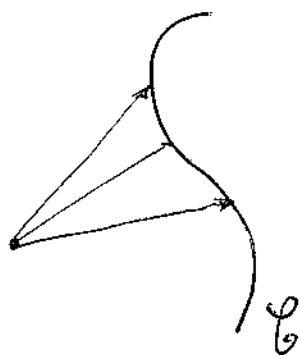


in molti testi
questa è la condizione
di regolarità propriamente
detta

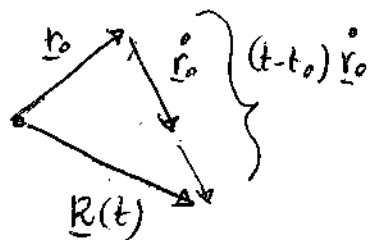
In altre parole: Γ è regolare se è iniettiva e se la retta tangente esiste (in ogni punto del sostegno) e varia con continuità nell'intervallo di definizione

Molto spesso, con abuso di linguaggio, identifichiamo una curva col suo sostegno (ossia con l'immagine della funzione che la individua); notazione abbreviata: \mathcal{C}

retta tangente a \mathcal{C} in $P_0 (= \underline{r}(t_0))$



$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + (t-t_0) \dot{\underline{r}}_0$$



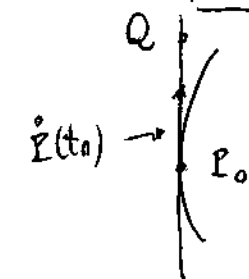
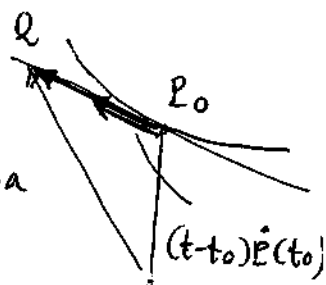
Usiamo spesso anche la notazione classica (molto espressiva)

$$P = P(t) \quad (\equiv \underline{r}(t))$$

$$\dot{P} = \dot{P}(t) \quad (\equiv \dot{\underline{r}}(t))$$

l'equazione della retta tangente assume la forma

$$Q = P_0 + (t-t_0) \dot{P}(t_0)$$



ovvero

$$Q - P_0 = (t-t_0) \dot{P}(t_0)$$



è un vettore geometrico

(si ricordi: un vettore geometrico è una classe di equipollenti di k-puntati orientati)

$$\vec{AB} \equiv B - A$$

scrittura formale (notazione affine)

Ancora:

$$Q = P_0 + (t-t_0) \dot{P}_0$$

$\equiv \dot{P}(t_0)$

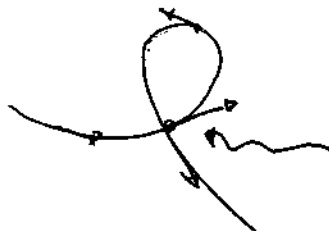
Osservazioni:

- (3) \Rightarrow iniettività locale

(si ricordi il teorema di Lagrange
 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$)

e si lavora componente per componente

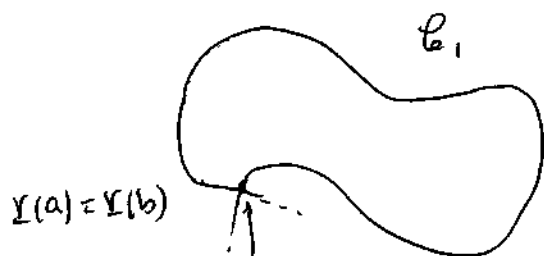
- (3) $\not\Rightarrow$ (2)



← non è regolare
(lo è a tratti)

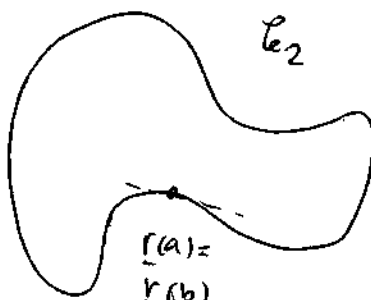
- Si consideri una curva chiusa (def. in $[a, b]$):

$\gamma(a) = \gamma(b)$, semplice (i.e. iniettiva su (a, b))



$$\dot{\gamma}_-(b) \neq \dot{\gamma}_+(a)$$

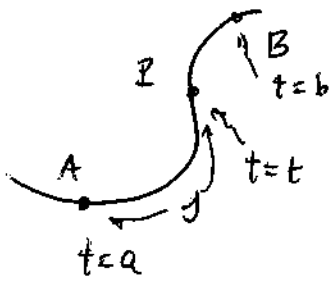
non è regolare



$$\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$$

è regolare

Si verifica facilmente che $L(\mathcal{C})$ non dipende
dalla parametrizzazione scelta (né dall'orientamento).



Diminque

$$L(A, P) = \int_a^t \|\dot{\underline{r}}(u)\| du$$

definisce l'ascissa curvilinea di P

ovvero la lunghezza dell'arco \widehat{AP}

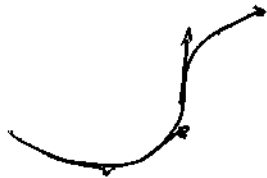
oppure scriviamo $L(a, t) = \int_a^t \|\dot{\underline{r}}(u)\| du = s(t)$

* s è il parametro "naturale" (o intrinseco) per descrivere \mathcal{C} . Si ha subito, posto

$$s = \frac{d}{ds} \text{ che}$$

$$\|\dot{\underline{r}}(s)\| = 1$$

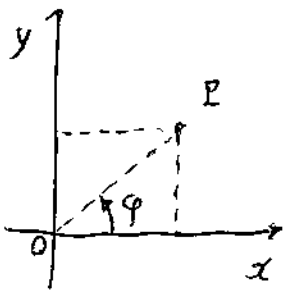
$\forall s$ in un intervallo opportuno



(la curva descritta tramite l'ascissa curvilinea viene percorsa con velocità unitaria)

$$\left(\begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \|\dot{\underline{r}}\| \\ \frac{ds}{ds} = 1 = \|\dot{\underline{r}}'\| \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} ds = \|\dot{\underline{r}}\| dt \\ ds = \|\dot{\underline{r}}'\| ds \end{array} \right)$$

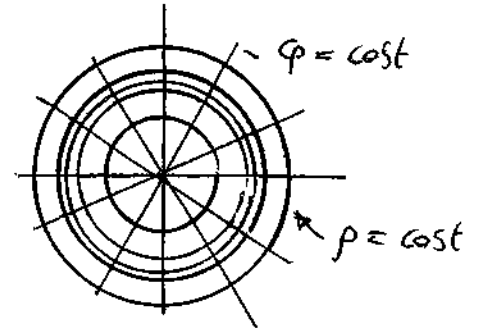
A titolo di esempio, e in vista di sviluppi successivi
 calcoliamo l'elemento di lunghezza d'arco ds
 di una curva piana descritta in coordinate polari



$$\rho > 0$$

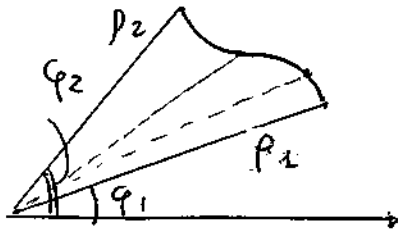
$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$



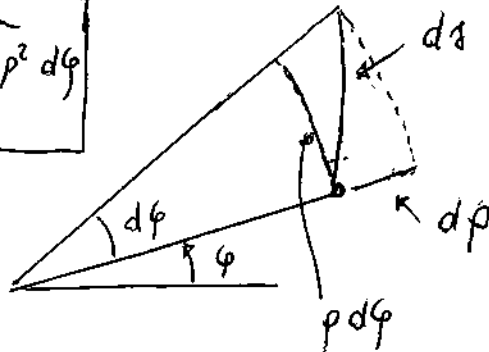
$\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$; si trova, con la formula,

oppure col ragionamento euristico
 illustrato sotto,



$$ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$$

$$L(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$$

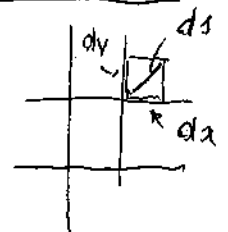


"teorema di
 Pitagora nell'infinitesimo"
 coord. polari

$$ds^2 = dp^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

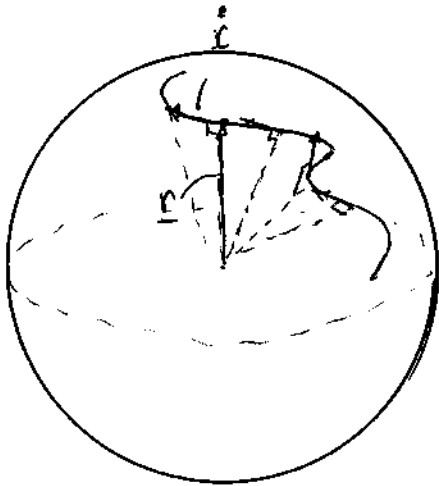
In coordinate
 cartesiane



Il fatto seguente sarà di uso continuo

Se $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \gamma$ è tale che $\|\gamma(t)\| = c$,
 $(\gamma \in \mathcal{B}^\infty)$ intervallo aperto $c \in \mathbb{R}$
 $(c > 0)$

allora $\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in \gamma$



Infatti, da

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = c^2 \geq 0$$

se ne deriva, derivando rispetto a t :

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle + \langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle \equiv 0$$

$$\Rightarrow 2 \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \equiv 0 \quad \text{* identicamente, risp. a } t$$

$$\Rightarrow \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0 \quad \forall t \in \gamma$$

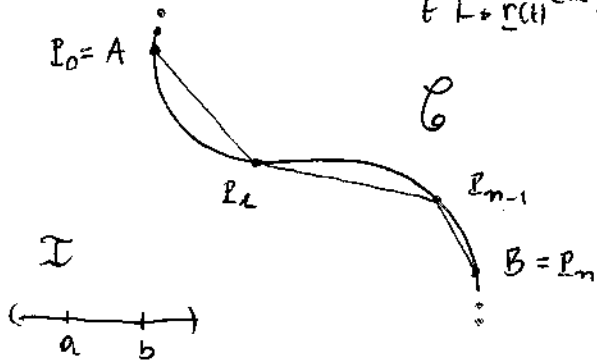
$$\mathcal{C}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \mathcal{C}(t) \in \mathbb{R}^3$$

La lunghezza di un arco di curva (tra A, B) è definita come

$$L(\mathcal{C}) = \sup \left\{ \text{lunghezza delle spezzate} \right\}$$

$$P_0=A, P_1, \dots, P_n=B, P_i \in \mathcal{C}$$



Se $\gamma \in C^1(I)$, si trova

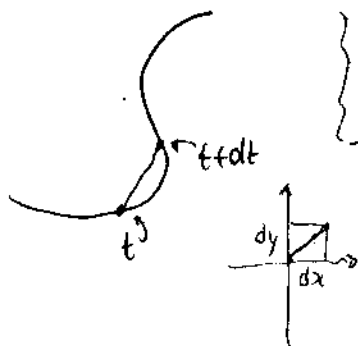
$$(*) \quad L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$a \leftrightarrow A$
 $b \leftrightarrow B$

e tale espressione non dipende da t (né dall'orientamento di \mathcal{C})

(*) ha un chiaro significato intuitivo, nonché meccanico

nel primo:



$$dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt$$

Sommando, ovvero integrando

si ottiene (*), che nel primo, in coordinate cartesiane, è

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

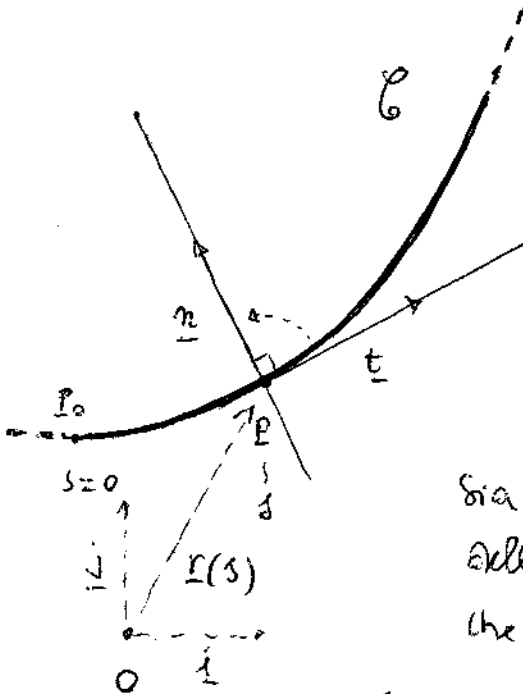


considerazioni
matematiche

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

M. Spina - UCSC Brescia

Lezione II



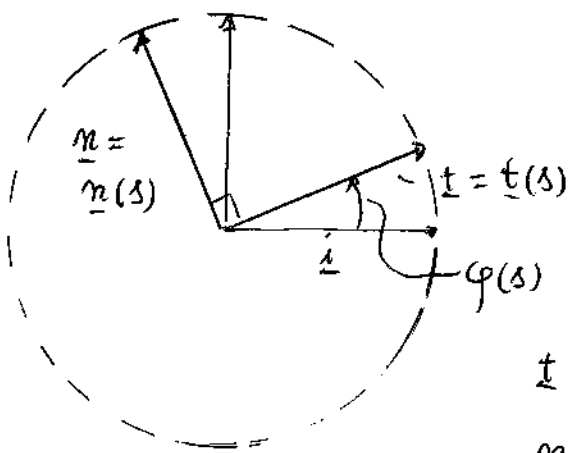
Sia C una curva piana, liscia, regolare, parametrizzata dall'ascissa curvilinea (considerata a partire da un suo punto)

$$\underline{r} = \underline{r}(s)$$

si ricordi che $\|\underline{r}'\| = 1$

Sia \underline{n} (vettore normale in un dato punto della curva, $\underline{n} = \underline{n}(s)$) scelto in modo che pto per pto, $(\underline{i}, \underline{j}) \leftarrow (\underline{t}, \underline{n})$

siamo equiorientate (i.e. la matrice del relativo cambiamento di base sia ortogonale speciale ($\det = +1$))



$$\begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & -\sin \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \underline{t}(s) \\ \underline{n}(s) \end{matrix}$$

formalismo vettoriale

$$\underline{t}(s) = \cos \varphi(s) \underline{i} + \sin \varphi(s) \underline{j}$$

$$\underline{n}(s) = -\sin \varphi(s) \underline{i} + \cos \varphi(s) \underline{j}$$

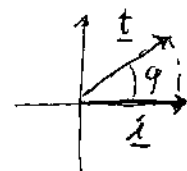
Nel piano si può utilmente utilizzare il formalismo complesso:

t un numero complesso $\rightsquigarrow \underline{t}(s) = \cos \varphi(s) + i \sin \varphi(s) \equiv e^{i \varphi(s)}$

oppure il formalismo misto:

$$\underline{t}(s) = e^{i \varphi(s)} \underline{i}$$

(\underline{i} è scalato di φ e produce \underline{t})



In particolare si ricordi che moltiplicare per i corrisponde a ruotare di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario



sicché possiamo scrivere anche

$$\underline{n}(s) = i e^{i\varphi(s)} \quad (\text{formalismo complesso})$$

$$\underline{n}(s) = i e^{i\varphi(s)} \underline{i} \quad (\text{formalismo misto})$$

fare attenzione a non confonderli

Vogliamo ora definire la curvatura (con segno) di \mathcal{C} (in \mathbb{R}^2 , di asse curvilinea s)

Sia
$$\underline{r}'' = \underline{t}' = \frac{d\underline{t}}{ds}$$

il vettore "accelerazione" della curva ($s \equiv$ "tempo",
 (chiamata anche vettore di curvatura) velocità scalare unitaria: $\|\underline{t}\| = 1$)

Si osserva che $\langle \underline{t}', \underline{t} \rangle = 0$

$$\left(\langle \underline{t}, \underline{t} \rangle \equiv 1 \Rightarrow \langle \underline{t}, \underline{t} \rangle' \equiv 0 \Rightarrow \langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle + \langle \underline{t}', \underline{t} \rangle = 2 \langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle \equiv 0 \right)$$

per tanto

$$\underline{t}' = R \underline{n}, \quad R \in \mathbb{R}$$

Il numero reale R è detta curvatura (con segno)

di \mathcal{C} in \mathbb{R}^2 . Si osserva che $|R| = \|\underline{r}''\|$

\hookrightarrow curvatura assoluta

ora, da $\underline{t} = \cos\varphi \underline{i} + \sin\varphi \underline{j}$, \underline{i}

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= -\varphi' \sin\varphi \underline{i} + \varphi' \cos\varphi \underline{j} \\ &= \varphi' \underbrace{(-\sin\varphi \underline{i} + \cos\varphi \underline{j})}_{\underline{n}} = \varphi' \underline{n} \end{aligned}$$

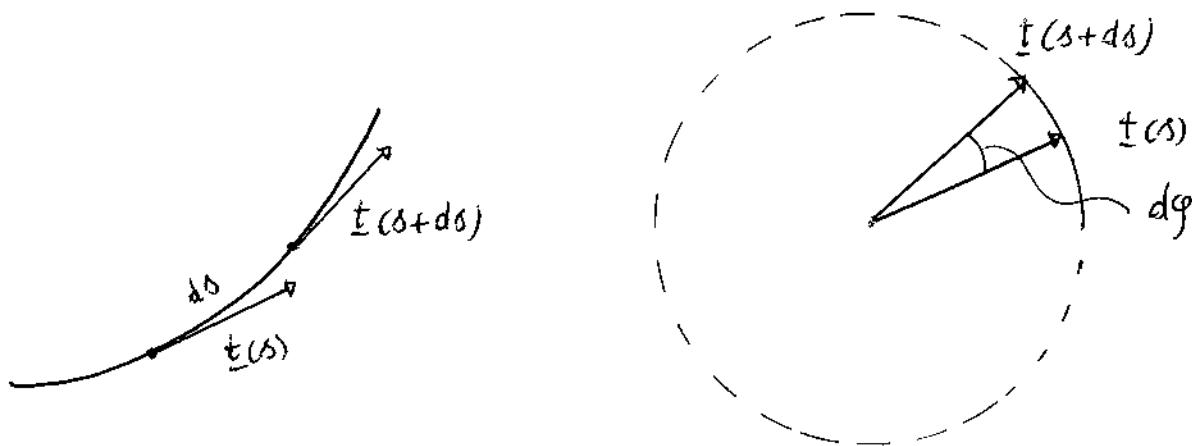
da cui $\boxed{R = \varphi'} \quad (= \frac{d\varphi}{ds})$

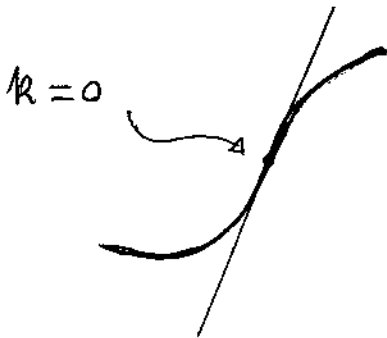
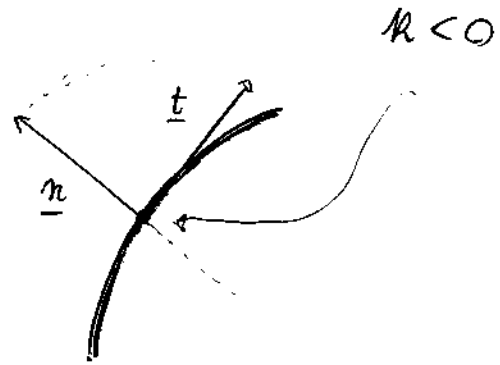
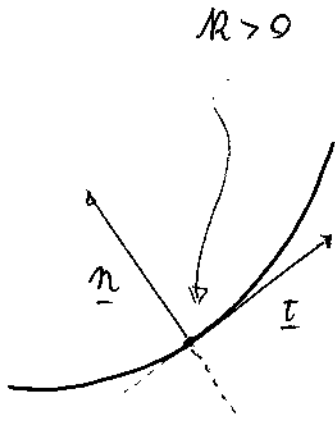
Ritorniamo il calcolo col formalismo misto:

$$\begin{aligned} \underline{t} = e^{i\varphi} \underline{i} &\Rightarrow \underline{t}' = i e^{i\varphi} \varphi' \underline{i} + e^{i\varphi} \underline{i}' \\ &= \varphi' \underbrace{i e^{i\varphi} \underline{i}}_{\underline{n}} = \varphi' \underline{n} \end{aligned}$$

La formula ha un chiaro significato geometrico e meccanico:

R : "velocità angolare" rispetto a s





È subito visto che la curvatura di una retta è identicamente nulla:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + s \underline{t}$$

\nwarrow fisso

$$\underline{r}' = \underline{t} \quad \leftarrow \text{fisso}$$

$$\underline{r}'' = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad R \equiv 0$$

Per contro, la curvatura di una circonferenza (descritta in senso antiorario) è uguale all'inverso del suo raggio:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + R e^{i\varphi} \underline{i}$$

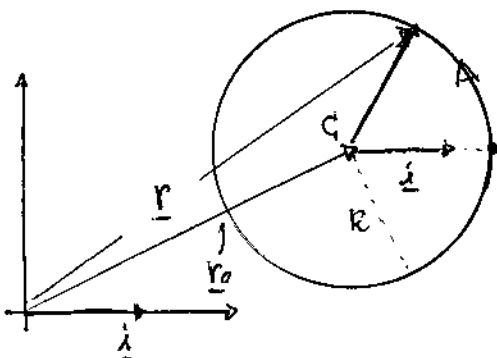
$$\underline{r} = \underline{c} + R e^{i\varphi} \underline{i}$$

$$\underline{r}' = i\varphi' R e^{i\varphi} \underline{i} \quad \varphi' > 0$$

$$\|\underline{r}'\| = R\varphi'$$

$$\Rightarrow ds = R d\varphi$$

poniamo $s = R\varphi$



in termini di lunghezza d'arco

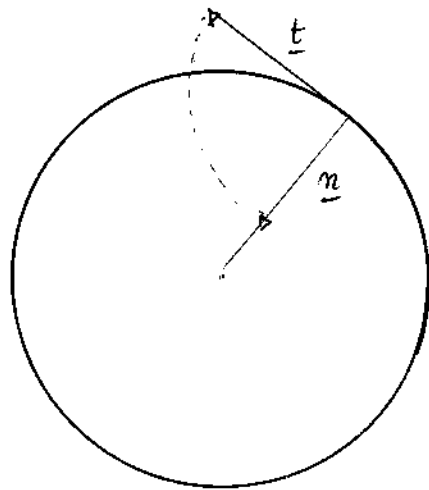
$$\underline{r} = \underline{r}(s) = \underline{r}_0 + R e^{i \frac{s}{R}} \underline{i}$$

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = i \frac{1}{R} \cdot R e^{i \frac{s}{R}} \underline{i} = i e^{i \frac{s}{R}} \underline{i}$$

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = \underbrace{i^2}_{\substack{= \\ = -1}} \frac{1}{R} e^{i \frac{s}{R}} \underline{i} = \frac{1}{R} \underbrace{\left(- e^{i \frac{s}{R}} \underline{i} \right)}_{\underline{n}}$$

$$= \frac{1}{R} \underline{n}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\kappa}$$



osserviamo, per uso futuro, che si ha, in generale

$$\underline{n}' = -R \underline{t}$$

Possiamo procedere così: $\langle \underline{n}, \underline{t} \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \underline{n}', \underline{t} \rangle + \langle \underline{n}, \underline{t}' \rangle \equiv$

$$\Leftrightarrow \langle \underline{n}', \underline{t} \rangle + R \equiv 0 \Leftrightarrow \langle \underline{n}', \underline{t} \rangle = -R$$

$$\text{Ma } \underline{n}' \parallel \underline{t} \text{ poiché } \langle \underline{n}, \underline{n}' \rangle \equiv 0 \Rightarrow \underline{n}' = -R \underline{t}.$$

Facciamo vedere che "una curva piana è individuata dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido", ovvero, data una funzione reale $\kappa = \kappa(s)$, $s \in \gamma$ (γ intervallo $\ni 0$), esiste, a meno di movimenti rigidi, un'unica curva \mathcal{C} ,

parametrizzata dall'ascissa curvilinea s tale

che la sua curvatura sia $\kappa = \kappa(s)$ [una curva di curvatura]

(Teorema fondamentale delle curve piane)

Dm. Data $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}(s)$, $s \in \gamma$,

se $\underline{P}_0 = \underline{r}(0)$, possiamo scrivere (teorema fondamentale del calcolo)

$$\underline{r}(s) - \underline{r}(0) = \int_0^s \underbrace{\underline{r}'(u)}_{\underline{t}(u)} du$$

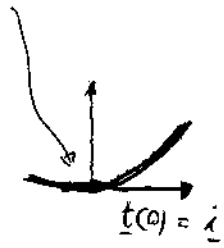
ora, $\underline{t}(s) = e^{i\varphi(s)} \underline{i}$

e $\varphi'(s) = \kappa(s)$, e pertanto

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s \kappa(u) du$$

Per semplicità poniamo $\underline{r}(0) = \underline{0}$ e $\varphi(0) = 0$

($\Rightarrow \underline{t}(0) = \underline{i}$)



Si ha allora, successivamente:

$$\varphi(s) = \int_0^s \mathcal{R}(u) du$$

$$\underline{t}(s) = e^{i \int_0^s \mathcal{R}(u) du} \underline{i}$$

$$\underline{r}(s) = \int_0^s \left(e^{i \int_0^\xi \mathcal{R}(u) du} \underline{i} \right) d\xi$$

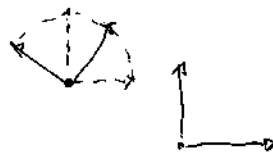
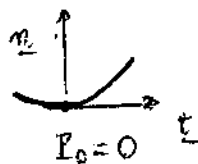
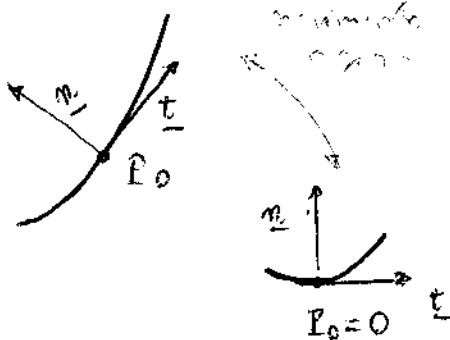
o, equivalentemente

$$\underline{r}(s) = \left\{ \int_0^s \cos \left(\int_0^\xi \mathcal{R}(u) du \right) d\xi \right\} \underline{i} + \left\{ \int_0^s \sin \left(\int_0^\xi \mathcal{R}(u) du \right) d\xi \right\} \underline{j}$$

Dunque, $\underline{r} = \underline{r}(s)$, modulo le posizioni $\underline{r}(0) = \underline{0}$, $\varphi(0) = 0$, è individuata da \mathcal{R} .

Reciproca, procedendo a ritroso, i.e. integrando $\varphi' = \mathcal{R}$ e ricavando $\underline{t}(s)$, e integrando di nuovo, si trova $\underline{r} = \underline{r}(s)$; con le scelte $\underline{r}(0) = \underline{0}$, $\varphi(0) = 0$ si trova, in particolare, l'espressione precedente. Le "costanti di

integrazione" sono responsabili dell'arbitrarietà a meno di un movimento rigido.



A titolo di esercizio, si ritrovino le rette ($R=0$)
 e le circonferenze ($R = \pm \frac{1}{R}$, a seconda dell'orientamento).

L'integrazione può risultare complicata. Consideriamo

ad esempio $R = R(s) = 1$ (Clotoide, o
 spirale di Cornu). Si trova successivamente

$$g(s) = \int_0^s r \, dr = \frac{s^2}{2}, \quad e$$

$$\underline{r}(s) = \left(\int_0^s \cos \frac{r\xi^2}{2} \, d\xi \right) \underline{i} + \left(\int_0^s \sin \frac{r\xi^2}{2} \, d\xi \right) \underline{j}$$

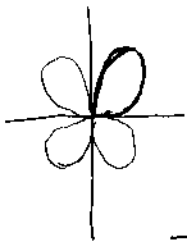
$$\equiv \left(\int_0^s e^{i \frac{r\xi^2}{2}} \, d\xi \right) \underline{i}$$

racordi
 fra archi

formalismo misto

da parte reale
 (la "Clotoide")

comparsa nella
 serie di Fourier

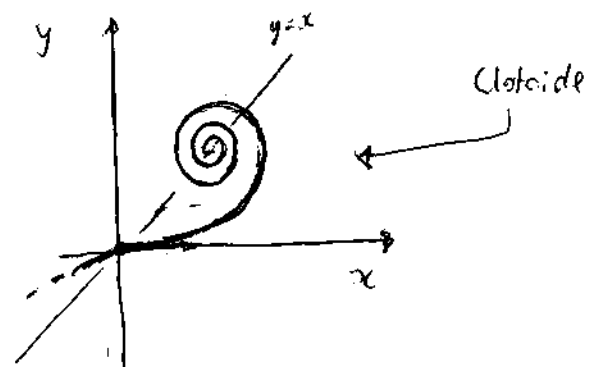


archi
 di Clotoide
 la curvatura varia linearmente

In particolare, si trova che $\int_0^{+\infty} e^{i \frac{r\xi^2}{2}} \, d\xi$ esiste finito (*)

(tramite l'analisi complessa; l'integrale dato non converge assolutamente)

$$(*) \int_0^{\infty} \cos(t^2) \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$



* Cerchio osculatore

sia dato $P \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{r}(s)$), di asse curvilinea s ,
calcolata a partire da un dato iniziale.

La circonferenza di raggio $|\rho(s)| := |\kappa(s)|^{-1}$

(se $\kappa(s) \neq 0$) e di centro $C = P + \rho \underline{n}$, $\rho = \kappa^{-1}$

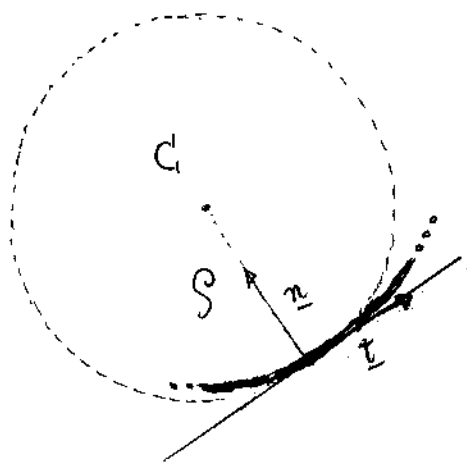
è detta circonferenza osculatrice, o cerchio osculatore

[da osculum = bacio, in latino] alla curva \mathcal{C} in P .

C è detto centro di curvatura, e ρ raggio di curvatura


con linee rosse per
lunghezza

qui $\rho > 0$



o
o

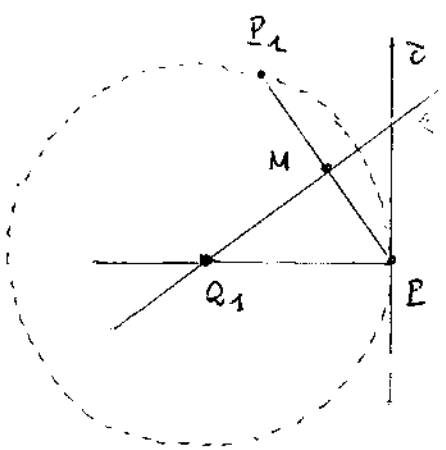
vedi appena
oltre

(contatto tripunto
cf.  $y = x^3$)

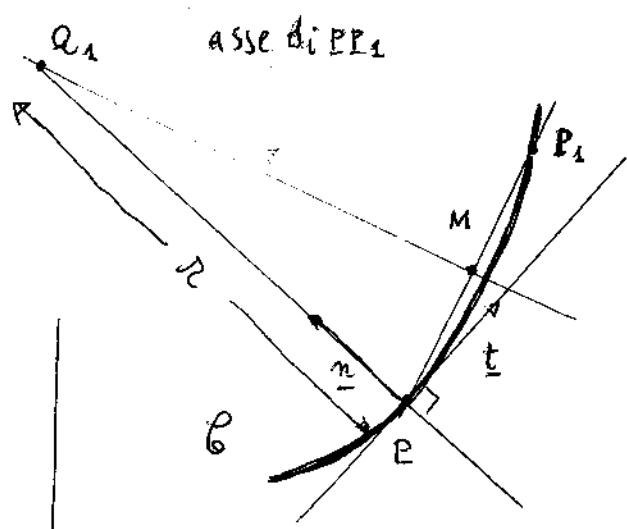
Per una retta $\kappa \equiv 0 \Rightarrow \rho = \infty$ (il cerchio osculatore
può pensarsi come la retta stessa). Per una circonfe-
renza coincide con la circonferenza stessa.

Il cerchio osculatore può vedersi come limite di cerchi tangenti a Γ in P e passanti per un altro punto P_1 della curva, al tendere di quest'ultimo a P

Si noti che, al limite, viene appunto realizzato un contatto tripunto tra la curva e il cerchio osculatore. Questo non esclude la presenza di altri punti di contatto.



costruzione della circonferenza tangente ad una retta data z in un punto P e passante per un ulteriore punto $P_1 \notin z$



Infatti, con riferimento alla figura, si ha:

$$P - M = \frac{1}{2} (P - P_1)$$

$$Q_1 = P + r \underline{n}, \quad \langle Q_1 - M, P_1 - P \rangle = 0 \quad (*)$$

Ma $Q_1 - M = \underbrace{Q_1 - P}_{r \underline{n}} + \underbrace{P - M}_{\frac{1}{2} (P - P_1)} = r \underline{n} - \frac{1}{2} (P_1 - P)$

Sostituendo in (*) si ha: $\langle r \underline{n}, P_1 - P \rangle = \frac{1}{2} \|P_1 - P\|^2$ (**)

Ora, se $P \leftrightarrow s, P_1 \leftrightarrow s + \Delta s, \dotsc$

$$P_1 - P = \Delta s \underbrace{\underline{t}(s)}_t + \frac{\Delta s^2}{2} \underbrace{\underline{t}''(s)}_{r \underline{n} = \mathcal{P}^{-1} \underline{n}} + o(\Delta s^2) \quad (\text{Taylor})$$

e, poiché $\langle t, n \rangle = 0$, e $\|P_1 - P\|^2 = \Delta s^2 + \dots$

la (***) conduce a

$$\frac{\alpha}{\rho} \frac{\Delta s^2}{2} = \frac{\Delta s^2}{2} + o(\Delta s^2)$$

pertanto, dividendo per $\frac{\Delta s^2}{2}$ ambo i membri e

facendo $\Delta s \rightarrow 0$, si ha che $\frac{\alpha}{\rho} \rightarrow 1$,

ovvero $\alpha \rightarrow \rho$, sicché $Q_1 \rightarrow Q$, e concludiamo.

4 formule generali (nel primo)

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t) \quad \underline{p} = \underline{p}(t)$$

$$\dot{\underline{p}} \equiv \underline{\dot{\alpha}} = \frac{d\underline{\alpha}}{dt} = \underbrace{\frac{d}{ds}}_{\underline{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\|\dot{\underline{r}}(t)\|} = v \underline{t}$$

velocità

$\|\dot{\underline{r}}(t)\| = v$ velocità scalare

accelerazione

$$\ddot{\underline{p}} = \dot{v} \underline{t} + v \dot{\underline{t}}$$

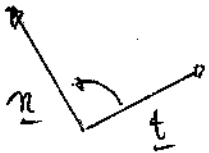
$$\dot{\underline{t}} = \frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= v \cdot \underline{n}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{p}} \equiv \ddot{\underline{r}} = \underbrace{\dot{v} \underline{t}}_{\text{accelerazione tangenziale}} + \underbrace{R v^2 \underline{n}}_{\text{accelerazione centripeta}} = \dot{v} \underline{t} + \frac{v^2}{\rho} \underline{n}$$

* Ricorriamo $R = R(t)$ (utilizziamo il formalismo misto)

$$\dot{\underline{p}} = v \dot{\underline{t}} = v \underline{n} \quad \langle \dot{\underline{p}}, \ddot{\underline{p}} \rangle = \frac{v^3}{\rho}$$



$$\Rightarrow R = \frac{\langle \dot{\underline{p}}, \ddot{\underline{p}} \rangle}{\|\dot{\underline{p}}\|^3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\dot{\alpha} \ddot{\gamma} - \ddot{\alpha} \dot{\gamma}}{(\dot{\alpha}^2 + \dot{\gamma}^2)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\gamma} \\ \ddot{\alpha} & \ddot{\gamma} \end{vmatrix}}{(\dot{\alpha}^2 + \dot{\gamma}^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{r} &= (\alpha, \gamma) \\ \dot{\underline{p}} &= (\dot{\alpha}, \dot{\gamma}) \\ \ddot{\underline{p}} &= (\ddot{\alpha}, \ddot{\gamma}) \\ \dot{\underline{p}} &= (-\dot{\gamma}, \dot{\alpha}) \end{aligned}$$

In particolare, se $y = y(x)$ (ovvero $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$)

$$R(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad \text{con } 1 = \frac{d}{dx}$$

tale formula si può ricavare anche così:

$$R = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d \arctan y'(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \cdot \frac{1}{(1 + y'(x)^2)^{1/2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

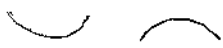
def. di
derivata

Se $R=0$ si hanno i cosiddetti flessi gener-li (ovvero $y''=0$)



(la curva attraversa la tangente, in generale, cioè se $y''' \neq 0$)

Notiamo che, se x è critico ($y'(x) = 0$), il test della derivata seconda dell'analisi t , di fatto, un calcolo

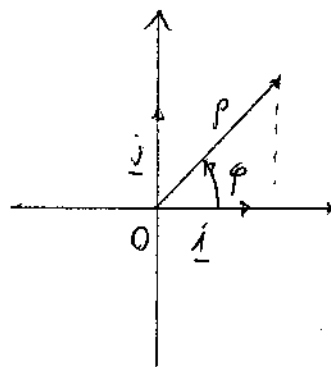


di curvatura

Esprimiamo \mathcal{R} in coordinate polari

$$l: \rho = \rho(\varphi)$$

$$\underline{P} = \rho e^{i\varphi} \underline{i}$$



$$\bullet = \frac{d}{d\varphi}$$

$$\dot{\underline{P}} = \dot{\rho} e^{i\varphi} \underline{i} + i\rho e^{i\varphi} \dot{\varphi} \underline{i} = \dot{\rho} e^{i\varphi} \underline{i} + \rho e^{i\varphi} \dot{\varphi} \underline{j}$$

$$\|\dot{\underline{P}}\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = e^{i\varphi} (\dot{\rho} \underline{i} + \rho \dot{\varphi} \underline{j})$$

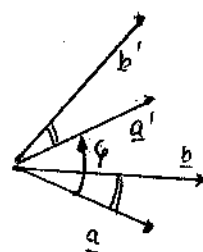
$$i \dot{\underline{P}} = e^{i\varphi} \left(\dot{\rho} \underbrace{i \underline{i}}_{\underline{j}} + \rho \underbrace{i \dot{\varphi} \underline{j}}_{-\dot{\varphi} \underline{i}} \right)$$

$$= e^{i\varphi} (-\rho \dot{\varphi} \underline{i} + \dot{\rho} \underline{j})$$

$$\ddot{\underline{P}} = i e^{i\varphi} (\dot{\rho} \underline{i} + \rho \dot{\varphi} \underline{j}) + e^{i\varphi} (\ddot{\rho} \underline{i} + \dot{\rho} \dot{\varphi} \underline{j})$$

$$= e^{i\varphi} [\dot{\rho} \underline{j} - \rho \dot{\varphi} \underline{i} + \ddot{\rho} \underline{i} + \dot{\rho} \dot{\varphi} \underline{j}]$$

$$= e^{i\varphi} [(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \underline{i} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \underline{j}]$$



$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}', \underline{b}' \rangle$$

una rotazione non
cambia i prodotti
scalari

$$\begin{aligned} \langle i \dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}} \rangle &= -\rho (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) + 2\dot{\rho}^2 \dot{\varphi} \\ &= \rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho \ddot{\rho} \end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \frac{\langle i \dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}} \rangle}{\|\dot{\underline{P}}\|^3} = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho \ddot{\rho}}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2}}$$

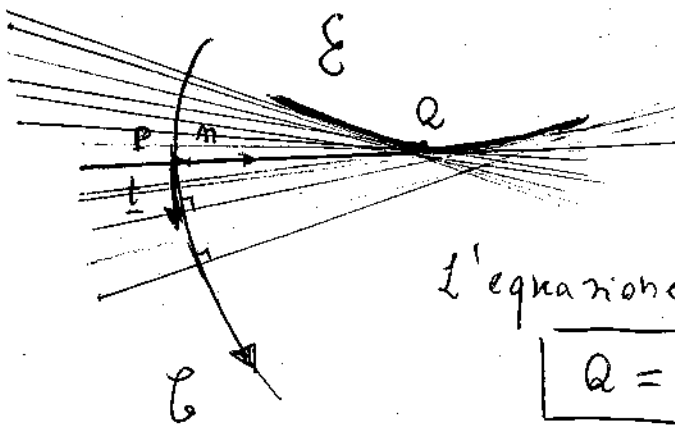
ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

M. Spera - UCSC Brescia

Lezione III

* Evoluta di una curva piana

L'evoluta \mathcal{E} di una curva piana \mathcal{C} (al solito, liscia, regolare, parametrizzata dall'ascissa curvilinea) è per definizione il luogo dei suoi centri di curvatura (centri dei cerchi osculatori nei vari punti della curva). \mathcal{C} , a sua volta, è un'evolvente (o involuta) di \mathcal{E} .



L'equazione di \mathcal{E} è

$$\boxed{Q = P + \rho \underline{n}}$$

raggio di curvatura

$$\rho = \frac{1}{R}$$

Si ha, successivamente $(i = \frac{d}{ds})$

(supponiamo $R \neq 0$)

$$\begin{aligned} Q' &= P' + \rho' \underline{n} + \rho \underline{n}' \\ &= \underline{t} + \rho' \underline{n} + \rho \cdot (-R \underline{t}) \quad \Leftrightarrow \rho R = 1 \\ &= \underline{t} + \rho' \underline{n} - \underline{t} = \rho' \underline{n} \end{aligned}$$

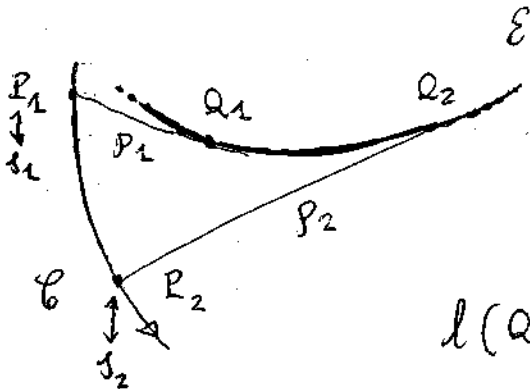
(*) $\boxed{Q' = \rho' \underline{n}}$

Si osserva che la normale in P è tangente ad \mathcal{E} in Q (corrispondente a P).

La (*) fornisce, altresì, per l'elemento di lunghezza d'arco $d\tilde{s}$ su \tilde{E} , l'espressione

$$\boxed{d\tilde{s} = |\rho'| ds}$$

Supponiamo, per semplicità, $\rho > 0$ e $\rho' > 0$ (v. figura accanto)



Si trova, per la lunghezza dell'arco di evoluta $l(Q_1, Q_2)$ compreso tra Q_1 e Q_2 :

$$l(Q_1, Q_2) = \int_{s_1}^{s_2} \rho' ds = \rho_2 - \rho_1$$

$$\boxed{l(Q_1, Q_2) = \rho_2 - \rho_1}$$

ovvero, la diff. di lunghezza tra i raggi di curvatura di C nei punti corrispondenti a Q_1, Q_2 .

Si noti che una retta non ha evoluta e che l'evoluta di una circonferenza si riduce al proprio centro.

La discussione precedente mostra pure che l'evoluta di una curva è l'inviluppo delle proprie normali.

Per spiegare meglio questo punto, facciamo una breve digressione.

★ Inviluppo di una famiglia di curve piane

Sia data una famiglia \mathcal{F} di curve piane (in forma implicita)

$$\boxed{f(x, y, c) = 0} \quad (f \text{ liscia})$$

$(x, y, c) \in \mathcal{R}$: regione di \mathbb{R}^3
(spazio connesso) ↙ parametro

Per ogni c fissato, si ha una curva piana descritta implicitamente. Se $(f_x, f_y) \neq (0, 0)$ in ogni punto,



la retta tangente in $P_0 = (x_0, y_0)$

o c : $f(x, y, c) = 0$ (c fissato)

$$\boxed{f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0}$$

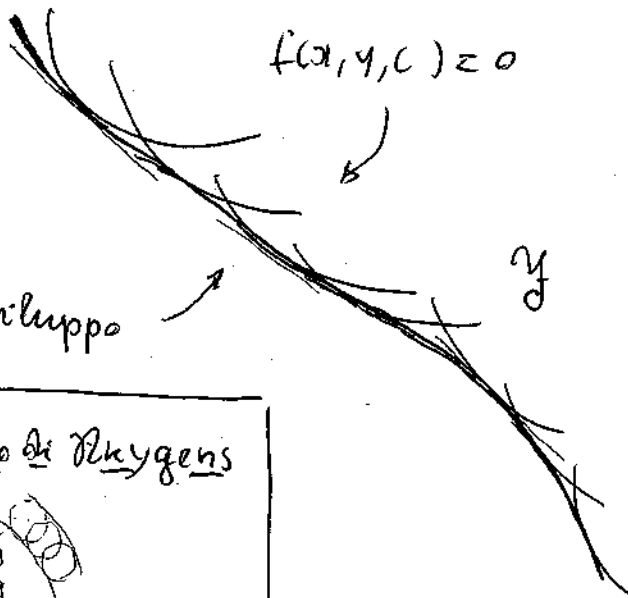
$$\boxed{\langle \nabla f(P_0), \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle = 0} \quad \text{in forma vettoriale}$$

↑
gradiente di f
(c fissato)

Si ricordi poi che, in virtù del teorema del Dini, se ad esempio $f'_y \neq 0$, si

può esplicitare $y = y(x)$, $f(x, y(x)) \equiv 0$ in un opportuno intervallo, $y_0 = y(x_0)$ e $y' = -\frac{f_x}{f_y}$

Il inviluppo della famiglia $f(x, y, c) = 0$ è per definizione una curva (o famiglia di curve) tangente in ogni punto ad una curva della famiglia data. (Si assume distinto dalle curve della famiglia stessa).

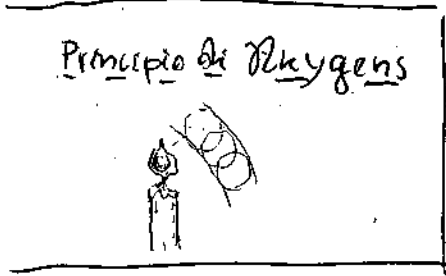


Notiamo che se
 $f_c = \frac{\partial f}{\partial c} \neq 0$,

il teorema del Dini
 fornirebbe la seguente
 descrizione della famiglia \mathcal{F} :

$$g(x, y) = c$$

per qualche g , ovvero



una famiglia di curve di livello di g

Tale descrizione non corrisponde a quanto
 cerchiamo. Siamo costretti pertanto a considerare

il cosiddetto c-discriminante

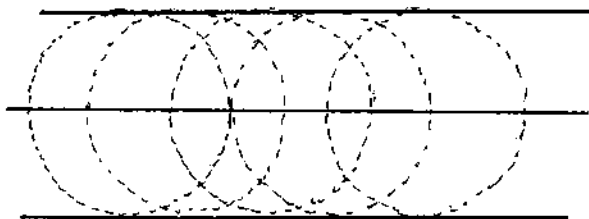
$$\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial c}(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

(eliminando c si ottiene una curva piana)

Esso caratterizza, in generale, l'involuppo cercato

Esempio: 1. $(x-c)^2 + y^2 - 1 = 0$

(circonferenze di raggio 1 con centro sull'asse x)



Determiniamo il C-discriminante.

$$f=0 \quad \begin{cases} (x-c)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad -2(x-c) = 0 \end{cases} \Rightarrow x=c \quad \text{sostituendo in}$$

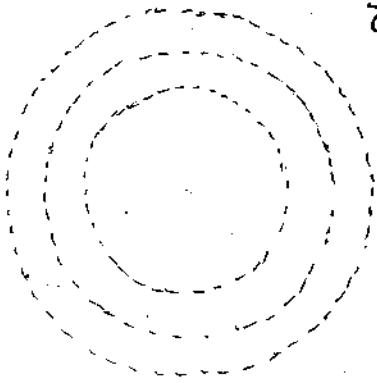
troviamo $y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$ che è

anche il involucro cercato (come è anche intuitivamente chiaro)

2. $f(x,y,c) = x^2 + y^2 - c = 0 \quad (c > 0)$

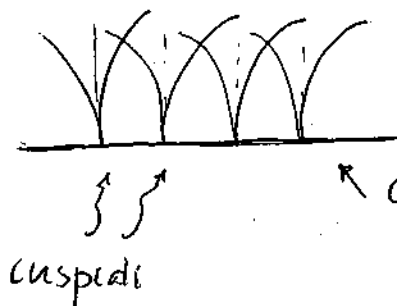
circonferenze concentriche di centro l'origine.

Si ha, da $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$, $-1 = 0$, assurda. Non c'è involucro.



$$f(x,y,c) = 0$$

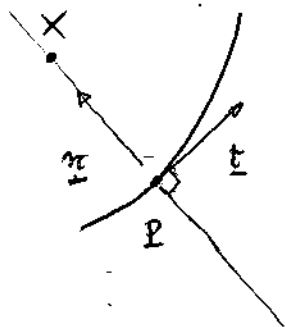
3.



C-discriminante, ma non è un involucro!

Verifichiamo ora che E è l'inviluppo delle normali di C .

sia $R \neq 0$



$$\langle x - p, \underline{t} \rangle = 0$$

equazione della normale a C in P

Traffiamo s , asse anallinea su C ,
come parametro. Si ha, per il C -discriminante

$$f = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle x - p, \underline{t} \rangle = 0 \quad (\diamond) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} \langle x - p, \underline{t} \rangle = 0 \quad (\diamond\diamond) \end{array} \right.$$

Si trova, successivamente

$$\langle \underbrace{-p'}_{-\underline{t}}, \underline{t} \rangle + \langle x - p, \underline{t}' \rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-1 + \langle x - p, R\underline{n} \rangle = 0 \quad (*)$$

ora, poiché $x - p$ è normale a \underline{t} (da (\diamond)),

la $(*)$ fornisce subito

$$x - p = \frac{1}{R} \underline{n}$$

ovvero (cambiando notazione) l'inviluppo cercato è

$$Q = p + \frac{1}{R} \underline{n} \quad (\text{al variare di } s)$$

Cioè proprio l'evolvente di C .

Esempio

Calcoliamo in due modi l'evolvente della parabola

$$P: y^2 = 2px \quad p > 0$$

multiplo delle normali

$$x = \frac{y^2}{2p}$$

p : distanza
foco-
direttrice

parametrizziamo così:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$$


$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{p} \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$$

equazione della normale a P in E :

$$\dot{x}(x - x(t)) + \dot{y}(y - y(t)) = 0 \quad (\text{attenzione...})$$

$$(*) \quad \frac{t}{p} \left(x - \frac{t^2}{2p} \right) + (y - t) = 0$$

$$\boxed{f(x, y, t) = 0}$$

troviamo il "C-discriminante" 

possiamo usare un
parametro qualsiasi,
non necessariamente
la lunghezza dell'arco, poiché
il concetto di multiplo
è intrinseco.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{p} \left(x - \frac{t^2}{2p} \right) + y - t \right) = 0$$

$$\frac{1}{p} \left(x - \frac{t^2}{2p} \right) + \frac{t}{p} \left(-\frac{t}{p} \right) - 1 = 0$$

$$\frac{x}{p} - \frac{t^2}{2p^2} - \frac{t^2}{p^2} - 1 = 0$$

$$x = p \left(3 \frac{t^2}{2p^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} + p$$

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} + p \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - p = \frac{3}{2} \frac{t^2}{p}}$$

La (*) per cambio, fornisce

$$y = -\frac{t}{p} \left(x - \frac{t^2}{2p} \right) + t = -\frac{t}{p} \left(p + \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} - \frac{t^2}{2p} \right) + t$$

$$= -\frac{t}{p} \left(p + \frac{t^2}{p} \right) + t = \cancel{-t} + \cancel{t} - \frac{t^3}{p} = -\frac{t^3}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{t^3}{p^2}}$$

L'inviluppo cercato è allora

$$\begin{cases} x - p = \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} \\ y = -\frac{t^3}{p^2} \end{cases}$$

che può essere riscritto, notando che

$$(x-p)^3 = \frac{27}{8} \frac{t^6}{p^3} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{t^6}{p^4}$$

nella forma

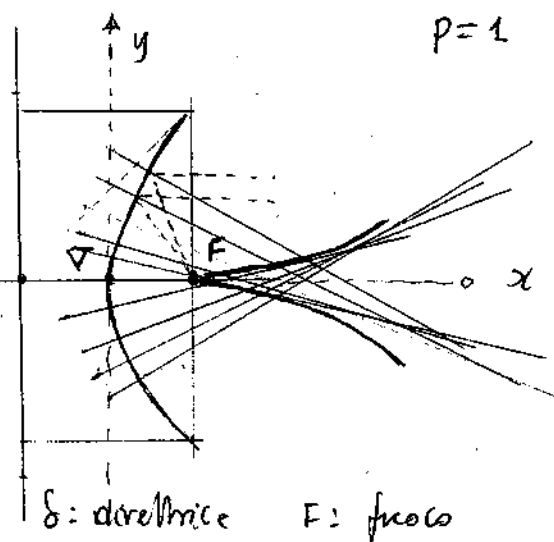
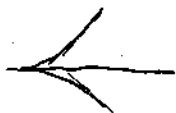
$$(x-p)^3 = \frac{27}{8} p y^2, \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{8(x-p)^3 - 27p y^2 = 0}$$

« parabola semicubica »

Cuspide in F

tangente doppia orizzontale



metodo standard

$$P = \left(\frac{t^2}{2P}, t \right)$$

↓ formalismo misto

$$\dot{P} = \left(\frac{t}{P}, 1 \right)$$

$$i \dot{P} = \left(-1, \frac{t}{P} \right)$$

$$\ddot{P} = \left(\frac{1}{P}, 0 \right)$$

$$\|\dot{P}\|^2 = \frac{t^2}{P^2} + 1 = \frac{t^2 + P^2}{P^2}$$

$$\langle i \dot{P}, \ddot{P} \rangle = -\frac{1}{P}$$

Evoluta:

$$Q - P = \frac{\|\dot{P}\|^2}{\langle i \dot{P}, \ddot{P} \rangle} i \dot{P}$$

$$Q - P = -\frac{\frac{t^2 + P^2}{P^2}}{\frac{1}{P}} \left(-1, \frac{t}{P} \right) = -\frac{t^2 + P^2}{P} \left(-1, \frac{t}{P} \right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{t^2}{2P} = \frac{t^2 + P^2}{P} \\ y - t = -\frac{t^2 + P^2}{P^2} \cdot t \end{cases}$$

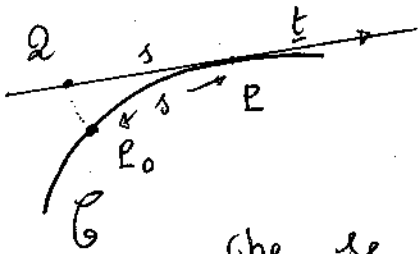
$$\Rightarrow x = \frac{t^2}{P} + \frac{t^2}{2P} + P = \frac{3}{2} \frac{t^2}{P} + P$$

$$y = t - \frac{t^3}{P^2} + t = -\frac{t^3}{P^2}$$

come prima.

* Evolvente di una curva piana (anche: involuta)

Un'evolvente γ di una curva piana \mathcal{C} è una curva piana che ammette \mathcal{C} come evoluta (non è univocamente determinata)



Si fissi $P_0 \in \mathcal{C}$, origine dell'ascissa curvilinea s . Dalle proprietà dell'evoluta, testè discusse, si vede subito

che se $Q \in \gamma$, deve essere:

$$\boxed{Q = P - s \underline{t}} \quad (= P - s P')$$

(e viceversa)

Notare:

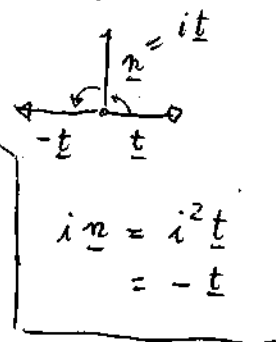
$$\begin{aligned} Q' &= P' - \underline{t} - s \underline{t}' = \cancel{\underline{t}} - \cancel{\underline{t}} - s \underline{R} \underline{n} \\ &= -s \underline{R} \underline{n} \end{aligned}$$

ovvero $Q' \parallel \underline{n}$, come è giusto che sia.

Si ha pure

$$\rightarrow i Q' = -s R \cdot i \underline{n} = + s R \underline{t}$$

formalismo misto

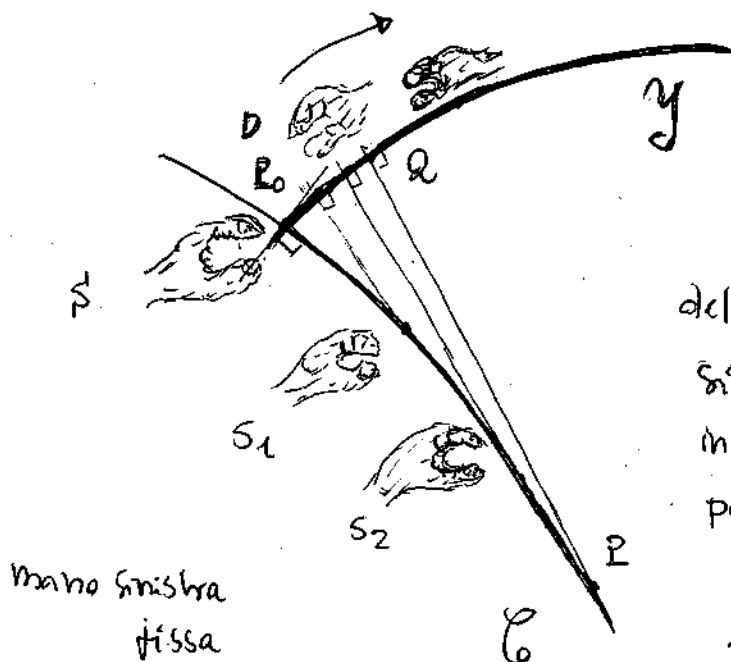


ovvero, la normale all'evolvente in Q è la tangente in P alla curva originaria \mathcal{C} , come dev'essere



Si noti, come anticipato, che γ non è unica, ma dipende dalla scelta di $P_0 \in \mathcal{C}$ (vi pensi, a mo' di analogia, alla relazione tra integrazione e derivazione...)

mano destra variabile.



Si fissa la posizione P della mano sinistra S lungo γ . Si srotola un filo ideale inestensibile di lunghezza pari alla lunghezza dell'arco $\widehat{P_0P}$, tenendolo teso e sempre tangente alla curva. La posizione della mano destra corrisponde a $Q \in \gamma$.

Esempio: evolvente del cerchio

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases} \leftarrow P$$

$$Q = P - l P' = z'' \quad (\text{formalismo complesso})$$

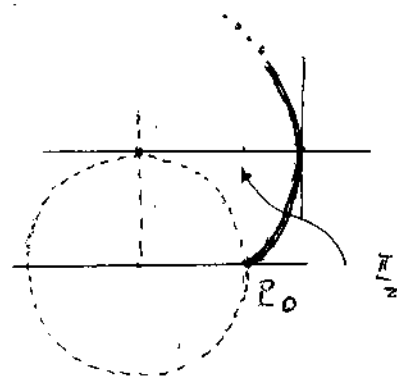
$$= e^{i\varphi} - \varphi i e^{i\varphi} = e^{i\varphi} (1 - i\varphi) =$$

$$= (\cos \varphi + i \sin \varphi) (1 - i\varphi) = \quad (i^2 = -1)$$

$$= \underbrace{\cos \varphi + \varphi \sin \varphi}_x + i \underbrace{(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}_y$$

$$\Rightarrow \gamma: \begin{cases} x = \cos \varphi + \varphi \sin \varphi \\ y = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

di punto iniziale $P_0 = (1, 0)$



$$x = \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} + p \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - p = \frac{3}{2} \frac{t^2}{p}}$$

La (*) per cambio, fornisce

$$y = -\frac{t}{p} \left(x - \frac{t^2}{2p} \right) + t = -\frac{t}{p} \left(p + \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} - \frac{t^2}{2p} \right) + t$$

$$= -\frac{t}{p} \left(p + \frac{t^2}{p} \right) + t = -\cancel{t} + \cancel{t} - \frac{t^3}{p} = -\frac{t^3}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{t^3}{p^2}}$$

L'insieme cercato è allora

$$\begin{cases} x - p = \frac{3}{2} \frac{t^2}{p} \\ y = -\frac{t^3}{p^2} \end{cases}$$

che può essere riscritto, notando che


$$(x-p)^3 = \frac{27}{8} \frac{t^6}{p^3} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{t^6}{p^4}$$

nella forma

$$\Rightarrow \quad (x-p)^3 = \frac{27}{8} p y^2, \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{8(x-p)^3 - 27p y^2 = 0}$$

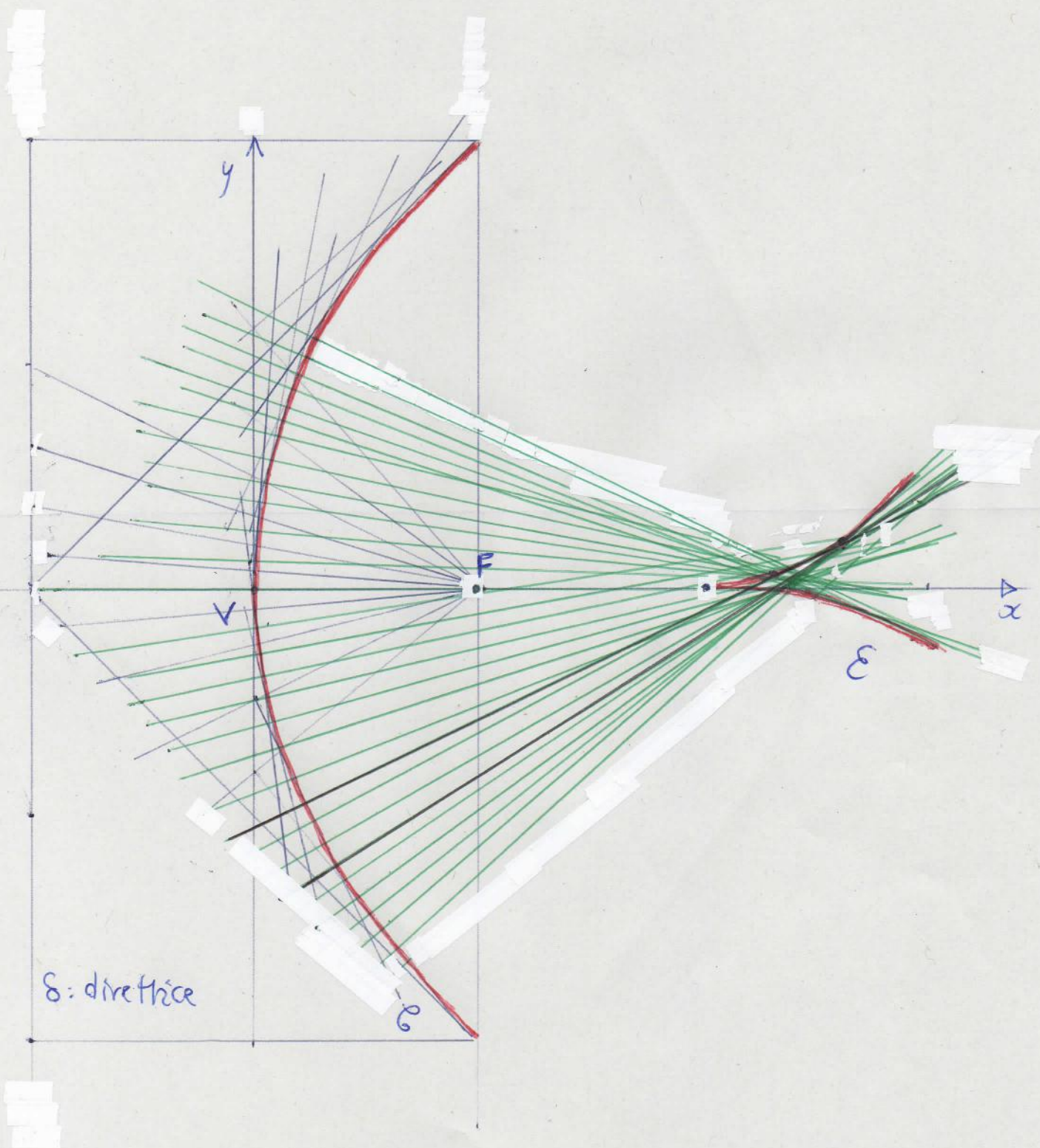
« parabola femilubila »

Cuspide in F 
tangente doppia orizzontale



v. disegno a pag III-8'





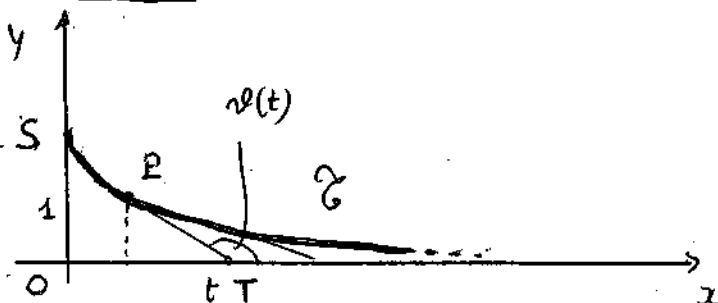
S : directrice

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

M. Spora UCSC Brescia

Lezione IV

* Traiettoria (curva dei forzati)



Lo studio di questa curva è di fondamentale importanza per ciò che segue

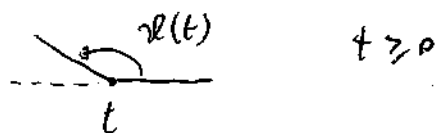
Proprietà caratteristica: il segmento di tangente ET compreso tra la curva e l'asse x⁽⁺⁾ ha lunghezza costante (poniamola = 1).

(+) L'asse x risulta essere un asintoto di γ .

Determiniamo diverse equazioni parametriche di γ

$$\gamma \begin{cases} x = x(t) = t + \cos r(t) \\ y = y(t) = \sin r(t) \end{cases}$$

t : ascissa di T



Si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sin r \cdot \dot{r} \\ \dot{y} = \cos r \cdot \dot{r} \end{cases}$$

prendiamo $t > 0$

$$\Rightarrow \tan r = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos r \dot{r}}{1 - \sin r \dot{r}}, \text{ ovvero}$$

$$\sin r (1 - \sin r \dot{r}) = \cos^2 r \dot{r} \quad \text{e, successivamente,}$$

$$\sin r - \sin^2 r \dot{r} = \cos^2 r \dot{r} \quad (\cos^2 + \sin^2 = 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = \sin r} \quad \text{che è a variabili separabili.}$$

Integriamo:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = t$$

questo integrale è
fondamentale anche
in altri contesti

la costante è
inglobata qui

Poniamo $\xi = \tan \frac{x}{2} \quad (> 0)$

$$\Rightarrow x = 2 \arctan \xi$$

$$dx = \frac{2}{1+\xi^2} d\xi$$

e

$$\sin x = \frac{2\xi}{1+\xi^2} \quad (\text{e } \cos x = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \text{ utilizzata sotto})$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2}{1+\xi^2} \cdot \frac{1+\xi^2}{2\xi} d\xi = \int \frac{d\xi}{\xi} = \log|\xi| + c$$

$$\Rightarrow t = \log \left(\tan \frac{x}{2} \right) + c$$

Se $t=0$, $x = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \log \tan \frac{\pi}{4} = \log 1 = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

In definitiva si ha t

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \log \tan \frac{x}{2} + \cos x \\ y = \sin x \end{array} \right.$$

$$y = \sin x$$

$$0 \leq x < \pi$$

oppure, da

$$e^t = \tan \frac{x}{2}, \text{ si ottiene}$$

$$\sin x = \frac{2e^t}{1+e^{2t}} = \frac{2}{e^t+e^{-t}} = \frac{1}{\cosh t}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = \frac{e^{-t} - e^t}{e^{-t} + e^t} = -\tanh t$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

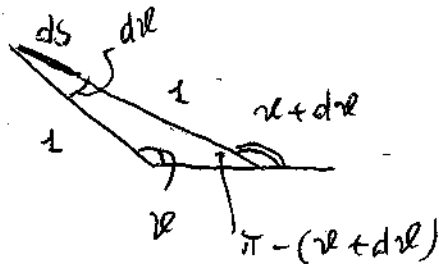
si ha:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

che fornisce la parametrizzazione in t richiesta:

$$\begin{cases} x = t - \tanh t & t \geq 0 \\ y = \frac{1}{\cosh t} \quad (= \operatorname{sech} t) \end{cases}$$

Calcoliamo ora la curvatura della trattrice "all'antica"
(ragionamento non rigoroso ma corretto)



Dalla proprietà caratteristica della trattrice, applicando il teorema dei seni al triangolo a lato, si ha:

$$\frac{1}{\sin(\pi - (\varphi + d\varphi))} = \frac{1 + ds}{\sin \varphi} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{1}{\sin(\varphi + d\varphi)} = \frac{1 + ds}{\sin \varphi} \quad \text{e, successivamente,}$$

$$ds = \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + d\varphi)} - 1 = \frac{\sin \varphi - \sin(\varphi + d\varphi)}{\sin(\varphi + d\varphi)}$$

$$\sim \frac{-\cos \varphi \cdot d\varphi}{\sin \varphi} = -\frac{1}{\tan \varphi} d\varphi$$

$ds = -\frac{1}{\tan \varphi} d\varphi$ fornisce l'elemento di lunghezza d'arco di \mathcal{C}

(e si integra facilmente: $\int -\frac{1}{\tan \varphi} d\varphi = \int \frac{-\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi =$

* Ma $R = \frac{d\varphi}{ds} \Rightarrow$

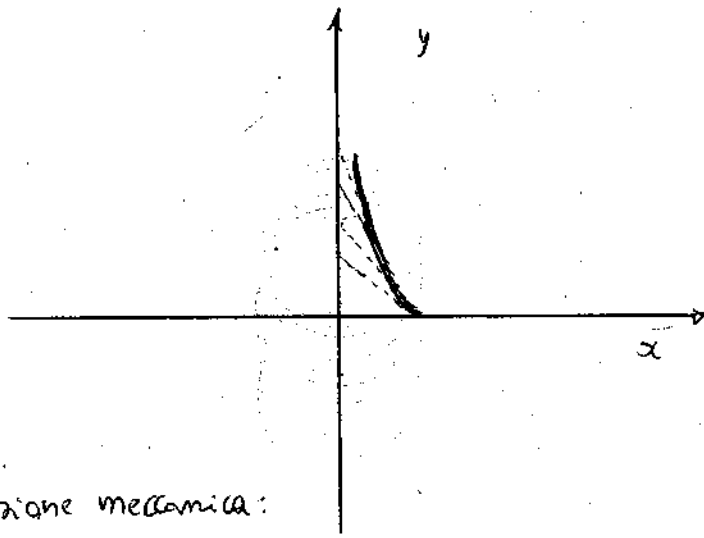
$$R = -\tan \varphi$$

$$\varphi > \frac{\pi}{2}$$

$$= -\log |\sin \varphi| + C$$

$$(= -\log \sin \varphi + C$$

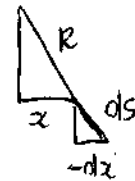
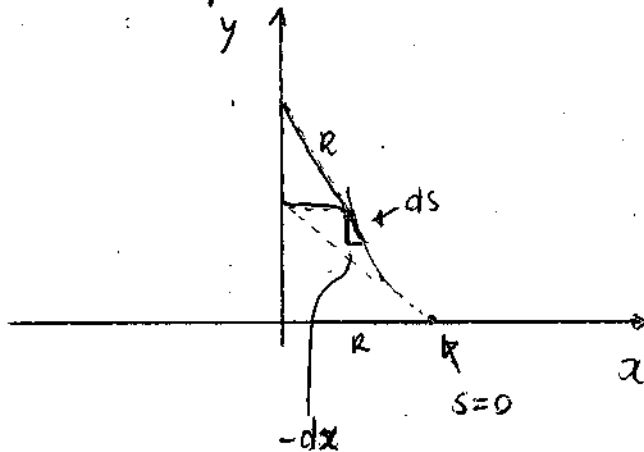
Misurando da S ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), viene $C = 1$



Interpretazione meccanica:

La traiettoria è anche la traiettoria ortogonale alla famiglia delle circonferenze di raggio fissato con centro sull'asse y (in figura) (Newton)

È possibile anche parametrizzarla tramite la lunghezza d'arco in modo semplice:



$$\frac{dx}{ds} = -\frac{x}{R}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{ds}{R} \Rightarrow$$

$$x = C_1 e^{-\frac{s}{R}}$$

$$\text{e } s=0 ; x=R \Rightarrow C_1=R$$

$$x = R e^{-\frac{s}{R}}$$

$$\text{e } R=1$$

$$\boxed{x = e^{-s}}$$

← tornerà utile in seguito

L'equazione $y = y(s)$ è più complicata:

$$dx = -e^{-s} ds$$

$$dx^2 = e^{-2s} ds^2 = e^{-2s} (dx^2 + dy^2)$$

$$\Rightarrow dy^2 = (1 - e^{-2s}) e^{2s} dx^2 = (1 - e^{-2s}) ds^2$$

$$\Rightarrow dy = \sqrt{1 - e^{-2s}} ds$$

$$y = \int \sqrt{1 - e^{-2s}} ds \quad \text{si pone } \sqrt{1 - e^{-2s}} = \xi$$

$$1 - e^{-2s} = \xi^2 \quad e^{-2s} = 1 - \xi^2 \quad 0 \leq \xi < 1$$

$$-2s = \log(1 - \xi^2)$$

$$s = -\frac{1}{2} \log(1 - \xi^2)$$

$$ds = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \xi^2} (-2\xi) d\xi = \frac{\xi}{1 - \xi^2} d\xi$$

$$y = \int \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} d\xi = \int \frac{\xi^2 - 1 + 1}{1 - \xi^2} d\xi = \int \left(-1 + \frac{1}{1 - \xi^2}\right) d\xi =$$

$$= -\xi + \int \frac{1}{1 - \xi^2} d\xi = -\xi + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - \xi} + \frac{1}{1 + \xi}\right) d\xi =$$

$$= -\xi + \frac{1}{2} \left\{ \log\left(\frac{1}{1 - \xi}\right) + \log(\xi + 1) \right\} + c = -\xi + \log \sqrt{\frac{\xi + 1}{1 - \xi}} + c$$

$$= -\sqrt{1 - e^{-2s}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2s}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2s}}} \right) + c ; \quad \text{se } s=0, \xi=0, y=0 \Rightarrow c=0$$

si ha, m definitiva:

$$\begin{cases} x = e^{-s} \\ y = -\sqrt{1 - e^{-2s}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2s}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2s}}} \right) \end{cases}$$

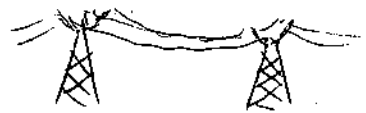
ovvero

$$y = y(x) = -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \right)$$

$0 < x \leq 1$

* L'evolvente di una catenaria è una catenaria (*)

↳ Catenaria: $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



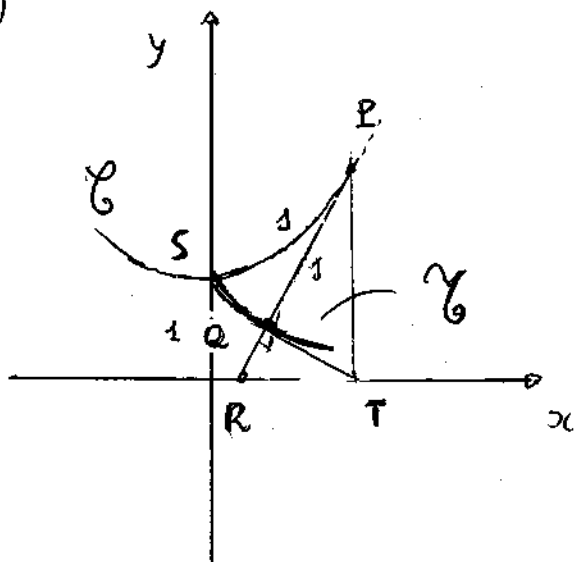
per x piccolo è $y = \frac{1}{2}(1+x + \frac{x^2}{2} + 1-x + \frac{x^2}{2} + \dots)$

curva descritta da fili tesi, pesanti

$= 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$

e si può approssimare con un arco di parabola

(G. Galileo)



cos'è importante per gli sviluppi successivi (pseudosfera di Beltrami)

Facciamo vedere che l'evolvente di C , di punto iniziale $S = (0,1)$ è una catenaria

$$P = x \underline{i} + \cosh x \underline{j}$$

$$\cosh' = \sinh$$

$$\sinh' = \cosh x$$

$$\frac{dP}{dx} = \underline{i} + \sinh x \underline{j}$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

calcoliamo $s = l(\widehat{SP})$ è subito:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_0^x \cosh t dt = \sinh x$$

evolvente:

$$Q = P - \underbrace{\sinh x}_s \cdot \frac{dP}{ds}$$

Ma $\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dx} \left(\frac{dx}{ds} \right)$

$$= \frac{1}{\cosh x} (\underline{i} + \sinh x \underline{j})$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 Q &= \alpha \underline{i} + \cosh \alpha \underline{j} - \tanh \alpha (\underline{i} + \sinh \alpha \underline{j}) \\
 &= (\alpha - \tanh \alpha) \underline{i} + \left(\cosh \alpha - \frac{\sinh^2 \alpha}{\cosh \alpha} \right) \underline{j} \\
 &= (\alpha - \tanh \alpha) \underline{i} + \frac{\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha}{\cosh \alpha} \underline{j} \\
 &= (\alpha - \tanh \alpha) \underline{i} + \frac{1}{\cosh \alpha} \underline{j}
 \end{aligned}$$

ovvero, posta $\alpha = t$, l'equazione parametrica di γ vista in precedenza.

Facciamo la seguente osservazione, importante per il seguito: consideriamo la tangente a γ in Q , e troviamo l'intersezione T con l'asse x :

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{d\alpha} &= \left(1 - \left(\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} \right)' \right) \underline{i} + \frac{-\sinh \alpha}{\cosh^2 \alpha} \underline{j} \\
 &= \left(1 - \frac{\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha}{\cosh^2 \alpha} \right) \underline{i} - \frac{\sinh \alpha}{\cosh^2 \alpha} \underline{j} \\
 &= \frac{\sinh^2 \alpha}{\cosh^2 \alpha} \underline{i} - \frac{\sinh \alpha}{\cosh^2 \alpha} \underline{j} \\
 &= \tanh^2 \alpha \underline{i} - \frac{\tanh \alpha}{\cosh \alpha} \underline{j}
 \end{aligned}$$

retta tangente:
$$U = Q + u \frac{dQ}{d\alpha} \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases}
 X = \alpha - \tanh \alpha + u \tanh^2 \alpha \\
 Y = \frac{1}{\cosh \alpha} - u \frac{\tanh \alpha}{\cosh \alpha}
 \end{cases}$$

poniamo $Y = 0$:
$$u = \frac{1}{\tanh \alpha} \quad (\neq 0)$$

Si che $X = x - \tan h x + \tan h x = x$

= ascissa di $P \in \mathcal{C}$

★★ Il triangolo PRT è pertanto rettangolo in P ,
 e QT (segmento di tangente compreso tra Q e l'asse x),
 di lunghezza costante $= 1$, ne è l'altezza relativa
all'ipotenusa PR . Il secondo teorema di Euclide

fornisce perciò: $\boxed{QR \cdot PR = 1}$ Questa relazione

sarà usata in seguito.

Osservazione . Per la curvatura di γ si trova:

$$R(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\delta_{cat}} = \frac{1}{\sinh x}$$

Ma abbiamo già trovato $R = -\tan \vartheta$.

Controlliamo l'uguaglianza delle due espressioni:

$$\tan \vartheta = \frac{\sinh \vartheta}{\cosh \vartheta} = \frac{1}{\cosh t} \cdot \frac{-1}{\tanh t} = -\frac{1}{\sinh t} \quad \checkmark$$

(qui $t = x$)

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

M. Spina - UCSC Brescia

★ La cicloide ("Elena della geometria")

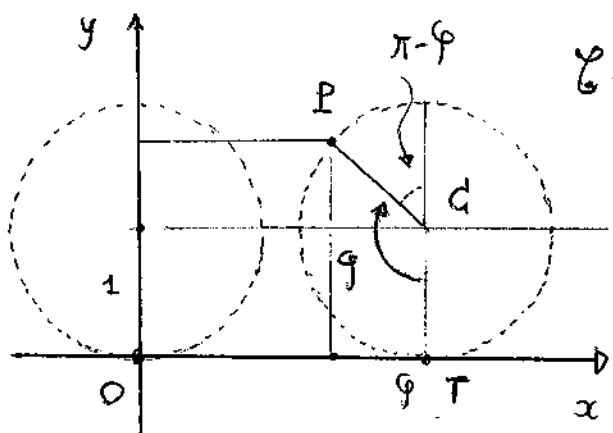
Lezione V

(o rullotta; in francese "roulette")

È la curva descritta da un punto generico di una circonferenza che rotola lungo una retta senza strisciare

(es: la traiettoria di un punto su una ruota di bicicletta).

si trova subito (v. figura)



$$\begin{cases} x = \varphi - \cos\varphi \\ y = 1 - \cos\varphi \end{cases}$$

Facciamo vedere che

★ l'evolvente di una cicloide è ancora una cicloide



$$\text{Qui } l = \frac{d}{d\varphi}$$

$$\underline{T} = \varphi \underline{i}$$

$$\underline{P} = (\varphi - \sin\varphi) \underline{i} + (1 - \cos\varphi) \underline{j}$$

$$\underline{P}' = (1 - \cos\varphi) \underline{i} + \sin\varphi \underline{j}$$

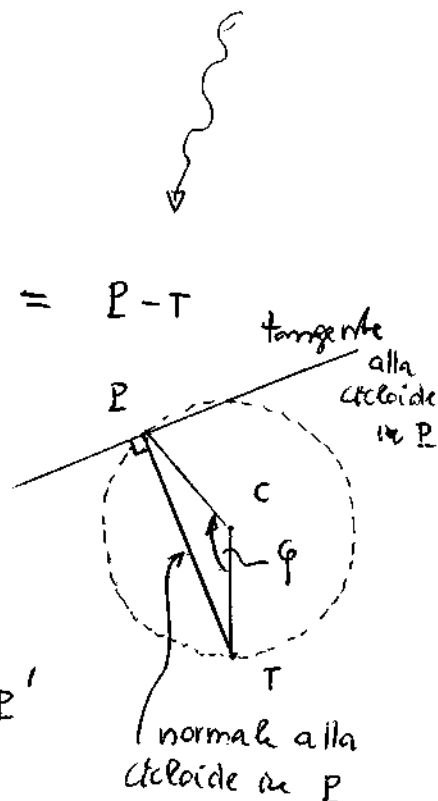
$$\underline{i} \underline{P}' = -\sin\varphi \underline{i} + (1 - \cos\varphi) \underline{j} = \underline{P} - \underline{T}$$

formalismo misto

$$\underline{P}'' = \sin\varphi \underline{i} + \cos\varphi \underline{j}$$

Il centro di curvatura corrispondente a \underline{P} è

$$\underline{Q} = \underline{P} + \rho \underline{n} = \underline{P} + \frac{\|\underline{P}'\|^2}{\langle \underline{i} \underline{P}', \underline{P}'' \rangle} \underline{i} \underline{P}'$$



$$\|E'\|^2 = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi)$$

$$\begin{aligned} \langle E', E'' \rangle &= -\sin^2\varphi + (1 - \cos\varphi)\cos\varphi \\ &= \underbrace{-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}_{-1} + \cos\varphi = \cos\varphi - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = E - 2(E - T) = E + 2(T - P)$$

(\Rightarrow ^{*} il raggio di curvatura è il doppio del segmento di normale \overline{ET})

Scriviamo $Q = E + 2(T - P)$ in componenti

$$\begin{aligned} Q &= \underbrace{(\varphi - \sin\varphi) \underline{i} + (1 - \cos\varphi) \underline{j}}_E + 2 \underbrace{(\sin\varphi \underline{i} + (\cos\varphi - 1) \underline{j})}_{T - P} \\ &= (\varphi + \sin\varphi) \underline{i} + (\cos\varphi - 1) \underline{j} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} x = \varphi + \sin\varphi \\ y = \cos\varphi - 1 \end{cases}$$

che è ancora una cicloide (v. figura)

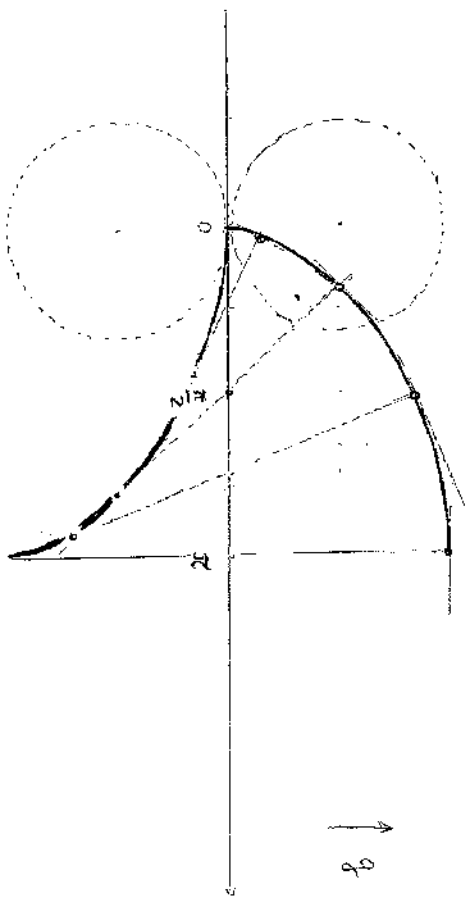
Le proprietà evidenziate agevolano il tracciamento della curva.

Questa proprietà è responsabile del funzionamento del pendolo cicloidale (Huygens, "Horologium oscillatorium").

★★ La cicloide è tautocrona (le oscillazioni del pendolo cicloidale sono isocrone - non solo le "piccole" oscillazioni, come accade nel pendolo semplice) e anche brachistocrona: una pallina



pesante che rotoli lungo un profilo impiega il minor tempo per andare da A a B precisamente se il profilo è cicloidale.

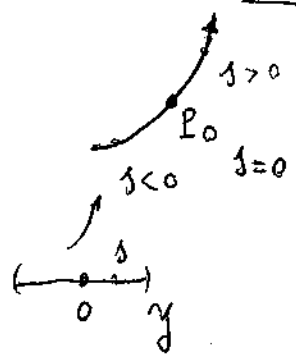


ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Mauro Spora UCSC Brescia

Lezione VI * geometria differenziale delle curve nello spazio

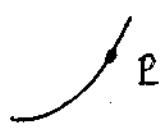
sia \mathcal{C} una curva liscia, regolare in \mathbb{R}^3 , parametrizzata dall'ascissa curvilinea (misurata a partire da un suo punto P_0):



spesso, per comodità, in virtù dell'orientamento della curva, la lunghezza d'arco sarà positiva da un lato e negativa dall'altro (v. figura).

Consideriamo nuovamente $\underline{t}' = \underline{r}''$ (accelerazione di $\underline{r} = \underline{r}(s)$), detta anche vettore di curvatura.

La curvatura di \mathcal{C} in P è, per definizione, il modulo di \underline{r}'' :



$$\mathcal{K}(P) \equiv \mathcal{K}(s) = \|\underline{r}''(s)\| \quad (\geq 0)$$

Curvatura

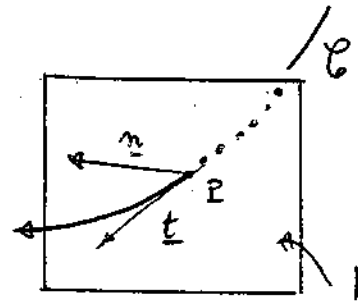
Supponiamo $\mathcal{K} > 0 \quad \forall s \in \gamma$: in tal caso la curva è detta biregolare. In tal caso risulta univocamente determinato \underline{n} (versore normale, o normale principale)

tale che

$$\underline{r}'' = \mathcal{K} \cdot \underline{n}$$

$\rho := \frac{1}{\mathcal{K}}$ è detto
raggio di curvatura

Si osserva che $\langle \underline{r}'', \underline{r}' \rangle = 0$ (\underline{r}' è un versore)



plano normale a \mathcal{C} : piano per $P \perp \underline{t}$ in P



Nei punti in cui $r'' = 0$ (flessi della curva)

n risulta indeterminato

Si noti qui una differenza profonda rispetto al caso piano: in quest'ultimo n era sempre univocamente definito,

e la curvatura possedeva un segno.

Nello spazio $R \geq 0$.

Ovviamente, la teoria spaziale può essere applicata al piano.

L'equazione del piano normale a ℓ in $P = P(s)$, è

$$\langle X - P, \underline{t} \rangle = 0$$

ovvero

$$\langle \underline{r} - \underline{r}(s), \underline{t}(s) \rangle = 0$$

$$x'(s)(x - x(s)) + y'(s)(y - y(s)) + z'(s)(z - z(s)) = 0$$

o, usando un parametro qualsiasi t

$$\langle X - P, \dot{\underline{r}} \rangle = 0$$

oppure

$$\langle \underline{r} - \underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle = 0$$

e, in componenti - dato un riferimento cartesiano

$$\dot{x}(t)(x - x(t)) + \dot{y}(t)(y - y(t)) + \dot{z}(t)(z - z(t)) = 0$$

poiché $\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \|\dot{\underline{r}}\| \underline{t} \neq 0$

Il primo passante per P e di giacitura individuata da \underline{t} ed \underline{n} si chiama piano osculatore (π_P).

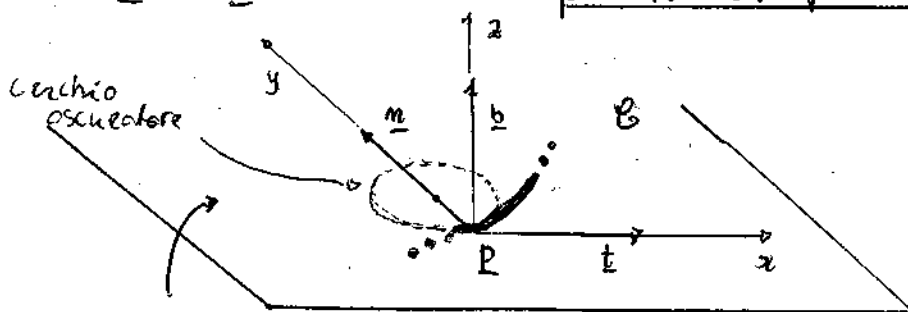
La circonferenza di tale piano con centro in $C = P + \rho \underline{n}$ e raggio ρ è il cerchio osculatore (α_P in P). Vedremo in seguito che quest'ultimo viene realizzato come intersezione del piano osculatore con la sfera osculatrice (v. oltre).

Poniamo ora $\underline{b} := \underline{t} \times \underline{n}$ (vettore binormale: risulta ortogonale al piano osculatore)

Il sistema di riferimento $(P, \underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$

si chiama triedro principale (o fondamentale, o di Frénet)

in P (ed è mobile) ed è il sistema di riferimento naturale per studiare la curva in un intorno di un suo punto. Il piano per P con giacitura individuata da \underline{t} e \underline{b} è detto piano rettificante

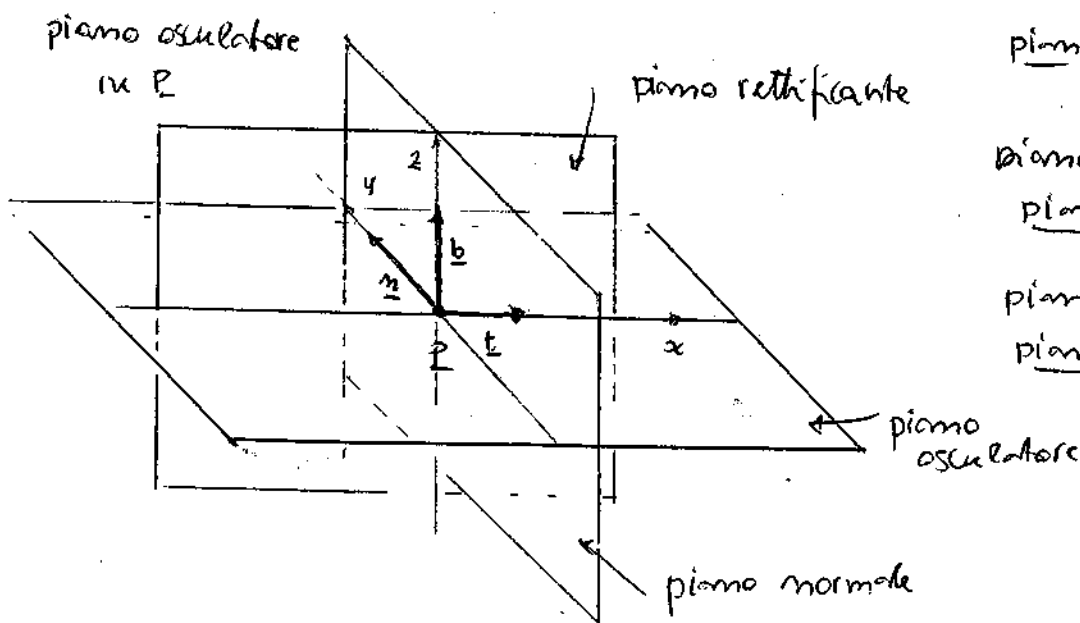


i piani introdotti sono detti, collettivamente, piani principali

piano (P, x, y) :
piano osculatore

piano (P, y, z) :
piano normale

piano (P, x, z) :
piano rettificante



*** Formule di Frénet - Serret

Si vuole studiare la variazione del tricetro fondamentale lungo \underline{c} . Prendiamo

$$\underline{t}' = \kappa \underline{n}$$

(che definisce κ e \underline{n} ; al solito richiediamo

$$\kappa = \|\underline{t}'\| = \|\underline{t}''\| > 0$$

Successivamente, dovremo

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$$

ottenendo

$$\underline{b}' = \underbrace{\underline{t}' \times \underline{n}}_{\substack{\text{"}\kappa \underline{n}\text{"} \\ = 0}} + \underline{t} \times \underline{n}' = \underline{t} \times \underline{n}'$$

che ci dice che $\langle \underline{b}', \underline{t} \rangle = 0$ (e $\langle \underline{b}', \underline{n}' \rangle = 0$, che non ci dà informazioni al momento)

Ma, dato che $\langle \underline{b}', \underline{b} \rangle = 0$,

ne segue

$$\underline{b}' = \tau \underline{n} \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R}$$

* τ : torsione di \underline{c} in \mathbb{R}

* velocità di variazione del piano osculatore (misura la "spazialità" di una curva (attenzione...))

ora, da $\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}$

si ha pure

$$\begin{aligned} \underline{n}' &= \underline{b}' \times \underline{t} + \underline{b} \times \underline{t}' = \underbrace{\tau \underline{n} \times \underline{t}}_{-\underline{t}} + \kappa \underbrace{\underline{b} \times \underline{n}}_{-\underline{t}} \\ &= -\kappa \underline{t} - \tau \underline{b} \end{aligned}$$

In definitiva, giunge alle formule di Frénet - Serret

$$\begin{cases} \underline{t}' = R \underline{n} \\ \underline{n}' = -R \underline{t} - \tau \underline{b} \\ \underline{b}' = \tau \underline{n} \end{cases} \quad \begin{matrix} l = \frac{d}{ds} \\ R > 0 \end{matrix}$$

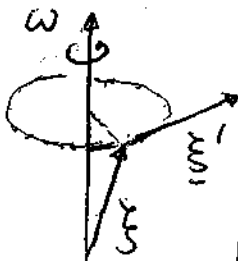
◆ Le (*) sono suscettibili di una semplice interpretazione meccanica
 Possiamo scrivere le * in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \underline{t}' \\ \underline{n}' \\ \underline{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R & 0 \\ -R & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

← matrice antisimmetrica

oppure nella forma

$$\underline{\xi}' = \underline{\omega} \times \underline{\xi}$$



tramite il

* vettore di Darboux

$$\underline{\omega} = -\tau \underline{t} + R \underline{b}$$

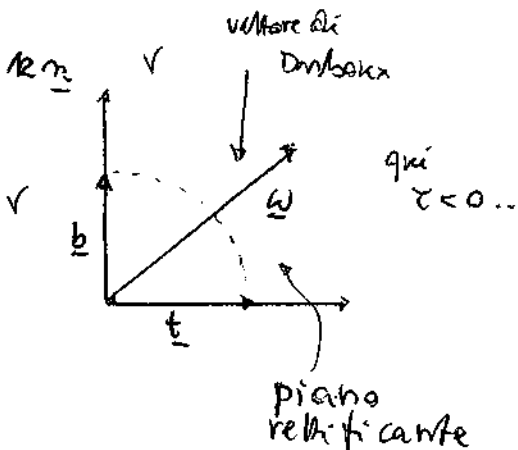
$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad \underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

che fornisce la velocità angolare della "rotazione infinitesimale" del triedro di Frenet

Controlliamo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \underline{i} \leftrightarrow \underline{t}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \underline{j} \leftrightarrow \underline{n}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \underline{k} \leftrightarrow \underline{b}$$

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\underline{n} \cdot (-R) = R \underline{n} \\ \underline{n}' &= \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & R \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -R \underline{t} - \tau \underline{b} \\ \underline{b}' &= \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & R \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tau \underline{n} \end{aligned}$$

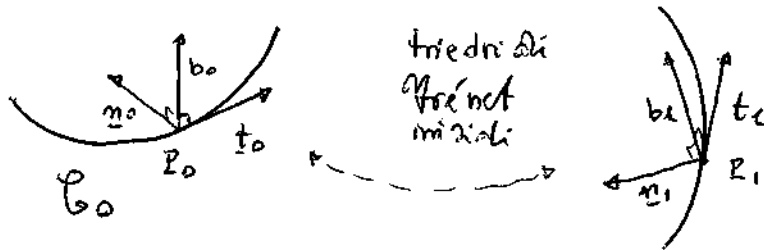


In definitiva, il sistema di riferimento di Frenet
 subisce una rotazione "infinitesimale" attorno all'origine che,
 a sua volta, trasla di un tratto "infinitesimo" lungo la curva.

Esiste poi il teorema fondamentale delle curve spaziali:
curvatura e torsione individuano una curva a meno
 di un movimento rigido

$$R = R(s) > 0$$

$$\tau = \tau(s)$$



Infatti:

tramite una traslazione e una rotazione opportune si portano
 i punti P_0 e P_1 a coincidenza, assieme ai loro appartati
 di Frenet iniziali.

★ Le formule di Frenet danno vita ad un problema di
Cauchy (sistema non autonomo, omogeneo, di equazioni differenziali
 lineari del primo ordine), che ammette

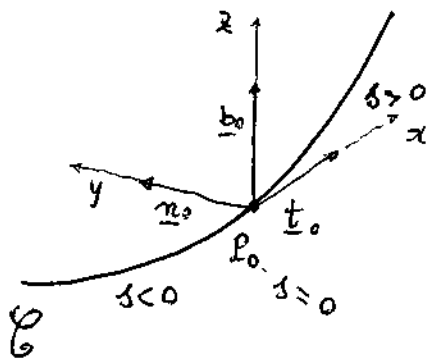
una unica soluzione, se $R_0(s) = R_1(s)$, $\tau_0(s) = \tau_1(s)$

$$\Rightarrow \underline{w}_0(s) = \underline{w}_1(s)$$

(vettori di Darboux)

La soluzione può essere scritta esplicitamente in termini
 di integrali iterati (di Chen).

♣ Studio locale di una curva spaziale nell'intorno di un suo punto tramite il riferimento mobile di Frénet.



$$\mathcal{C}: \underline{r} = \underline{r}(s) \quad s \in \gamma \quad (\partial \mathcal{O})$$

biregolare

quì sappiamo che $\underline{r}' = \underline{t}$,

$$\underline{r}'' = \kappa \underline{n} \quad \text{Procuriamoci}$$

\underline{r}''' utilizziamo le formule di Frénet:

$$\begin{aligned} \underline{r}''' &= (\underline{r}'')' = (\kappa \underline{n})' = \kappa' \underline{n} + \kappa \underline{n}' = \\ &= -\kappa^2 \underline{t} + \kappa' \underline{n} - \kappa \tau \underline{b} \end{aligned}$$

2° formula di Frénet

Sviluppiamo in serie di Mac-Laurin fino all'ordine 3 e utilizziamo il riferimento di Frénet in P_0

$$\underline{r}(s) = \underbrace{\underline{r}(0)}_{\underline{0}} + s \underbrace{\underline{r}'(0)}_{\underline{t}_0} + \frac{s^2}{2} \underbrace{\underline{r}''(0)}_{\kappa(0)\underline{n}_0} + \frac{s^3}{6} \underbrace{\underline{r}'''(0)}_{-\kappa^2(0)\underline{t}_0 + \kappa'(0)\underline{n}_0 - \kappa(0)\tau(0)\underline{b}_0} + \dots$$

che fornisce, in componenti (qui $\kappa(0) = \kappa$
 $\tau(0) = \tau$)

$$\left\{ \begin{aligned} x = x(s) &= s - \frac{\kappa^2}{6} s^3 + \dots \\ y = y(s) &= \frac{\kappa}{2} s^2 + \frac{\kappa'}{6} s^3 + \dots \\ z = z(s) &= -\frac{\kappa \tau}{6} s^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

formule di notevole utilità (v. oltre per la discussione del loro uso nella teoria di de Saint-Venant)

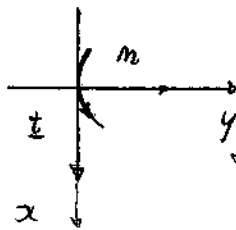
Andiamoci a considerare per ora solo i primi termini della sviluppo:

$$\begin{cases} x = s + \dots \\ y = \frac{12}{2} s^2 + \dots \\ z = -\frac{12\tau}{6} s^3 + \dots \end{cases}$$

Cubica gobba, approssimante \mathcal{C} in un intorno di P_0

Proiettiamo sui piani coordinati

piano osculatore:

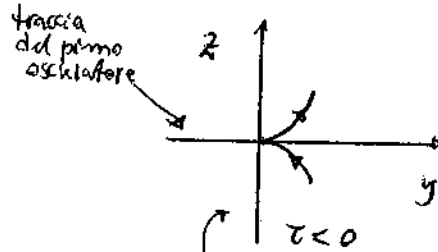


$$y = \frac{12}{2} x^2$$

parabola

convessità dalla parte di m

piano normale:



$$\begin{cases} y = \frac{12}{2} s^2 \\ z = -\frac{12\tau}{6} s^3 \end{cases}$$

Cuspide

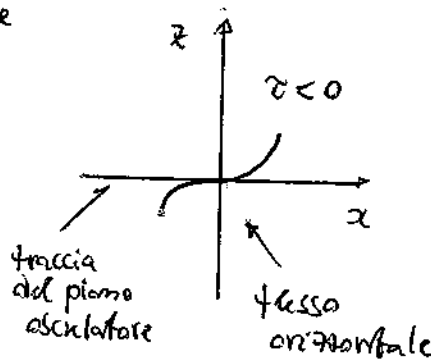
Ci è una tangente doppia orizzontale

⚠ la curva \mathcal{C} è liscia, la singolarità dipende dalla proiezione

piano rettificante

$$\begin{cases} x = s \\ z = -\frac{12\tau}{6} s^3 \end{cases}$$

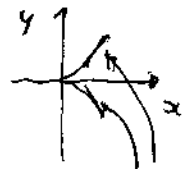
$$z = -\frac{12\tau}{6} x^3$$



$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad y = x^{3/2} \quad x \geq 0$$

$$|y^2 - x^3 = 0|$$

in $(0,0)$ $y^2 = 0$ ad l'asse x contatto due volte



Vanno a coincidere al limite

Osserviamo che R e z non dipendono
dall'orientamento di \underline{e} .

Ciò è ovvio per R ; in ogni caso, cambiando
 l'orientamento:

$$\underline{t} \mapsto -\underline{t} \quad \left(\frac{d\underline{r}}{d(-s)} = -\frac{d\underline{r}}{ds} \right)$$

$$\underline{n} \mapsto \underline{n} \quad \left(\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{d(-\underline{t}')}{d(-s)} \right)$$

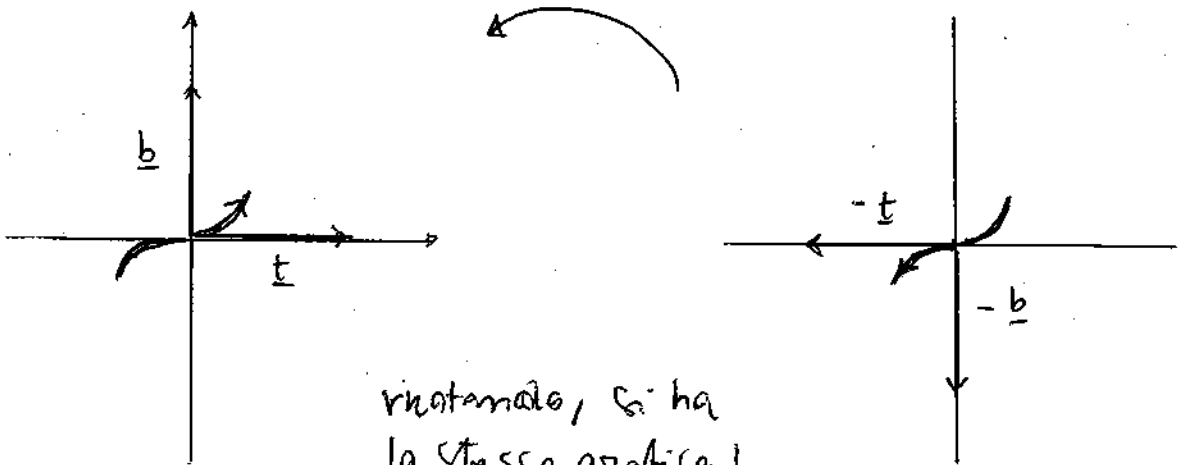
$$\Rightarrow \underline{b} \mapsto -\underline{b}$$

Si che

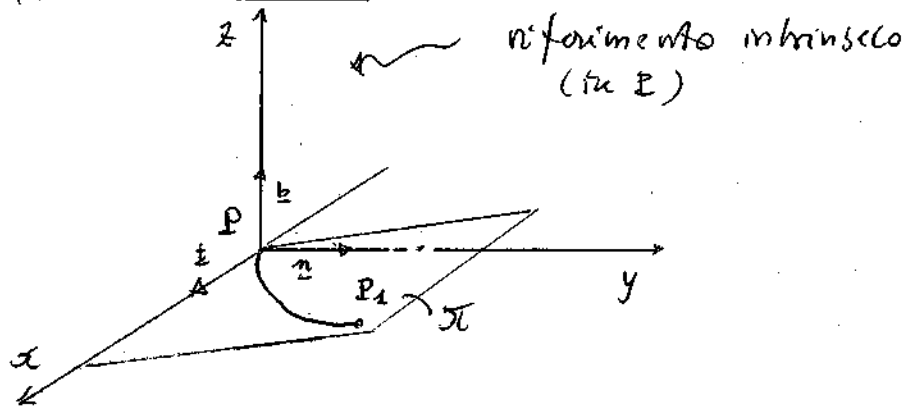
$$\underline{b}' = \frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{d(-\underline{b})}{d(-s)} \mapsto \underline{b}'$$

ma, dato che $\underline{b}' = z \underline{n}$,

anche z rimane invariata.



diamo un'ulteriore interpretazione geometrica del piano osculatore.



Il piano osculatore a \mathcal{C} in P è la posizione limite dei piani π contenenti la retta tangente a \mathcal{C} in P e passanti per un altro punto $P_1 \in \mathcal{C}$ ($P_1 \neq P$), al fenotore di quest'ultimo a P .

Dim. L'equazione dei piani in questione è del tipo:

$$z = cy$$

ora, dalle formule di Frenet si trova, imponendo il passaggio per P_1 , di una curva s :

$$\frac{z(s)}{y(s)} = c(s) = -\frac{z}{3} s \rightarrow 0, \text{ se } s \rightarrow 0$$

ovvero, al limite, otteniamo $z = 0$, ossia il piano osculatore in P . \square

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Mauro Spera UCSC Brescia

Lezione VII

* Formule generali per κ e τ

$$\bullet = \frac{d}{dt} \quad / = \frac{d}{ds}$$

velocità $\underline{\dot{r}} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \underline{r}' \quad \frac{ds}{dt} = \|\dot{\underline{r}}\|$

accelerazione $\underline{\ddot{r}} = \frac{d}{dt} \left(\underline{r}' \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d\underline{r}'}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \underline{r}' \frac{d^2s}{dt^2}$ $\kappa > 0$

$$= \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \underline{r}'' + \frac{ds^2}{dt^2} \underline{r}' \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2}_{\rho} \underline{n} + \underbrace{\frac{ds^2}{dt^2}}_t \underline{t}$$

accelerazione centripeta
accelerazione tangenziale

(stesso calcolo del caso piano)

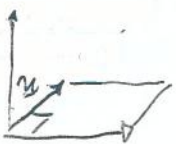
Si trova poi

$$\underline{r}' = \frac{\underline{\dot{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|} \quad (\text{ovvia}) \quad \text{e} \quad \underline{r}'' = \dots = \frac{\|\dot{\underline{r}}\|^2 \underline{\ddot{r}} - \langle \dot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle \underline{\dot{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|^4}$$

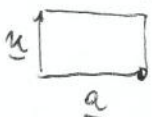
Si ha, successivamente

$$\kappa = \|\underline{r}''\| = \|\underline{r}'' \times \underline{r}'\| = \dots = \frac{\|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}$$

$\|\underline{a} \times \underline{u}\| = \|\underline{a}\|$
 se \underline{u} è un vettore
perpendicolare ad \underline{a}



$\|\underline{a} \times \underline{u}\|$ è l'area di un rettangolo:



$$\tau = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{\kappa^2} = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{\|\underline{r}' \times \underline{r}''\|^2}$$

$$= \dots = - \frac{\langle \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}, \underline{\ddot{\dot{r}}} \rangle}{\|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}\|^2}$$

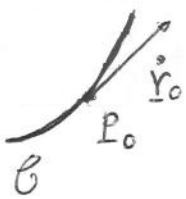
verifichiamo solo che $\tau = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{R^2}$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{R^2} &= - \frac{\langle \underline{t} \times R \underline{n}, (R \underline{n})' \rangle}{R^2} = \\
 &= - \frac{1}{R} \langle \underline{b}, \underbrace{R' \underline{n} + R \underline{n}'}_{\underline{n}'} \rangle = - \langle \underline{b}, \underline{n}' \rangle \\
 &= - \langle \underline{b}, -R \underline{t} - \tau \underline{b} \rangle = \tau \quad \square
 \end{aligned}$$

* Equazioni dei piani principali (usando un parametro arbitrario)

Abbiamo già determinato l'equazione del piano normale a \mathcal{C} in P_0 :



$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{r}_0 \rangle = 0$$

l'equazione del piano osculatore (in P_0)

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{b}_0 \rangle = 0$$

può essere scritta anche così:

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{r}_0 \times \underline{r}_0'' \rangle = 0$$

Ciufatti la velocità \underline{r}_0 e l'accelerazione \underline{r}_0'' danno vita alla giacitura del piano osculatore.

Il piano rettificante: $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{n}_0 \rangle = 0$ $\&$ \underline{n}_0
(in P_0)

può essere determinato così: $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, (\underline{r}_0' \times \underline{r}_0'') \times \underline{r}_0 \rangle = 0$

Il problema in esame può suggerire strade alternative.

proporzionale \rightarrow \underline{b}_0 \quad \underline{t}_0

* In virtù del teorema fondamentale, \mathcal{C} è
 piano $\Leftrightarrow \tau \equiv 0$ ((\Rightarrow) è banale)

Possiamo verificare questo fatto direttamente osservando
 che $\tau \equiv 0 \Rightarrow \underline{b} = \underline{b}(s) = \underline{b}_0$ (costante)

Posto allora $f(s) := \langle \underline{r}(s), \underline{b}_0 \rangle$

$$f'(s) = \langle \underline{r}'(s), \underline{b}_0 \rangle = \langle \underline{t}(s), \underline{b}_0 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \underline{r}(s), \underline{b}_0 \rangle = c \quad (\text{costante}), \quad \forall s \in \mathcal{I}$$

(intervallo di definizione di \mathcal{C}). Ma ciò significa che

\mathcal{C} appartiene al piano di equazione

$$\langle \underline{x}, \underline{b}_0 \rangle = c$$

$$\left(\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

□

* Elica cilindrica \mathcal{E}

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$a > 0$$

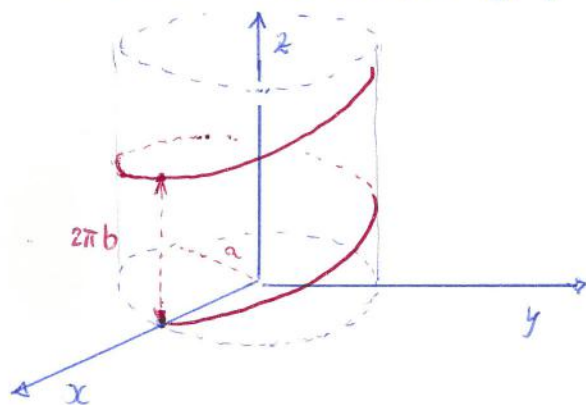
$$b > 0$$

per fissare le idee

passo dell'elica: $2\pi b$

Dal pto di vista

cinematico, si tratta della legge oraria di un pto materiale soggetto alla composizione di due moti, uno circolare uniforme, sulla circonferenza di centro l'origine e raggio a sul piano xy , l'altro rettilineo uniforme lungo l'asse z , con velocità costante b . \mathcal{E} si avvolge sul cilindro



$x^2 + y^2 = a^2$, donde il nome.

È evidente che \mathcal{E} non è piana: in modo rigoroso, ciò si verifica, ad esempio, dal calcolo della torsione, che effettueremo a momenti; si

può procedere anche elementarmente in questo modo:

Se \mathcal{E} fosse contenuta interamente in un piano, esisterebbero A, B, C, D , reali, non tutti nulli, tale che, identicamente int. si abbia

$$(*) \quad \underbrace{A a \cos t}_{x(t)} + \underbrace{B a \sin t}_{y(t)} + \underbrace{C \cdot bt}_{z(t)} + D \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

derivando per t e facendo $t \rightarrow t_0$, per esempio, viene subito $C = 0$. Derivando l'equazione risultante

viene $-A \cdot a \sin t + B \cdot a \cos t = 0 \Rightarrow$ ponendo $t=0$

si ha $B=0$. Ponendo $t=0$ in $(*)$ si ha $A + D = 0 \Rightarrow$

$$A(a \cos t - 1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Che è ovviamente possibile solo se $A = 0$.

In definitiva $A = B = C = D = 0$, sicché il primo corollario non esiste.

$$\mathcal{E} : \underline{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

È subito visto che \mathcal{E} è regolare, e se ne determina subito l'ascissa curvilinea esplicitamente (partendo da $t=0$)

$$ds = \|\dot{\underline{r}}(t)\| dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot dt \quad s = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t$$

$$\left(\Rightarrow \underline{r}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right)$$

$$\kappa = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3} \stackrel{\text{perché } \langle \dot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle = 0}{=} \frac{\|\dot{\underline{r}}\| \cdot \|\ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3} = \frac{\|\ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$\Rightarrow \kappa$ è costante

$$\tau = - \frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2} = \frac{-\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}}\|^2 \cdot \|\ddot{\underline{r}}\|^2} \quad (\langle \dot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle = 0)$$

$$= - \frac{1}{(a^2 + b^2)a^2} \cdot \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = - \frac{1}{(a^2 + b^2)a^2} \cdot b \cdot a^2 = - \frac{b}{a^2 + b^2} < 0$$

(b > 0)

Laplace... $\Rightarrow \tau$ è costante

Le eliche sono sinistrorse ($\tau < 0$) o destrorse ($\tau > 0$)

[Le viti sono appunto di due tipi...] e ciò non ha nulla a che vedere con l'orientamento!

In virtù del teorema fondamentale, le eliche cilindriche sono le uniche curve orientate curvatura e torsione costanti.

* Cubica sinuosa (o gobba)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \quad \mathbf{r}(t) &= (t, t^2, t^3) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= (1, 2t, 3t^2) \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (0, 2, 6t) \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R} \quad \mathcal{C} \text{ è regolare} \\ \text{(facile...)}$$

È immediato almeno calcolare curvatura e torsione di \mathcal{C} (v. anche i temi d'esame...). \mathcal{C} non è piana.

Quest'ultimo fatto si accerta elementarmente:

Di nuovo, se A, B, C, D sono tali che

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D \equiv 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$t=0$ fornisce $\boxed{D=0}$

Successivamente, derivando:

$$3At^2 + 2Bt + C = 0$$

ponendo $t=0$ si ha $\boxed{C=0}$

derivando nuovamente e ponendo $t=0$ (due volte)

si trova pure $\boxed{A=B=0}$ e si conclude.

* Sfera osculatrice

Applichiamo la descrizione locale di una curva spaziale

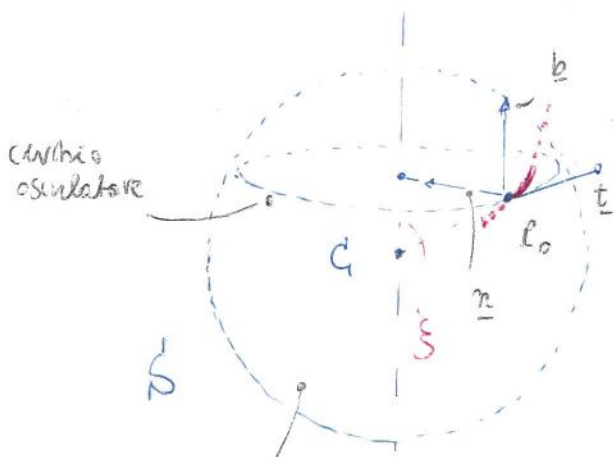
$$\begin{cases} x = x(s) = s - \frac{\kappa^2}{6} s^3 + \dots \\ y = y(s) = \frac{\kappa}{2} s^2 + \frac{\kappa'}{6} s^3 + \dots \\ z = z(s) = -\frac{\kappa \tau}{6} s^3 + \dots \end{cases}$$

alla determinazione della sfera osculatrice S a \mathcal{C} in un suo pto P_0 , ovvero la sfera

limita di quelle passanti per P_0 e per altri tre pti della curva, quando si portano questi ultimi a coincidere con P_0 .

Tale sfera contiene il cerchio osculatore di \mathcal{C} in P_0

na $\kappa > 0$ $\tau \neq 0$



Sfera osculatrice

Equazione della sfera di centro $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raggio R \downarrow

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

nel nostro caso (utilizzando il triangolo di Frenet in P_0 ... v. figura

$$C = \left(0, \frac{1}{\kappa}, \xi \right)$$

da determinarsi

e si ha subito: $R^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \xi^2$ (la sfera passa per P_0)

Ma ora $P = (x(s), y(s), z(s))$; imponiamo l'appartenenza del pto alla sfera (trovando lo sviluppo al 3° ordine, approssimando con ciò, al limite, un contatto quadruplo). Calcoliamo:



$$x(s)^2 + \left(y(s) - \frac{1}{\kappa} \right)^2 + \left(z(s) - \xi \right)^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \xi^2$$

$$\left(1 - \frac{R^2}{6} \delta^3\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \delta^2 + \frac{R'}{6} \delta^3 - \frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{R\tau}{6} \delta^3 - \frac{\zeta}{R}\right)^2 = \frac{1}{R^2} + \zeta^2$$

Controlliamo ordine per ordine (in δ):

ordine 0: $\frac{1}{R^2} + \zeta^2 = \frac{1}{R^2} + \zeta^2$ ✓

ordine 1: $0 = 0$ ✓

ordine 2: $\delta^2 - 2 \frac{R}{2} \frac{1}{R} \delta^2 = 0$ ✓

ordine 3: $-2 \frac{R'}{6} \frac{1}{R} \delta^3 + 2 \frac{R\tau}{6} \zeta \delta^3 = 0$, che implica:

$$-\frac{R'}{R} + R\tau\zeta = 0$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{R'}{R^2} =$$

$$= -\frac{1}{\tau} \rho'$$

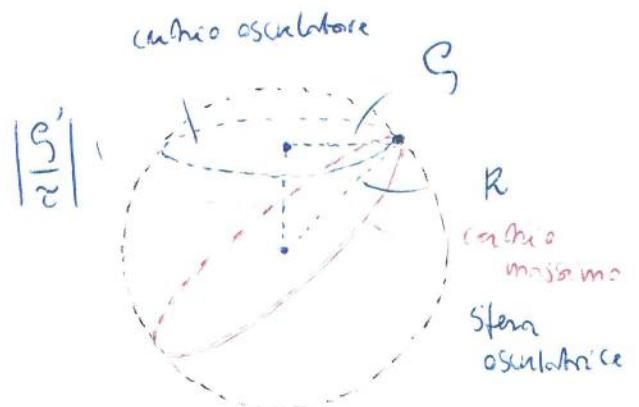
raggio di curvatura:
(si ricordi...)

$$\rho = \frac{1}{R}$$

$$\rho' = -\frac{R'}{R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2}}$$

raggio di S



Determiniamo esplicitamente le coordinate del centro della sfera osculatrice (Formula di de Saint Venant)

Si ha, in virtù della discussione appena svolta:

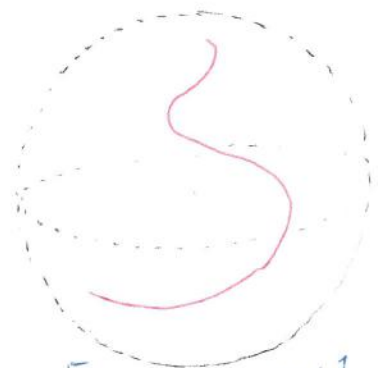
$$(*) \quad \underline{r}_c = \underline{r} + \rho \underline{n} - \frac{\rho'}{\tau} \underline{b} \quad \tau \neq 0$$

III Determiniamo le curve sferiche: r_c è costante, e così R

si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{r}_c' = \underline{t} + \rho' \underline{n} + \rho \underline{n}' - \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' \underline{b} - \frac{\rho'}{\tau} \underline{b}' = \\ &= \underline{t} + \rho' \underline{n} + \rho (-\tau \underline{t} - \tau \underline{b}) - \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' \underline{b} - \frac{\rho'}{\tau} \tau \underline{n} = \\ &= -(\tau \rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)') \underline{b} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(*) \quad \boxed{\tau \rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0}$$



calcoliamo $(R^2)' = \left(\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2}\right)' =$

$$= 2\rho\rho' + 2\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 2\frac{\rho'}{\tau} \left[\rho\tau + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)'\right]$$

$\Rightarrow (*)$ implica $R' = 0$ (cioè R costante)

viceversa R costante da $\frac{\rho'}{\tau} = 0$ oppure $\rho\tau + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0$;

nel primo caso $\rho' = 0 \Rightarrow R$ è costante (e in

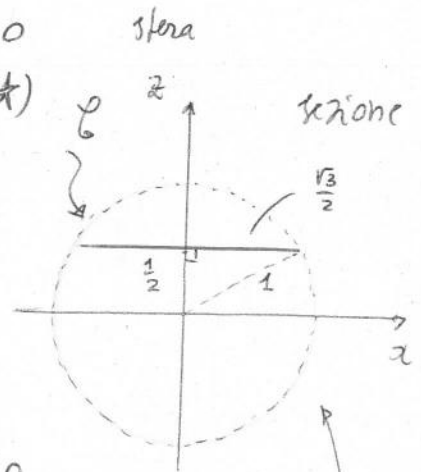
tal caso $R = \rho$ (il cerchio osculatore è un cerchio massimo)

oppure si ha $(*)$

Esempio
(calcolo implicito)

Sia data la circonferenza nello spazio

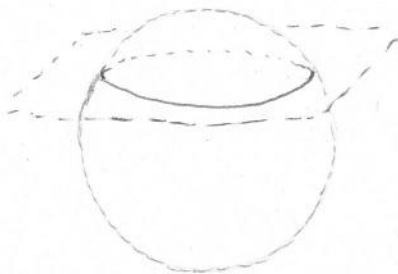
$$\mathcal{C} : \begin{cases} f = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g = z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$



vorremmo determinare la curvatura di \mathcal{C} in un suo punto, ad

esempio $P_0 : (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$, tramite il calcolo implicito, a titolo di esercizio

(Ché ovviamente, la soluzione sarebbe del tutto immediata: $R = \frac{1}{R} = \frac{2}{\sqrt{3}}$)



verifichiamo che le superfici, $f=0$ e $g=0$ si intersecano transversalmente (sicché si ottiene una curva regolare. Infatti

$$\nabla f \times \nabla g = \underline{0}$$

fornisce

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia}$$

$$\underline{i} \cdot y - \underline{j} \cdot x = y \underline{i} - x \underline{j} = 0$$

$\Leftrightarrow x = y = 0$ che, sostituite nelle $(*)$, producono

$$\text{un assurdo: } z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \text{ e } z = \frac{1}{2}.$$

\mathcal{C} può essere descritta dalla lunghezza d'arco s , misurata a partire da un punto qualsiasi. Le $(*)$ valgono allora identicamente in s .

Si ha, derivando successivamente le $(*)$ rispetto a s

$$x x' + y y' + z z' = 0$$

$$x'^2 + x' x'' + y'^2 + y' y'' + z'^2 + z' z'' = 0$$

$$z' = 0$$

$$z'' = 0$$

Si noti poi che, per una curva qualsiasi, descritta dall'asse curva, \bar{e}

$$\boxed{x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1}$$

(identicamente in s), sicché si pure

$$x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0$$

In definitiva otteniamo

$$\begin{cases} x x' + y y' + z z' = 0 & , z' = 0 \\ 1 + x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0 & , z'' = 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0 \end{cases}$$

assieme alle (4). Pertanto, in $P_0: (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$

abbiamo $\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} z' = 0 \Rightarrow x' = 0$

$$\begin{matrix} x' = 0 \\ z' = 0 \end{matrix}$$

che fornisce $y' = \pm 1$ a seconda dell'orientamento di \bar{e}

Scegliamo $y' = +1 \Rightarrow \underline{\underline{t}}(P_0) = (0, 1, 0)$
 $= \underline{\underline{j}}$

Successivamente troviamo

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x'' + \frac{1}{2} z'' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x'' = 0 \Rightarrow x'' = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

e anche $1 \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = 0$

Dunque

$$\underline{r}_0'' = -\frac{2}{\sqrt{3}} \underline{i}$$

$$\text{e } R(P_0) = \|\underline{r}_0''\| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{R}$$

Ovviamente $z \equiv 0$ (è il piano)

Sempre a titolo di semplice esercizio, si aprì, in un punto qualsiasi, con la parametrizzazione

$$\underline{c}: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Diamo qualche dettaglio in più sul calcolo diretto
del vettore binormale $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$

(sicché, come già notato nel testo, in pratica si calcolano
i vettori del triangolo di Frenet nell'ordine $\underline{t} \rightarrow \underline{b} \rightarrow$

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}$$

$$(*) \quad \underline{b} := \underline{t} \times \underline{n} = \underline{r}' \times \frac{1}{k} \underline{r}'' \quad (k > 0 : \text{bi-regolarità})$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \underline{r}' \times \underline{r}'' &= \frac{d\underline{r}}{ds} \times \frac{d(\underline{r}')}{ds} = \frac{d\underline{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \times \frac{d}{ds} \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) \\ (\text{parallelo a } \underline{b}, & \\ \text{stesso verso}) &= \underline{\dot{r}} \frac{1}{\|\dot{r}\|} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) \cdot \frac{dt}{ds} = \\ &= \underline{\dot{r}} \cdot \frac{1}{\|\dot{r}\|} \times \frac{1}{\|\dot{r}\|} \left\{ \underline{\ddot{r}} \cdot \frac{1}{\|\dot{r}\|} + \underline{\dot{r}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{r}\|} \right) \right\} = \frac{\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}}{\|\dot{r}\|^3} \end{aligned}$$

$$(\diamond) \quad \underline{r}' \times \underline{r}'' = \frac{\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}}{\|\dot{r}\|^3}$$

Da (*) e (\diamond) segue che \underline{b} è $\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}$
e ha lo stesso verso di quest'ultima
in definitiva $\underline{b} = \frac{\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}$

Notiamo altresì che, prendendo i moduli in (\diamond) si ha

$$(\clubsuit) \quad \kappa = \frac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3}$$

Calcoliamo ora esplicitamente τ

ricordiamo: $\underline{r}'' = \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|^2} \ddot{\underline{r}} + \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|} \right) \dot{\underline{r}}$

Aviamo trovato:

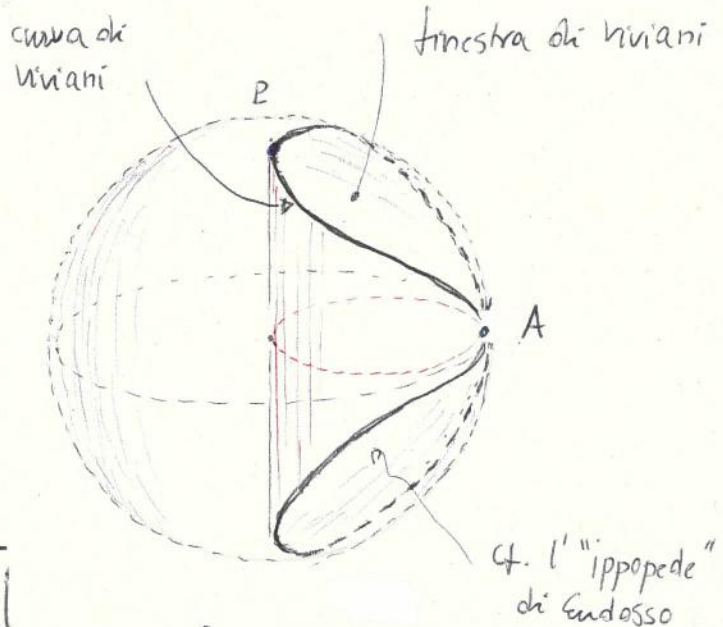
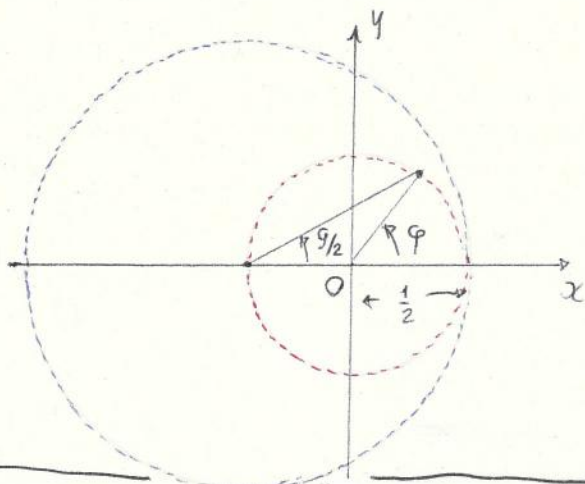
$$\tau = - \frac{1}{R^2} \langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle$$

Proseguendo, si ha

$$\begin{aligned} - \frac{1}{R^2} \langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle &= - \frac{1}{R^2} \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|^3} \langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|} \right) \dot{\underline{r}} \rangle = \\ &= - \frac{1}{R^2} \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|^4} \langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{\underline{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|^2} + \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|} \right) \dot{\underline{r}} \right) \rangle \\ &= - \frac{1}{R^2} \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|^4} \langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \frac{\ddot{\underline{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|^2} + \underbrace{\text{perpendicolare a } \dot{\underline{r}} \text{ e } \ddot{\underline{r}}}_{\text{dalla (*)}} \rangle \\ &= - \frac{1}{R^2} \frac{1}{\|\dot{\underline{r}}\|^6} \langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle = - \frac{\|\dot{\underline{r}}\|^6}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2 \|\dot{\underline{r}}\|^6} \langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau = - \frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2}$$

★ La curva di Viviani



ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spina - UCSC Brescia

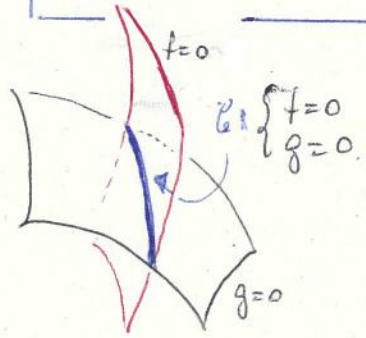
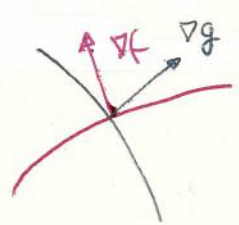
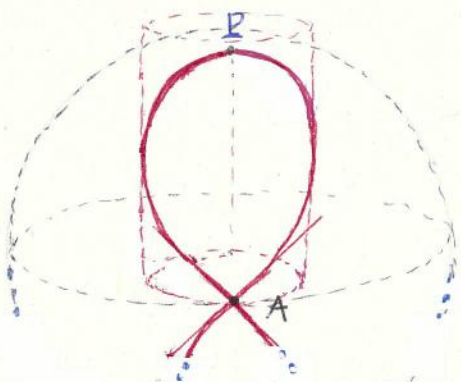
Lezione VIII

$$\gamma = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$$

sfera cilindro

curva di Viviani

$$\gamma : \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 & \text{sfera } \mathcal{S} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} & \text{cilindro } \mathcal{C} \end{cases}$$



Controlliamo la regolarità di γ
tramite il teorema del Dini* (generalizzato)

Si richiede un'intersezione trasversale, che si può esprimere tramite $\nabla f \times \nabla g \neq \underline{0}$. Troviamo che $A: (\frac{1}{2}, 0, 0)$ è un pto singolare. Calcoliamo:

$$\nabla f = (2(x + \frac{1}{2}), 2y, 2z) \quad \nabla g = (2x, 2y, 0)$$

va da sé che \mathcal{S} e \mathcal{C} sono effettivamente superfici regolari:

$$\nabla f = \underline{0} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = 0, z = 0, \text{ ma } Q: (-\frac{1}{2}, 0, 0) \notin \mathcal{S}$$

$$\text{Analogamente } \nabla g = \underline{0} \Rightarrow x = y = 0, \text{ ma } O: (0, 0, 0) \notin \mathcal{C}$$

$$\nabla f \times \nabla g = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x + \frac{1}{2} & y & z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{i}(-yz) - \underline{j}(-xz) + \underline{k}[(x + \frac{1}{2})y - xy] = 0$$

$$\Rightarrow yz = 0 \quad xz = 0$$

$$xy + \frac{1}{2}y - xy = 0$$

$$\frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y = 0$$

pertanto se $z=0$, x e y non possono essere entrambi nulli (poiché $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$) e pertanto $x = \pm \frac{1}{2}$. Si trovano allora $A = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ e $B = (-\frac{1}{2}, 0, 0) \notin \mathcal{L}$.

Se poi $z \neq 0$, è $x = y = 0$, ma ciò contraddice, ad esempio $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Dunque l'unico pto singolare è A (è un "modo" ~~$\times A$~~)

come verificavamo
tra poco

Per il seguito conviene scrivere \mathcal{V} nel modo seguente:

$$\mathcal{V}: \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + \frac{1}{4} + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}: \begin{cases} x + z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

cilindro
cilindro (parabolico)

Determiniamo una parametrizzazione per V .

Utilizziamo coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Si ha $\rho = \frac{1}{2}$. Sostituiamo in V : $\begin{cases} x+z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2+y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ ottenendo

$$x = \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} [2 \cos^2(\frac{\varphi}{2}) - 1] = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$z^2 = \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

\Rightarrow (v. figura) $z = \sin \frac{\varphi}{2}$ ^(*). In definitiva,

ponendo $t = \frac{\varphi}{2}$, si ha

$$V: \begin{cases} x = \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ y = \sin t \cos t \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$t \in [0, \pi)$$

(*) può essere prolungata
per simmetria

Tale parametrizzazione può essere ricavata anche per via puramente geometrica. A partire da questa, si possono ricavare R e σ e verificare, a ritroso, che V è sferica.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \cos t (-\sin t) = -\sin 2t \\ \dot{y} = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = \cos 2t \\ \dot{z} = \cos t \end{cases}$$

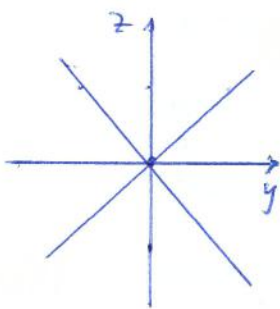
$$ds = \sqrt{2 + \cos^2 t} dt$$

Si osserva che

$$t=0 \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, 1, 1)$$

$$t=\pi \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(\pi) = (0, 1, -1)$$

$\Rightarrow \gamma$ non è regolare secondo la nostra def, poiché non è invertibile (si è tacitamente prolungata la curva per t negative...)



Dunque

$$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-2\cos 2t, -2\sin 2t, -\sin t)$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = (4\sin 2t, -4\cos 2t, -\cos t)$$

Calcoliamo, per esempio, e per confronto col successivo calcolo implicito, κ e τ per $t = \frac{\pi}{2}$ ($P := \mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$)

Si ha, in \mathbb{R} :

$$\dot{\mathbf{r}} = (0, -1, 0)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (2, 0, -1)$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = (0, 4, 0)$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}\| = 1$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} + 2\mathbf{k} \Rightarrow \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{\sqrt{5}}} \quad \text{È costante, in } \mathbb{R}, \quad \tau = 0 \quad \text{poiché } \dddot{\mathbf{r}} = -4\dot{\mathbf{r}}$$

* Determiniamo \mathbf{r} e \mathbf{z} in \mathbb{R}^3 tramite il calcolo implicito

$$\gamma: \begin{cases} x + z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \mathbb{R}: (-\frac{1}{2}, 0, 1)$$

Parametrizziamo γ in un intervallo di \mathbb{R} , tramite l'asse curvilinea s . Si ha allora, identicamente in s

$$\begin{cases} x(s) + z(s)^2 \equiv \frac{1}{2} \\ x(s)^2 + y(s)^2 \equiv \frac{1}{4} \end{cases}$$

Si ricordi altresì che
 $x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 \equiv 1$
 (per def. di s)

Non ricaviamo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ esplicitamente: ci proccuriamo
 \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' , \mathbf{r}''' col calcolo implicito, e calcoliamo iterativamente
in \mathbb{R}

}} il metodo è affatto }}
 }} generale. }}

Procediamo (ammettiamo s) $(\cdot = \frac{d}{ds})$

① $x' + 2zz' = 0$

⑦ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$

② $2x\alpha' + 2yy' = 0$

⑧ $2x'\alpha'' + 2y'y'' + 2z'z'' = 0$

③ $x'' + 2z'^2 + 2zz'' = 0$

⑨ $x''^2 + x'\alpha''' + y''^2 + y'y''' + z''^2 + z'z''' = 0$

④ $x'^2 + x\alpha'' + y'^2 + yy'' = 0$

⑤ $x''' + 4z'^2 z'' + 2z'z'' + 2zz''' = 0$

⑥ $\underbrace{2x'\alpha'' + \alpha'\alpha''}_{3x'\alpha''} + x\alpha''' + \underbrace{2y'y'' + y'y''}_{3y'y''} + yy''' = 0$

Ponendoci a $P: (-\frac{1}{2}, 0, 1)$ troviamo, successivamente

$$\textcircled{1}: \quad \alpha' + 2z' = 0 \quad \Rightarrow \quad z' = 0$$

$$\textcircled{2}: \quad -\frac{1}{2}\alpha' = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = 0 \quad \boxed{\alpha' = z' = 0}$$

$$\textcircled{7} \text{ fornisce allora } y''^2 = 1 \text{ ossia } y' = \pm 1$$

Scegliamo, ad esempio $y' = +1$ (siamo orientando V : in ogni caso, α e z non sono affette da tale scelta)

[La soluzione è intuitivamente chiara, v. fig.]

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{r} = (-\frac{1}{2}, 0, 1) \\ \underline{r}' = (0, 1, 0) \end{array}}$$

$$\textcircled{3}: \quad \alpha'' + 2z'' = 0 \quad \Rightarrow \quad z'' = -1$$

$$\textcircled{4}: \quad -\frac{1}{2}\alpha'' + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha'' = 2 \quad \alpha'' = -2, z'' = -1$$

$$\textcircled{8}: \quad y'' = 0 \quad y'' = 0$$

Si trova allora $\boxed{R(P) = \|\underline{r}''\| = \sqrt{5}}$ $\left(\underline{r}'' = (2, 0, -1) \right)$

Calcoliamo $\tau(P)$.

$$\textcircled{5}: \quad \alpha''' + 2z''' = 0$$

$$\textcircled{6}: \quad \alpha''' = 0 \quad \Rightarrow \quad z''' = 0 \quad \boxed{\alpha''' = z''' = 0}$$

$$\textcircled{9} \quad 4 + y''' + 1 = 0 \Rightarrow y''' = -5 \quad \boxed{y''' = -5}$$

$$\boxed{\underline{r}''' = (0, -5, 0)}$$

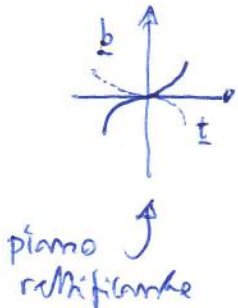
Dato che $\underline{r}' \parallel \underline{r}'''$, troviamo subito

$$\boxed{\tau(P) = 0}$$

Si ricorda $\tau = -\frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}''; \underline{r}''' \rangle}{R^2}$

Era da attendersi tale risultato?

Sì: per ragioni di simmetria (si veda ancora la fig.), la curva, in un intorno di P , rimane dalla stessa parte del piano osculatore e pertanto, in virtù della descrizione locale sui piani principali, τ deve essere nulla (v. figura accanto)



Determiniamo il piano osculatore π in P (attenzione, non è $z=1$!)

$$\langle X - P, \underline{r}' \times \underline{r}'' \rangle = 0$$



$$- \left(x + \frac{1}{2}\right) + 0 \cdot y - 2(z-1) = 0$$

$$-x - \frac{1}{2} - 2z + 2 = 0$$

$$-2x - 1 - 4z + 4 = 0$$

$$-2x - 4z + 3 = 0$$

$$\pi: \underline{2x + 4z - 3 = 0}$$

controllo: $P \in \pi \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 - 3 = 0 \quad \checkmark$

$$\underline{r}' = (0, 1, 0)$$

$$\underline{r}'' = (2, 0, -1)$$

$$\underline{r}' \times \underline{r}'' = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\underline{i} - 2\underline{k}$$

$$(= \sqrt{5} \underline{b})$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, -2)$$

Osservazione. Dalla sfericità di γ si conclude, ricordando che

$$R^2 = \rho^2 + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2, \quad \text{se } \tau \neq 0,$$

che $\lim_{P' \rightarrow P} \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2 = \frac{4}{5} \quad (R=1, \rho = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}})$

Sicché è necessariamente, in virtù di $\tau(P) = 0, \rho'(P) = 0$

★ Superficie regolari : richiami
 (parametriche)

Una (porzione di) superficie regolare Σ
 (parametrica)
 è una mappa

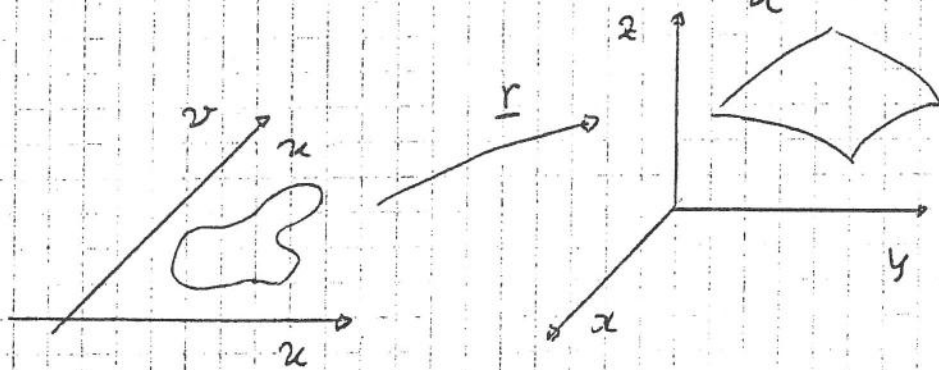
$$\underline{r} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

\mathcal{U}
aperto in \mathbb{R}^2

(esplicitamente:

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

\mathcal{U}



tale che

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | $\underline{r} \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U})$ | k suff. grande
in genere prendiamo
$k = \infty \dots$ |
| 2. | \underline{r} è <u>iniettiva</u> | |
| 3. | $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \neq \underline{0}$ | in \mathcal{U} |

(\times : prod. vettoriale; $\underline{r}_u := \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ etc...)

3. significa:
$$\begin{pmatrix} \underline{r}_u & \underline{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

ha ranko massimo (= 2)

ovvero: \underline{r}_u e \underline{r}_v sono linearmente indipendenti

In genere si considera Σ (che è una applicazione) col suo codominio. Questo è giustificato dal fatto che la condizione di regolarità è invariante rispetto ad una trasformazione regolare dei parametri.
brevemente: parametrizzazione
Ovvero, se $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^2$

$$f(u, v) = (u', v')$$

$$\begin{cases} u' = u'(u, v) \\ v' = v'(u, v) \end{cases}$$

è inversa e iniettiva e C^k insieme alla sua
e $\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \neq 0$

la mappa $R: U' \rightarrow \mathbb{R}^3$

definita da $\underline{R}(u', v') := (\underline{r} \circ f^{-1})(u', v') =$

$$= \underline{r}(u(u', v'), v(u', v')) \quad \text{è ancora regolare}$$

(con lo stesso codominio)

(La verifica è semplice... per il punto 3.)

for vedere che

$$\underline{R}_{u'} \times \underline{R}_{v'} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \underline{r}_u \times \underline{r}_v$$

$0 \neq \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \right)^{-1}$

la condizione di regolarità (e 3° in particolare) rende possibile la costruzione del

⇨ piano tangente in $P_0 = \underline{r}(u_0, v_0) \in \Sigma$

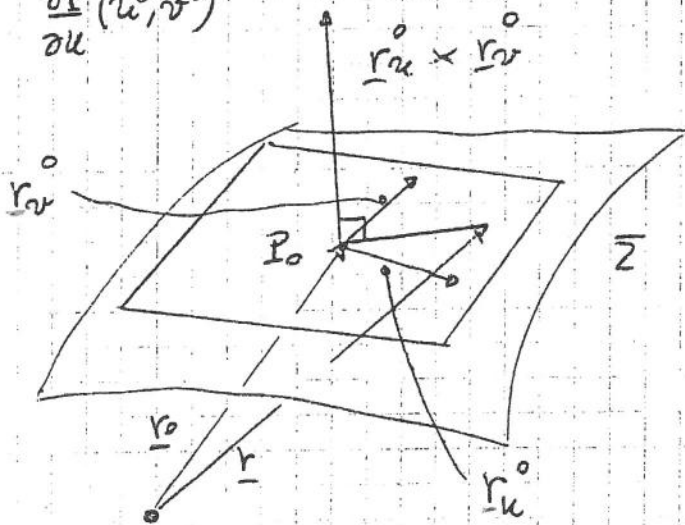
$$\langle \underline{r}_u^0 \times \underline{r}_v^0 \mid \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle = 0$$

$$\parallel \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u^0, v^0)$$

$$\underline{r}_u^0 \times \underline{r}_v^0$$

notazione:

$$T_{P_0} \Sigma$$



⇨ Tale notazione è invariante per riparametrizzazione \underline{u} (... giacché i vettori applicati in P_0 , il piano generato da \underline{r}_u^0 e \underline{r}_v^0 coincide con quello generato da $\underline{r}_{u'}^0$ e $\underline{r}_{v'}^0$...)

⇨ Sia $\underline{N} := \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|} \quad (\equiv \text{versore normale})$
 $(\|\underline{N}\| = 1)$

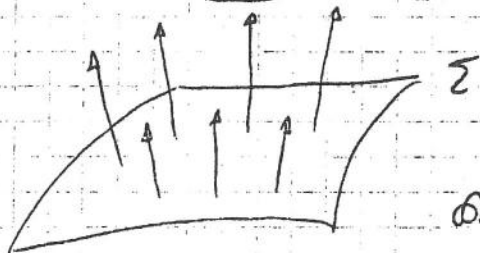
\underline{N} rimane invariato per una riparametrizzazione tale che $\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} > 0$ (ovvero, che non cambia l'orientamento di \mathbb{R}^2), altrimenti cambia segno.

\star una particolare scelta di N (e^0) viene detta orientamento di Σ . Si parla più di superficie orientata

Dunque, una superficie Σ può sempre dotarsi di un orientamento, localmente ... cioè non è più possibile globalmente



ex. nastro di Möbius



Si noti che lo scambio di u e v :

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -u \end{aligned}$$

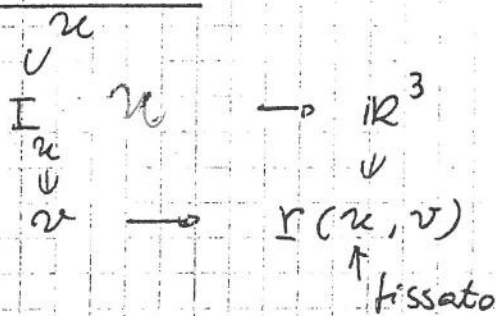
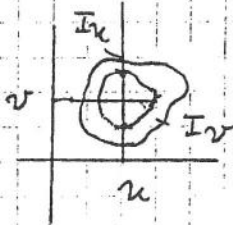
Cambia l'orientamento di Σ :

$$\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(v,-u)}{\partial(u,v)} = -1$$

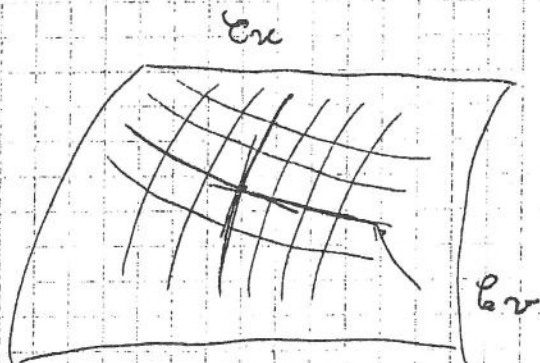
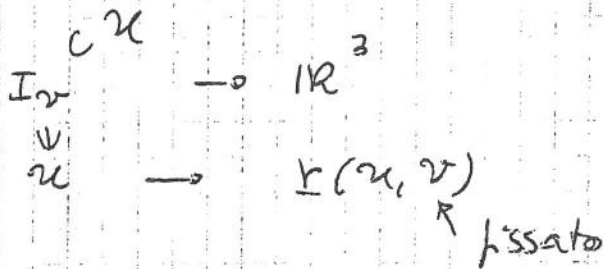


Coordinate curvilinee

C_u :



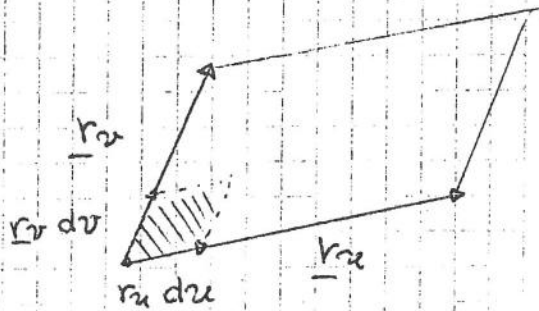
C_v :



C_u, C_v sono curve su Σ , e vengono dette "coordinate curvilinee su Σ "

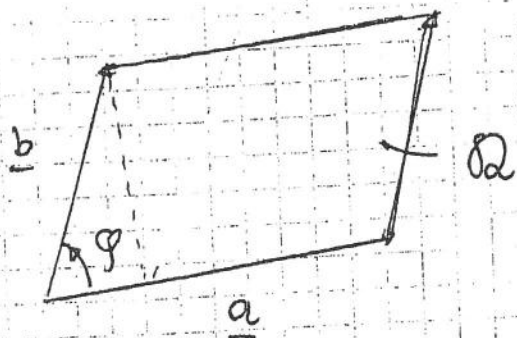
★ C_u e C_v si incontrano trasversalmente:

infatti $\underline{r}_u(u, v)$ e $\underline{r}_v(u, v)$ sono i loro vettori velocità ...



elemento d'area

$$d\sigma = \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| du dv$$



parallelogramma

$$\underline{a}, \underline{b} \neq 0$$

Ricordiamo che $A(\Omega) = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| \sin \varphi$
area

$$\text{e } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\sin \varphi = (1 - \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

$$\text{e } \cos \varphi = \frac{\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|}$$

$$\Rightarrow A(\Omega) = \left[\|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle^2 \right]^{1/2}$$

Posto ora $\underline{a} = \underline{r}_u$, $\underline{b} = \underline{r}_v$, e

$$E := \langle \underline{r}_u | \underline{r}_u \rangle = \|\underline{r}_u\|^2$$

$$F := \langle \underline{r}_u | \underline{r}_v \rangle (= \langle \underline{r}_v | \underline{r}_u \rangle)$$

$$G := \langle \underline{r}_v | \underline{r}_v \rangle = \|\underline{r}_v\|^2$$

Se $F = 0$
si parla di coordinate curvilinee ortogonali

Si ha subito

$$d\sigma = (EG - F^2)^{1/2} du dv$$

elemento d'area

$$\left[\begin{array}{l} \underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right. \quad A(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} |a_1 a_2| + |a_1 a_3| + |a_2 a_3| \\ |b_1 b_2| + |b_1 b_3| + |b_2 b_3| \end{array} \right\}^{1/2}$$

$$d\sigma = \left\{ \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} \right]^2 \right\}^{1/2} du dv$$

★ metrica su una superficie

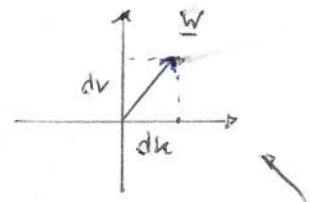
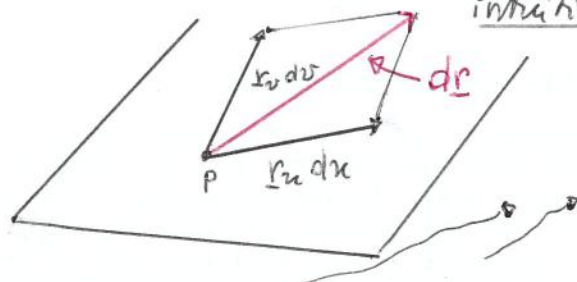
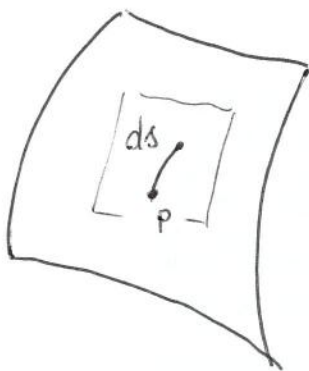


La nostra trattazione non sarà completamente rigorosa: tra concetto richiede infatti la nozione di campo tensoriale, che si approfondisce in corsi di laurea magistrale. Tuttavia, se fini di una comprensione autentica, non si può in ogni caso prescindere da considerazioni intuitive di tipo infinitesimale

È definita da

$$(\star) \quad ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle$$

= quadrato dell'elemento di lunghezza d'arco sulla superficie
 $d\mathbf{r} \in T_p Z$



$$d\mathbf{r} = r_u du + r_v dv$$

primo dei parametri

leggiamolo mai porentemente come vettore
 "finito" o infinitesimo Esplaciammo (★).

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \langle r_u du + r_v dv, r_u du + r_v dv \rangle = \\ &= \underbrace{\langle r_u, r_u \rangle}_{E} du^2 + 2 \underbrace{\langle r_u, r_v \rangle}_{F} du dv + \underbrace{\langle r_v, r_v \rangle}_{G} dv^2 \end{aligned}$$

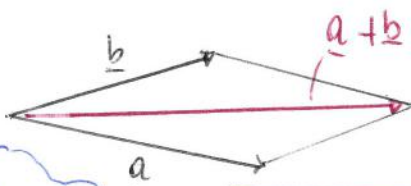
ossia

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$\begin{aligned} E &= E(u, v) \\ F &= F(u, v) \\ G &= G(u, v) \end{aligned}$$

★ metrica (Riemanniana) o I^0 forma fondamentale

tale formula esprime il teorema di Carnot ★ [sia a livello finito sia infinitesimale]



$$\begin{aligned} \|a+b\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|\cos\varphi \end{aligned}$$

(se $\langle a, b \rangle = 0$ si ritrova il teorema di Pitagora)

la metrica permette di effettuare misure su Z operando sul primo dei parametri

Sia $\mathcal{C} \subset \Sigma$

curva sulla superficie: $\hat{\sigma}$
descritta nel modo seguente

$$\alpha: I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

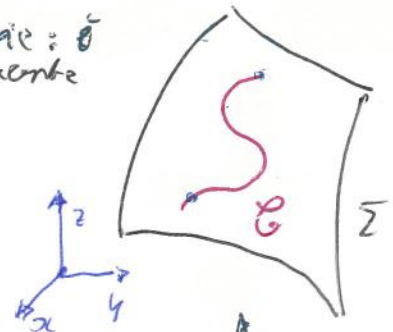
$$t \longmapsto \underline{\alpha}(t) \in \Sigma$$

$$\underline{\alpha}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$$

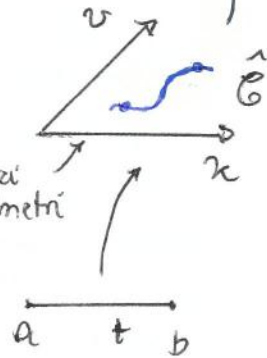
$$\underline{\dot{\alpha}}(t) = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$$

$$\|\underline{\dot{\alpha}}\|^2 = E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2$$

$$\|\underline{\dot{\alpha}}\| = (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2)^{\frac{1}{2}}$$



primo dei
parametri



$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

Sia $\hat{\sigma}$
regolare,
in part.
 $(\dot{u}, \dot{v}) \neq (0, 0)$

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

lunghezza
di un arco di
curva $\mathcal{C} \subset \Sigma$

tra $A = \underline{\alpha}(a)$
e $B = \underline{\alpha}(b)$

Punto per punto, la metrica proviene
da un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 , ossia da
una forma bilineare simmetrica e
definita positiva, ovvero

è una famiglia di prodotti scalari dipendente da un pto
sul primo dei parametri. Si ponga infatti

$$\underline{w} = (du, dv)$$

↑ ↑
finiti o
infinitesimi

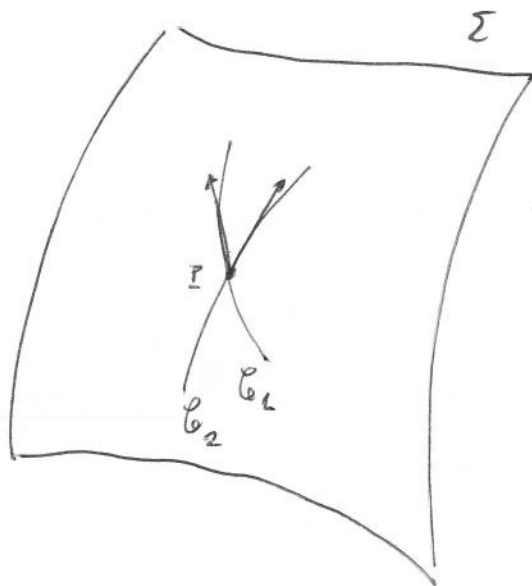
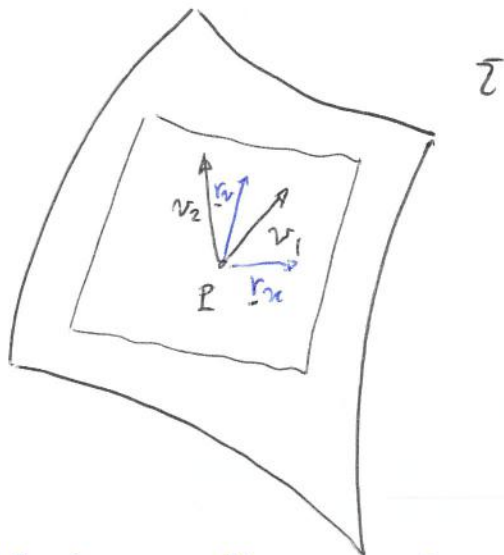
$$g(\underline{w}, \underline{w}) \equiv I(\underline{w}, \underline{w})$$

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

= (in forma matriciale)

$$(du \ dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \\ EG - F^2 > 0 \end{cases}$$



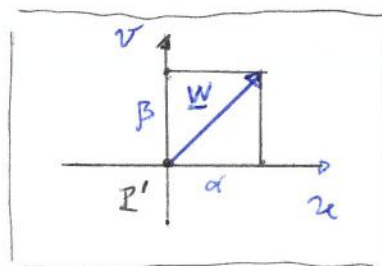
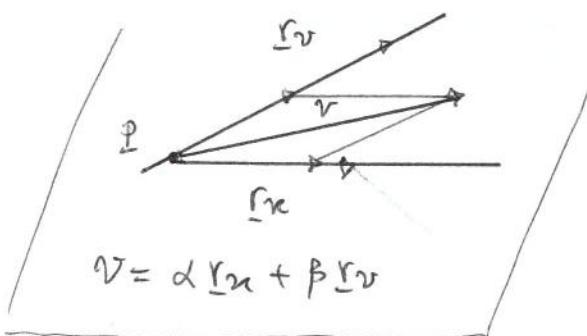
Chiariamo ulteriormente:

Consideriamo $v_1, v_2 \in T_P \Sigma$ (piano tangente a Σ in P)
 (is, vettori velocità di due curve C_1, C_2 su Σ
 passanti per P). Calcoliamo $\langle v_1, v_2 \rangle$.

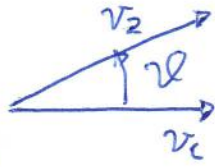
Da $v_1 = \alpha_1 r_u + \beta_1 r_v$ si ha, posto $w_1 = (\alpha_1, \beta_1)$
 $v_2 = \alpha_2 r_u + \beta_2 r_v$ $w_2 = (\alpha_2, \beta_2)$

$$\boxed{\langle v_1, v_2 \rangle = \alpha_1 \alpha_2 E + (\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2) F + \beta_1 \beta_2 G}$$

$$= (\alpha_1 \ \beta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = g(w_1, w_2) \quad \boxed{}$$



Calcoliamo:



$$\cos \vartheta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{g(w_1, w_2)}{\sqrt{g(w_1, w_1)} \cdot \sqrt{g(w_2, w_2)}}$$

↓ prod. scalare standard in \mathbb{R}^3
↓ prod. scalare in \mathbb{R}^2

★ Una (porzione di) superficie Riemanniana astratta consiste di: un aperto \mathcal{U} (connesso) $\subset \mathbb{R}^2$ (regione)

su cui è definita una metrica $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

E, F, G funzioni lisce di \mathcal{U} , con g definita positiva (i.e. autovalori positivi o, equivalentemente, $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$) [famiglia di prodotti scalari definita punto per punto].

★ La lunghezza di un arco di curva γ in \mathcal{U} rispetto a g è data da:

$$L(\gamma) = \int_a^b (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2) dt$$

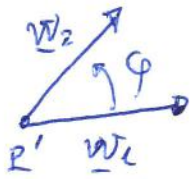
Si pone, sinteticamente:

$$(\mathcal{U}, ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2)$$

si ammettono coord. curvilinee plane qualsiasi

[Nota: g è data autonomamente, senza riferimenti ad una superficie nello spazio]

Dati due vettori w_1, w_2 applicati in $E': (u, v)$



il loro prodotto scalare è $g(w_1, w_2)$

(g valutata in E').

L'angolo ^{convesso non orientato} ($0 \leq \varphi \leq \pi$) da w_1, w_2 , rispetto alla metrica g è definito attraverso

$$\cos \varphi := \frac{g(w_1, w_2)}{\sqrt{g(w_1, w_1)} \sqrt{g(w_2, w_2)}} \quad (g \text{ valutata in } E')$$

Notiamo che se $g \mapsto \lambda g$ $\lambda = \lambda(u, v) > 0$

(ossia $E \mapsto \lambda E, F \mapsto \lambda F, G \mapsto \lambda G$),

★ $\cos \varphi$ rimane invariato. Le metriche g e λg

si dicono conformemente equivalenti

Se, in un opportuno sistema di coordinate curvilinee, si trova

$$g = \lambda(u, v) (du^2 + dv^2)$$

← metrica euclidea standard
($E=G=L, F=0$)

si dice che g è conformemente

piatta. Tali coordinate si riescono sempre ad

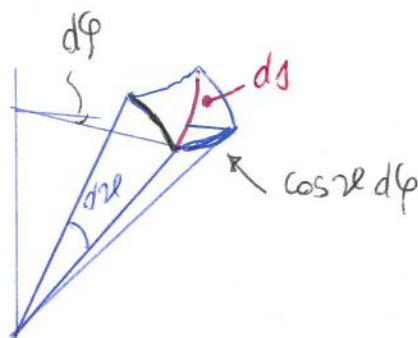
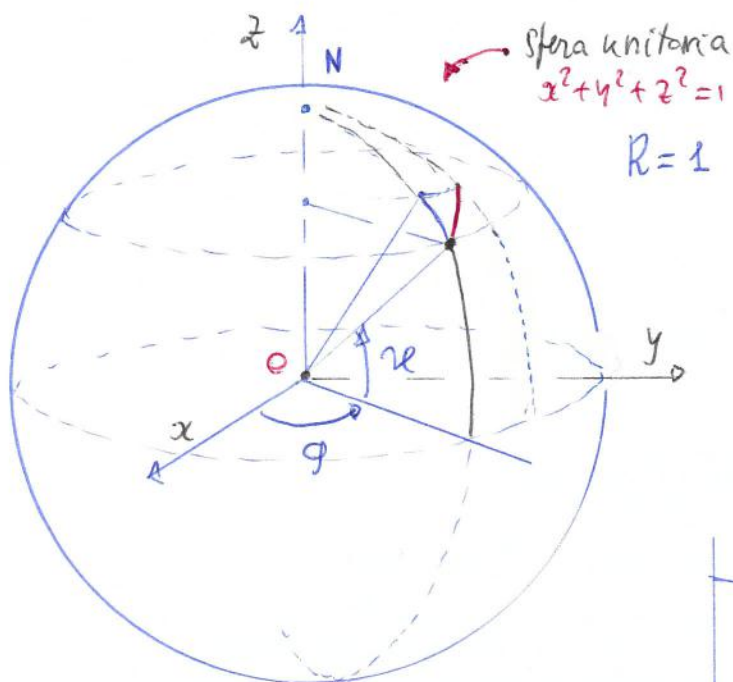
individuare (Goursat, Beltrami) e si chiamano coordinate isoterme; le lunghezze risultano alterate, ma gli angoli misuranti sono gli stessi della metrica euclidea.

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. Mauro SPERA
UCSC Brescia

Lezione X

La Carta di Mercator



Coordinate Sferiche

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

latitudine

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

longitudine

determiniamo la metrica

in modo rapido (v. figura)

$$ds^2 = \cos^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2$$

$$E = \|r_\varphi\|^2 = \cos^2 \vartheta$$

$$F = 0$$

$$G = \|r_\vartheta\|^2 = 1$$

verificando!

$$ds^2 = \cos^2 \vartheta \left[\frac{d\vartheta^2}{\cos^2 \vartheta} + d\varphi^2 \right] = \cos^2 \vartheta \left[\left(\frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \right)^2 + d\varphi^2 \right]$$

Se ora ψ è una primitiva di $\frac{1}{\cos \vartheta}$, si ha

$$d\psi = \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}$$

Si trova facilmente (ricordare i calcoli fatti per la trattativa)

$$\psi = \log \left(\tan \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Se richiediamo che $\psi(0) = 0$

$$\left(\tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \log(1) = 0 \right)$$

ψ : funzione delle latitudini crescenti
o latitudine crescente

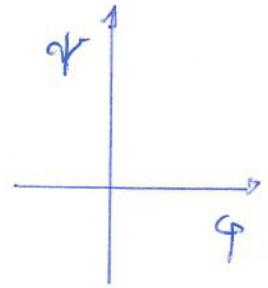
$$\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \psi \rightarrow +\infty$$

Si trova ora $\cos^2 \chi = \lambda(\psi) > 0$ (è visto come funzione di ψ)

Si trova

$$ds^2 = \lambda(\psi) \left[d\psi^2 + d\varphi^2 \right]$$



metrica euclidea su un piano
astratto di coord φ, ψ

ovvero

$$ds^2_{\text{sfera}} = \lambda \cdot ds^2_{\text{piano}}$$

↑
fattore di distorsione

* φ e ψ sono
coordinate isotermiche

Notare: le due metriche $\lambda(d\psi^2 + d\varphi^2)$ e $d\psi^2 + d\varphi^2$

sono conformemente equivalenti, vale a dire

gli angoli misurati tra due direzioni sulla sfera e tra le corrispondenti direzioni nel piano φ, ψ

coincidono. La superficie astratta

$$\left((0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \lambda(d\psi^2 + d\varphi^2) \right)$$

$$\cap \mathbb{R}^2$$

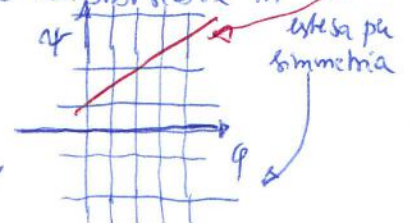
di lissodromiche
i.e. le curve sulla
sfera che intersecano
i meridiani sotto
un angolo costante
sono rette, in
virtù della conformità:

è detta carta di Mercator: in concreto si tratta di
 S^2 (anche proiezione di Mercator)
parametrizzata tramite la latitudine crescente
 e la longitudine

altro
notevole
vantaggio

La proiezione di Mercator è pressoché isometrica nei
 pressi dell'equatore ($\lambda \approx 1$), mentre la distorsione in
 lunghezza cresce andando verso i poli:

ad es. la grandezza appare molto più
 grande dell'Africa, per esempio, in estensione,
 1/14 di quest'ultima!

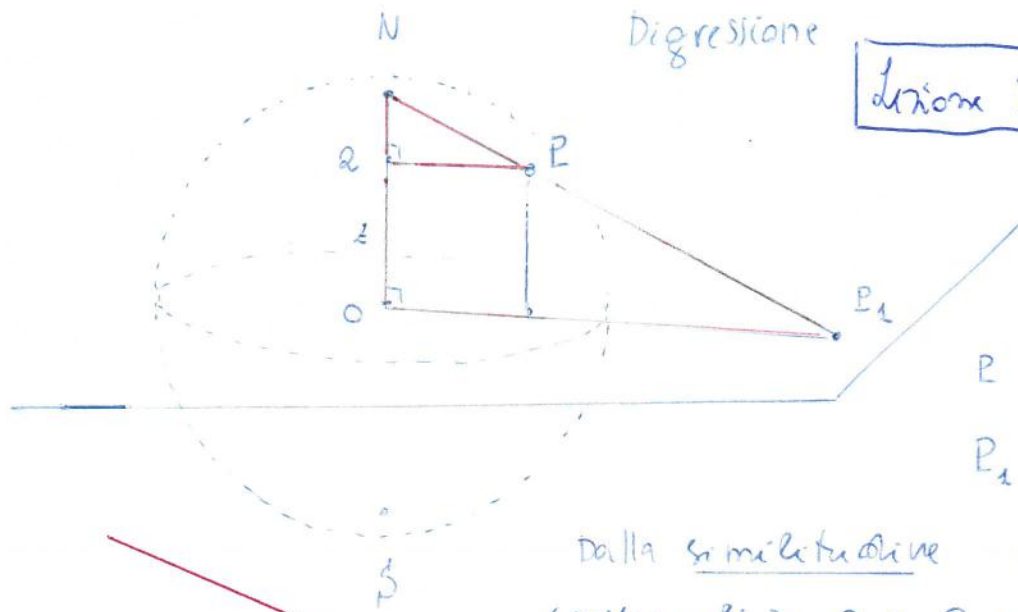


◊ La proiezione stereografica (Epparco, II^a ed a.c.)

ELEMENTI DI
GEOMETRIA
DIFFERENZIALE

Prof. Mauro Spota
UCSC - Brescia

Lezione XI



$$P = (x, y, z)$$

$$P_1 = (x, y, 0)$$

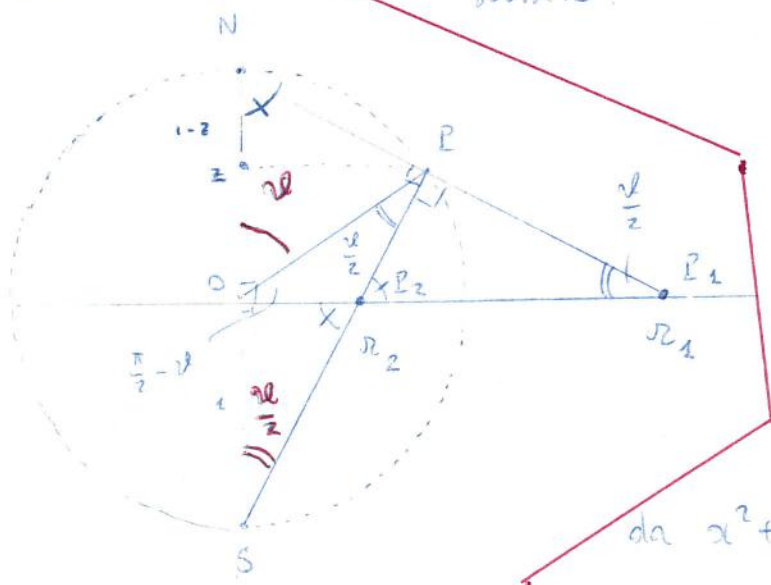
Dalla similitudine di $\Delta(NPQ)$ e $\Delta(NP_1O)$ (triangoli in Q e O , rispettivamente), è subito:

Variante

$$\begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \quad z \neq 1$$

$$x = u(1-z)$$

$$y = v(1-z)$$



da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si ha, successivamente

$$(u^2 + v^2)(1-z)^2 + z^2 = 1$$

$$(u^2 + v^2)(1-z) = 1 - z^2 = (1-z)(1+z)$$

$$\Rightarrow z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2}$$

dalla similitudine di $\Delta(ONP_1)$ e $\Delta(OSP_2S)$

1 pure

$$\frac{r_1}{1} = \frac{1}{r_2} \quad \text{ovvero } r_1 r_2 = 1$$

(inversione circolare)

$$r_2 = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = \cotan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\begin{cases} u = \cotan \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \\ v = \cotan \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \end{cases} \quad (*)$$

Il calcolo della prima forma fondamentale
(v. oltre per i dettagli) conduce a

$$I = I(u, v) =$$

$$\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

$$E = G = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$F = 0$$

sicché

$$ds^2 =$$

$$\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$(du^2 + dv^2)$$

||
 $\lambda(u, v) > 0$

metrica
euclidea sul piano (u, v)

u, v sono
coordinate isoterme

La proiezione stereografica è conforme *

(ne esistono versioni polari ed equatoriali (il mappamondo classico))

Ciò si potrebbe accertare anche per via geometrica elementare

Calcoli espliciti

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \end{cases}$$

$$\underline{r} = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

$$\underline{r}_u = \left(\frac{2(1+u^2+v^2) - 4u^2}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2u(1+u^2+v^2) - (u^2+v^2-1) \cdot 2u}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2u[1+u^2+v^2-u^2-v^2+1]}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$\underline{r}_v = \left(\frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$E_{\parallel} \|\underline{r}_u\|^2 = \frac{1}{()^4} \left\{ [2(1-u^2+v^2)]^2 + 16u^2v^2 + 16u^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{()^4} \left[4 \left[\overset{x}{1+u^4+v^4} - \overset{x}{2u^2} + \overset{x}{2v^2} - \overset{x}{2u^2v^2} + \overset{x}{4u^2v^2} + \overset{x}{4u^2} \right] \right]$$

$$4 \left[\overset{||}{1+u^4+v^4} + \overset{||}{2u^2} + \overset{||}{2v^2} + \overset{||}{2u^2v^2} \right] = 4(1+u^2+v^2)^2$$

$$= 4 \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$E = \|\underline{r}_u\|^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = e_1 = \|\underline{r}_v\|^2$$

$$F = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = \frac{8}{(\quad)^4} \left[\underbrace{- (1-u^2+v^2)uv}_{\quad} \quad \underbrace{- uv(1-v^2+u^2)}_{\quad} \right] + 2uv$$

$$\rightarrow = -uv \left[\underbrace{1-u^2+v^2 + 1+u^2-v^2}_2 \right] + 2uv$$

$$= 0$$

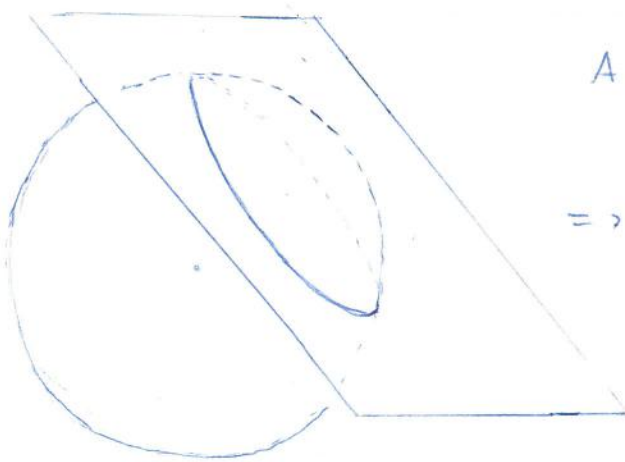
$$ds^2 = \frac{4(u^2+dv^2)}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{4 d\bar{z}d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

not. complexa

★ Facciamo vedere che la proiezione stereografica
 manda cerchi in cerchi [è l'unica tra le proiezioni
 conformi con questa proprietà
 (Lagrange)]
 (sulla sfera) (sul piano)

sia \mathcal{C} $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$ $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$
 (◇) $r^2 = u^2 + v^2$
 equimobilitate

una circonferenza su S^2 Sostituendo le (★) si ha



$$A \cdot \frac{2u}{1+r^2} + B \cdot \frac{2v}{1+r^2} + C \cdot \frac{r^2-1}{1+r^2} + D = 0$$

$$\Rightarrow 2A u + 2B v + C(r^2-1) + D(r^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow (C+D)(u^2+v^2) + 2A u + 2B v + (D-C) = 0$$

che, genericamente, è l'eq. di una circonferenza
 sul piano (u, v) . Viceversa, da $(u^2+v^2) + A'u + B'v + C' = 0$

e ponendo

$$\begin{cases} C+D = 1 \\ D-C = C' \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \right)$$

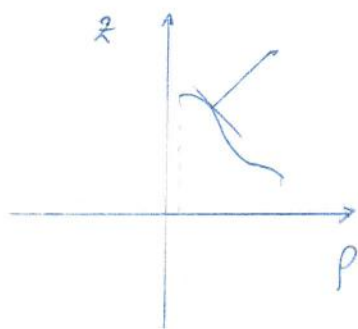
$$\begin{cases} B' = 2B \\ A' = 2A \\ C' = 0 \end{cases}$$

$2A = A'$, $2B = B'$, si arriva a (◇).

★ Anche tale proprietà può provarsi per via elementare.
 Era già nota ai greci (costruzione di astrolabi,
perfezionati dagli Arabi...)

▷ superficie di rivoluzione (o di rotazione)

discussione generale



coordinate cilindriche

$$\underline{r}(\rho, \varphi) =$$

$$\rho \cos \varphi \underline{i} + \rho \sin \varphi \underline{j} + \Phi(\rho) \underline{k}$$

$$z = \Phi(\rho)$$

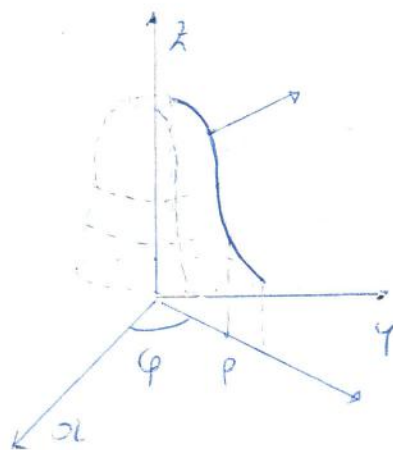
$$\equiv (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \Phi(\rho))$$

$$\rho \in I$$

Φ liscia...

$$\underline{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, \Phi'(\rho)) \quad \rho = \frac{d}{d\rho}$$

$$\underline{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)$$



$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi}{\|\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi\|} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & \Phi' \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}}{\|\cdot\|}$$

$$= \frac{1}{\|\cdot\|} [-\rho \cos \varphi \Phi' \underline{i} - \rho \sin \varphi \Phi' \underline{j} + \rho \underline{k}]$$

$$\|\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi\|^2 =$$

$$\rho^2 \Phi'^2 + \rho^2 = \rho^2 (1 + \Phi'^2)$$

$$\|\underline{r}_\rho \times \underline{r}_\varphi\| =$$

$$\rho \sqrt{1 + \Phi'^2}$$

(\Rightarrow sup. regolare...)

$$\underline{N} = -\cos \varphi \frac{\Phi'}{\sqrt{1 + \Phi'^2}} \underline{i} - \sin \varphi \frac{\Phi'}{\sqrt{1 + \Phi'^2}} \underline{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + \Phi'^2}} \underline{k}$$

(Vedere selezionato il vettore normale in figura (si osserva che $\Phi' < 0$...)

geometricamente \vec{i} (quasi) evidente

$\rho = \cos t \rightarrow$ "paralleli"

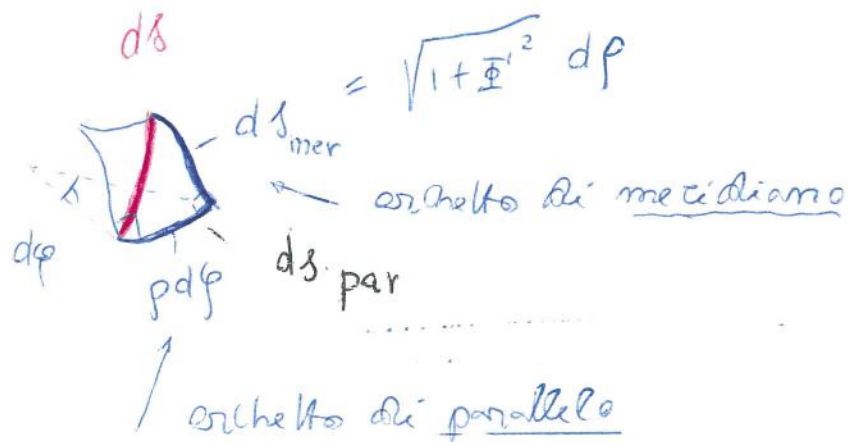
$\varphi = \cos t \rightarrow$ "meridiani"

Calcoliamo la prima forma fondamentale (metrica)

$$I^q \left\{ \begin{array}{l} \text{form} \\ \text{fondamentale} \end{array} \right. \begin{cases} E = \langle \underline{r}_\rho, \underline{r}_\rho \rangle = 1 + \Phi'^2 \\ F = \langle \underline{r}_\rho, \underline{r}_\varphi \rangle = \langle \underline{r}_\varphi, \underline{r}_\rho \rangle = 0 \\ G = \rho^2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{coord. curvilinee} \\ \underline{\text{ortogonali}} \end{array} \right]$$

$$ds^2 = (1 + \Phi'^2) d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

★ interpretazione infinitesimale



Osservazione

È ovviamente possibile descrivere una superficie di rivoluzione anche tramite $\rho = \psi(z)$

si ha $ds_{mer} = \sqrt{1 + \psi'^2} dz$ $z = \frac{d}{dz}$

$$e \quad ds^2 = (1 + \psi'^2) dz^2 + \underbrace{\psi^2}_{\rho^2} d\varphi^2$$

* metrica sulla pseudosfera di Beltrami

$$\begin{cases} u = \sigma - \tanh \sigma \\ v = \operatorname{sech} \sigma = \frac{1}{\cosh \sigma} \end{cases}$$

eq. parametrica della traiettoria

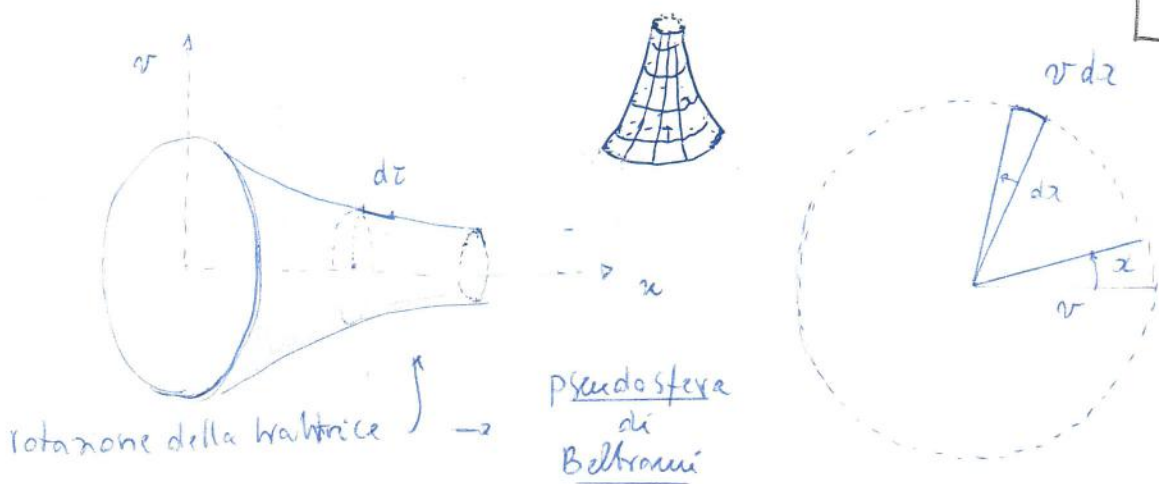
$\tau :=$ lunghezza d'arco della traiettoria

$$\tau = \int_0^\sigma \sqrt{du^2 + dv^2} = \dots = \log \cosh \sigma$$

posto $\cosh \sigma = e^\tau$

$v = e^{-\tau}$

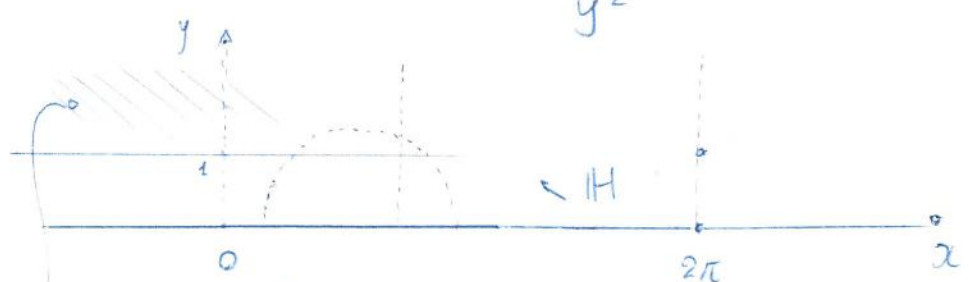
si veda il capitolo sulla traiettoria



rotazione della traiettoria \rightarrow pseudosfera di Beltrami

$$\begin{aligned} ds^2 &= v^2 dx^2 + dz^2 = e^{-2\tau} dx^2 + dz^2 \\ &= e^{-2\tau} (dx^2 + e^{2\tau} dz^2) = (e^\tau dz)^2 \\ &= (\text{posto } y = e^\tau (> 0)) \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = (de^\tau)^2 \end{aligned}$$

★★ $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
metrica iperbolica in H



pseudosfera: modello locale di H

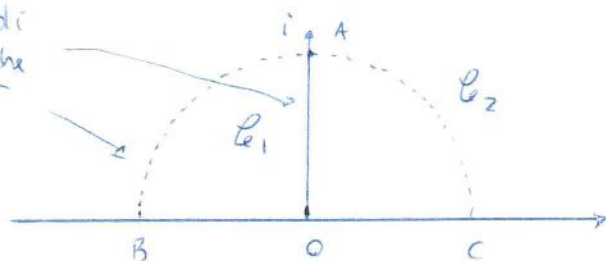
$\tau = 0 \Rightarrow y = 1$
XI-8

è "troncato" ed è un quoziente



la x è periodica

↑ esempi di geodetiche v. altre



$$y > 0 \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

calcoliamo, a titolo di esercizio, la lunghezza (tramite la metrica iperbolica, di OA e \widehat{BAC} .

$$OA: \int_0^l \frac{dy}{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^l \frac{dy}{y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\log l}_0 - \underbrace{\log \epsilon}_{+\infty} = +\infty$$

⚠ int. improprio

$$\widehat{BAC}: \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in (0, \pi)$$

$$\text{Si ha subito} \dots \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \quad (\text{integ. improprio}) \quad \text{⚠}$$

ma $x \varphi \rightarrow 0^+$ e $\sin \varphi \sim \varphi \Rightarrow$ l'integrale diverge (è essenzialmente la "latitudine crescente")

Si osserva poi che una traslazione lungo l'asse x ($x \mapsto x+a$) lascia la metrica inalterata, non così una traslazione lungo l'asse y !!

Inoltre un'omotetia $\begin{matrix} x \mapsto \lambda x \\ y \mapsto \lambda y \end{matrix} \quad \lambda > 0$

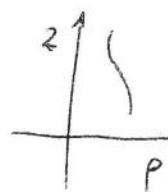
lascia pure inalterata la metrica iperbolica. Ipi angoli calcolati con le due metriche (euclidea e iperbolica) sono ovviamente gli stessi (esse sono conformemente equivalenti)

★ L'elicoide ed il catenoide costituiscono superficie localmente isometriche

★ elicoide : $\underline{r} = (u \cos v, u \sin v, v)$
 $\underline{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$
 $\underline{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$

$E = 1, F = 0, G = u^2 + 1$

matrice : $ds_{el}^2 = dx^2 + (u^2 + 1)dv^2$



$p = p(z)$

★ catenoide



$\begin{cases} x = \text{ch } z \cos v \\ y = \text{ch } z \sin v \\ z = z \end{cases}$

$ds_{\text{cat}}^2 = \underbrace{p^2 dx^2}_{ds_{\text{par}}^2} + \underbrace{(1 + p'^2) dz^2}_{ds_{\text{mer}}^2}$
 $= \text{ch}^2 z dx^2 + \text{ch}^2 z dz^2$

$p = \text{ch } z$
 $p' = \text{sh } z$

$1 + p'^2 = 1 + \text{sh}^2 z = \text{ch}^2 z$
 $= \text{ch}^2 z (dx^2 + dz^2)$

Se

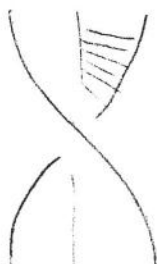
$\begin{cases} u = \text{sh } z \\ v = v \end{cases}$

$du = \text{ch } z dz$
 $dv = dv$

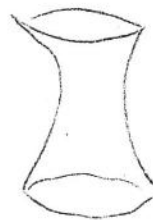
$ds_{el}^2 = ds_{\text{cat}}^2$

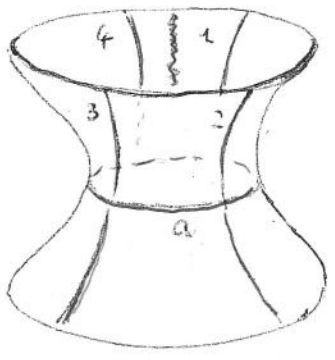
nei pti corrispondenti

$ds_{el}^2 = \text{ch}^2 z dz^2 + \text{ch}^2 z dx^2 = \text{ch}^2 z (dz^2 + dx^2)$

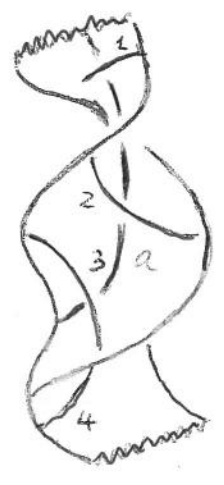


isometria locale

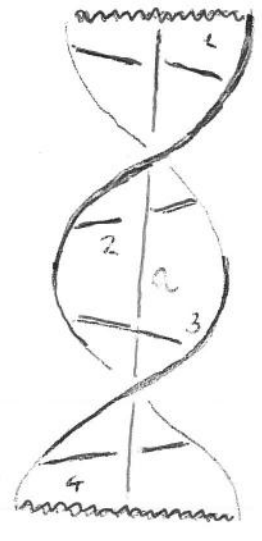




catenoid

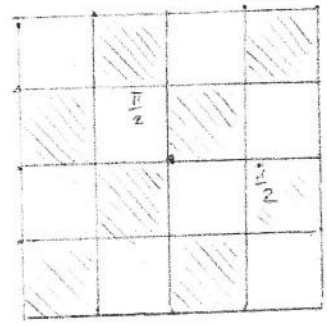


superficie di Scherk



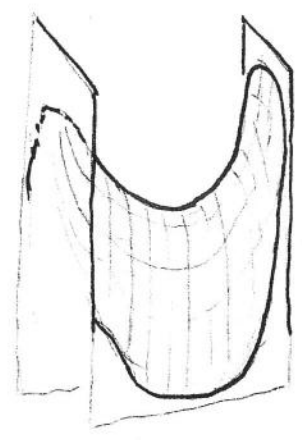
elicoid

★ Sup. di Scherk



$$r(x, y) = (x, y, \log\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right))$$

definita sui "quadrotti neri" della "scacchiera"
(v. fig.) $H = 0$



ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spina UCSC - Brescia

Lezione XII

★ Digressione : Endomorfismi simmetrici e Principio di Rayleigh

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo. Un operatore

spazio vettoriale
reale di dim = n
↑
prodotto scalare

lineare $T \in \text{End}(V)$

è detto simmetrico se, $\forall v, w \in V$, si ha

$$(★) \quad \langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

In virtù della bilinearità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$, è sufficiente verificare (★) per v, w appartenenti ad una base di V . Se ora $e = (e_1, \dots, e_n)$ è una

base ortonormale [una base si fatta si può sempre costruire in virtù del procedimento di Gram-Schmidt]

la matrice $m_{ee}(T)$ che rappresenta T ha

elementi

$$a_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle = \langle Te_i, e_j \rangle = \langle e_j, Te_i \rangle = a_{ji}$$

Si ricavi: in generale

$$m_{ee}(T) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$Te_1 \quad Te_m$

Componenti di Te_1 rispetto ad $e = (e_1, \dots, e_n)$

ovvero $m_{ee}(T)$ è simmetrica ★



vedremo in seguito che la matrice di un endomorfismo simmetrico rispetto ad una base che non sia ortonormale può risultare non simmetrica

vedi pagina seguente

Si ricordi altresì che
 se $e = (e_1, \dots, e_m)$
 è una base
 ortonormale, è

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$
 con
 $\alpha_i = \langle e_i, v \rangle$
 sicché
 $\alpha_{ij} = i$ -esima
 componente
 di Te_j rispetto ad
 $e = (e_1, \dots, e_m) \Rightarrow$
 $\alpha_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$

Esiste, per un endomorfismo
 simmetrico, il teorema spettrale:

T ammette una base ortonormale di
autovettori: $Te_i = \lambda_i e_i$

$$\Rightarrow \text{Mee}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \leftarrow \text{diagonale}$$

con gli autovalori $\lambda_i \in \mathbb{R}$ contati.
 la loro moltiplicità algebrica
 (= moltiplicità geometrica)

Si ha in particolare $V_\lambda^T \perp V_\mu^T$

se $\lambda \neq \mu$

\uparrow
 autospazio associato
 all'autovalore λ .

i.e. autospazi corrispondenti ad autovalori
 diversi sono ortogonali

In particolare, una matrice simmetrica può essere
 direttamente interpretata come un operatore simmetrico
 rispetto al prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n

$$\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right), \quad \langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\begin{matrix} x^t \\ \hline \dots \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} | \\ \vdots \\ | \end{matrix} y$$

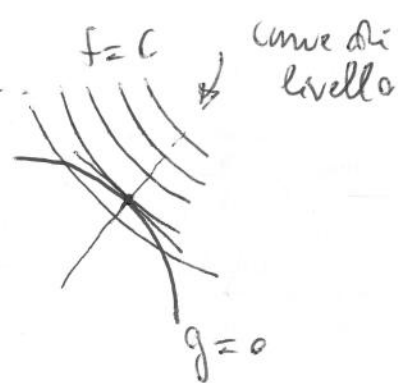
Possiamoci allora in questo caso e pensiamo
 pure $n=2$ per illustrare il Principio di Rayleigh

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2 reale e simmetrica

Sia $f(x, y) = x^t A x = q_A(x)$ $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $= ax^2 + 2bxy + dy^2$ \leftarrow forma quadratica associata ad A

Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = \|x\|^2 - 1 = 0$ la circonferenza unitaria.

Troviamo i pli critici di f vincolata a $g = 0$,



utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

\leftarrow vettori paralleli = una di livello tangente al vincolo
 \leftarrow moltiplicatore λ
 \leftarrow vincolo
 v. figura accanto

Si ha subito

$$\begin{cases} \lambda a x + \lambda b y = \lambda a x \\ \lambda b x + \lambda d y = \lambda b x \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = \lambda X}$$

\leftarrow autovettore \leftarrow autovettore

$$\|x\|^2 = 1$$

(in part $x \neq 0$)

Pertanto, concludiamo che i pti critici di $f = q_A$

vincolati su S^1 (circonferenza unitaria $g=0$) corrispondono a gli autovalori di norma 1 e i corrispondenti valori critici sono gli autovalori di A

Il discorso è affatto generale e costituisce il

Principio di Rayleigh

Esempio: sia $A = A^t$, definita positiva

($\lambda_i > 0$) e sia $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ per fissare le idee. Si ha

la seguente valida interpretazione geometrica

