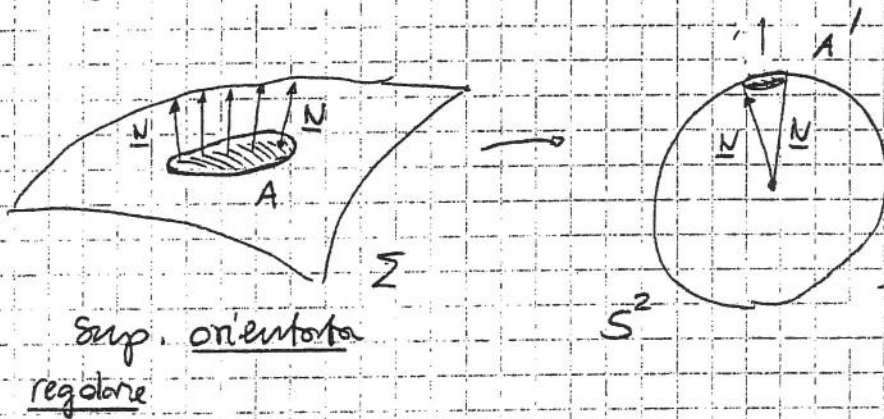


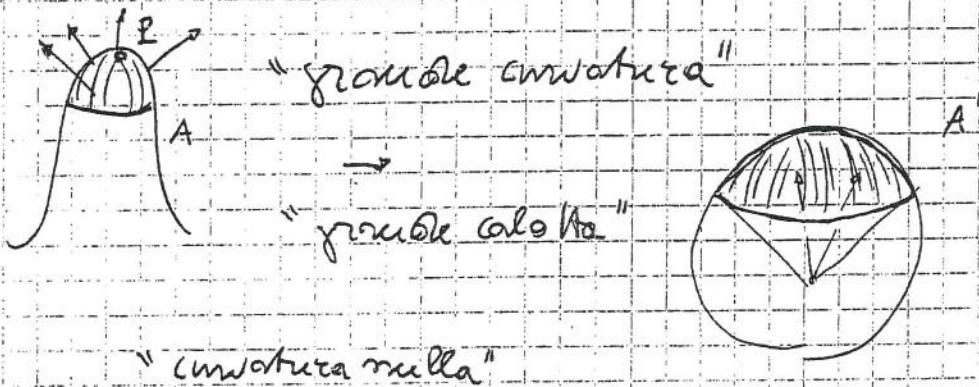
★ LA MAPPA DI GAUSS (o applicazione di Gauss)

Si vuole generalizzare il concetto di curvatura dalle curve alle superfici.

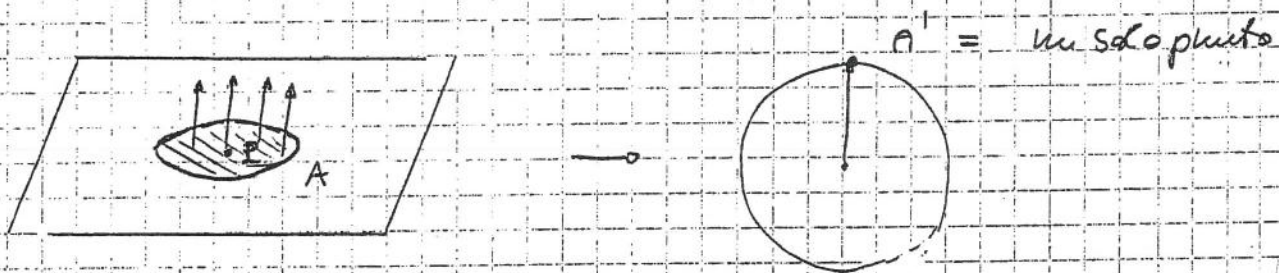
Idea di base:



Sup. orientata  
regolare



"curvatura nulla"



Gauss:  $K(P) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$  (e Rodrigues) curvatura in P

aree di  $A'$  e  $A$ ... (orientate)  
(K potrà risultare anche negativa)

★ Per  $S^2_R$  si ottiene  $K = \frac{1}{R^2}$

(... si ricordi per la circ. di raggio  $R$ , la curvatura vale  $\frac{1}{R}$  ...)

Forma Q. 22 amo

sup regolare orientata

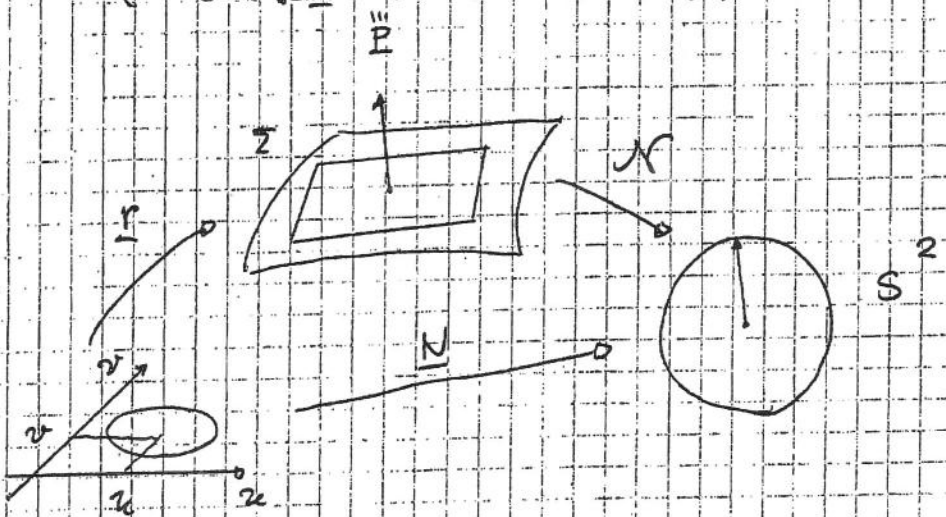
$$\mathcal{N} : \begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\quad} & S^2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{N}(P) = \underline{N}(P) \end{array}$$

★ mappa di Gauss

Sia  $\underline{N} = \underline{N}(u, v) \quad (u, v) \in \mathcal{U}$

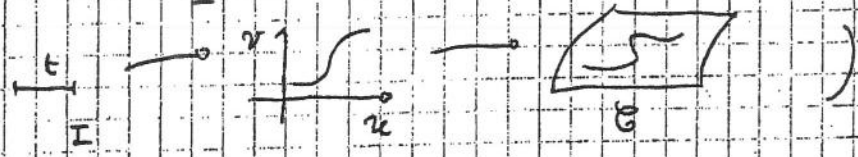
★  $\boxed{\mathcal{N} \circ \underline{\gamma} = \underline{N}}$

(  $\mathcal{N}(\underline{\gamma}(u, v)) = \underline{N}(u, v)$  )



( Potremo poi, per il seguito, per una curva regolare  $\gamma$

su  $\mathbb{R}$   $\underline{\gamma}(t) := \underline{\gamma}(u(t), v(t)) \quad t \in I \dots$  )



Definiamo differentiabilita (secondo Frechet)

$f: \mathcal{U} \subset V \rightarrow W$   
regione

$v, w$  sp. vett. reali (o complessi)  
 $\dim V = n; \dim W = m$

$f$  diff. in  $a \in \mathcal{U}$ :  
 $x - a = h$

$f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{\text{differenziale di } f \text{ in } a} \cdot h + o(\|h\|) \quad x \in \mathcal{U} \subset V$

concretamente  $df(a) \in \text{Hom}(V, W)$   
(  $m$  righe,  $n$  colonne )

★ matrice Jacobiana



Studiamo il differenziale di  $\mathcal{N}$

(nel senso di Fréchet)

$$S := -d\mathcal{N}$$

operatore  
di forma  
(... shape)

$$d\mathcal{N}|_P : T_P \Sigma \rightarrow T_{\mathcal{N}(P)} S^2$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte  $\bar{u}$

prodotto tra matrici

$$d\mathcal{N}|_{(u,v)} = d\mathcal{N}|_{\underline{r}(u,v)} \cdot d\underline{r}|_{(u,v)}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \underline{N}_u & \underline{N}_v \end{pmatrix} = d\mathcal{N}|_{\underline{r}(u,v)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{r}_u & \underline{r}_v \end{pmatrix}$$

Ricordando che

$$A \cdot B = A \left( \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) =$$

↑  
colonne di B

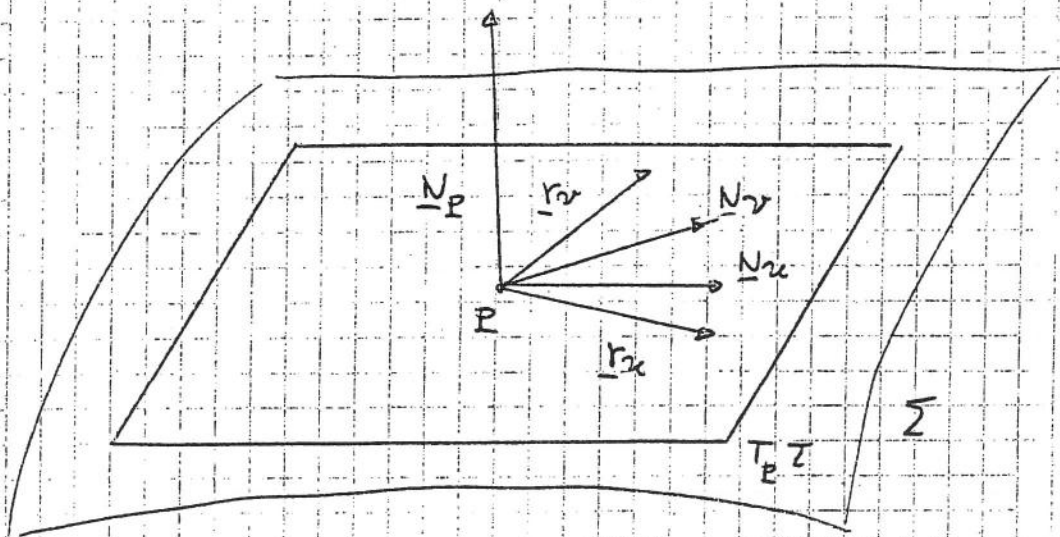
$$= \left( A \left( \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \quad A \left( \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \quad \dots \quad A \left( \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \right)$$

S'ha:

$$\star \begin{cases} d\mathcal{N}|_{\underline{r}(u,v)}(\underline{r}_u) = \underline{N}_u \\ d\mathcal{N}|_{\underline{r}(u,v)}(\underline{r}_v) = \underline{N}_v \end{cases}$$

posso leggere  $S$   
come operatore  
da  $T_P \Sigma$  in se stesso





costantemente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t) \\ \underline{N} = \underline{N}(t) \end{array} \right. \quad t=0 \rightarrow P_0 \equiv \underline{\alpha}(0)$$

$$\dot{\underline{N}}(0) = \left. \frac{d\underline{N}}{dt} \right|_{t=0} = \underline{N}_x^0 \dot{r}_x(0) + \underline{N}_y^0 \dot{r}_y(0)$$

$$\parallel \left. \frac{dX(\underline{\alpha}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. dX \right|_{\underline{\alpha}(0)} (\underline{r}_x^0) \dot{r}_x(0) + \left. dX \right|_{\underline{\alpha}(0)} (\underline{r}_y^0) \dot{r}_y(0)$$

Fatto cruciale

$$\star \quad S : T_P \bar{Z} \rightarrow T_P Z \quad \text{è simmetrico}$$

$$\left( S_P'' \right)$$

Dica. Basta verificare che  $\langle \underline{r}_x | S \underline{r}_y \rangle = \langle \underline{r}_y | S \underline{r}_x \rangle$

ovvero che  $\langle \underline{r}_x | \underline{N}_y \rangle = \langle \underline{r}_y | \underline{N}_x \rangle$ .

ora, da  $\langle \underline{N} | \underline{r}_x \rangle = \langle \underline{N} | \underline{r}_y \rangle = 0$  segue

$$\frac{\partial}{\partial y} \langle \underline{N} | \underline{r}_x \rangle = \langle \underline{N}_y | \underline{r}_x \rangle + \langle \underline{N} | \underline{r}_{xy} \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \underline{N} | \underline{r}_y \rangle = \langle \underline{N}_x | \underline{r}_y \rangle + \langle \underline{N} | \underline{r}_{yx} \rangle = 0$$

$\Rightarrow$  l'asserto segue poiché  $\underline{r}_{xy} = \underline{r}_{yx} \dots \quad \square$



★ Si ponga per  $\underline{v} \in T_P \Sigma$ ,  $\|\underline{v}\| = 1$

$$\boxed{\mathbb{I}_p(\underline{v}) := \langle \underline{v} | S_P \underline{v} \rangle}$$

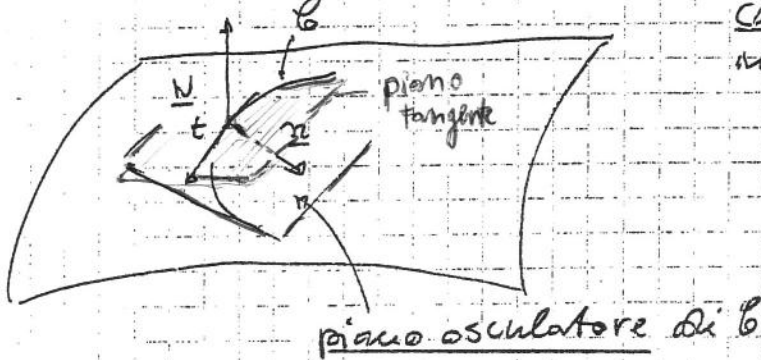
(2<sup>a</sup> forma quadratica fondamentale)

Per poter interpretare geometricamente tale forma ci occorre la nozione di

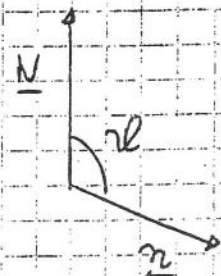
★ curvatura normale (in  $P$ ) di una curva  $\mathcal{C}$  su  $\Sigma$  (.. biregolare..) passante per  $P$ .

$$K_n(P) = K(P) \cdot \cos \vartheta = K(P) \langle \underline{N} | \underline{n} \rangle$$

$$(\underline{n} = \langle \underline{N}, \underline{T}'' \rangle (P))$$



↓  
curvatura di  $\mathcal{C}$   
in  $P$



↓  
piano osculatore di  $\mathcal{C}$   
in  $P$

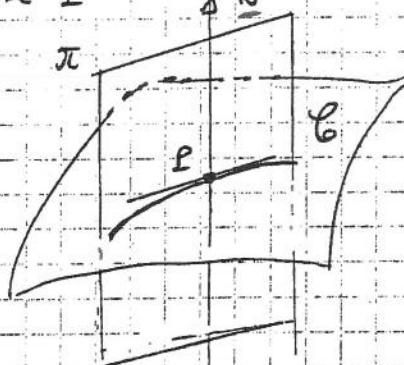
In particolare

$$\text{se } \mathcal{C} = \Sigma \cap \pi \rightarrow$$

$$\underline{n} = \pm \underline{N}$$

e  $K_n$  diviene

la curvatura di  $\mathcal{C}$  (con segno:  $\mathcal{C}$  è piana!)



$\pi$ : piano e fascio di piani per la retta individuata da  $\underline{N}$  contengono una retta di  $T_P \Sigma$  passante per  $P$  prefissata.



# ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spina - UCSC Brescia

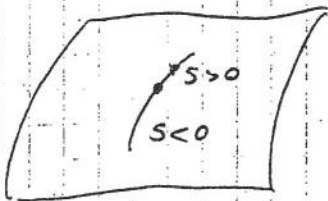
Lezione XIV

## Teorema (Meusnier)

Tutte le curve per  $P \in \Sigma$  aventi la stessa retta tangente hanno la stessa curvatura normale. Precisamente:

$$\mathbb{I}_P(\underline{\alpha}'(0)) = \kappa_n(P)$$

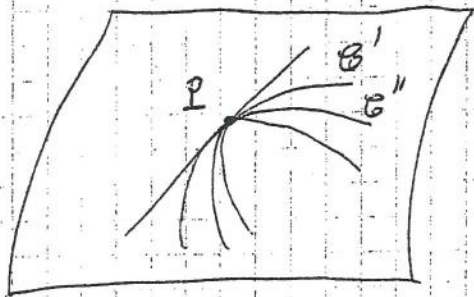
$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$   $s$ : ascissa curvilinea



$$(\|\underline{\alpha}'\| = 1)$$

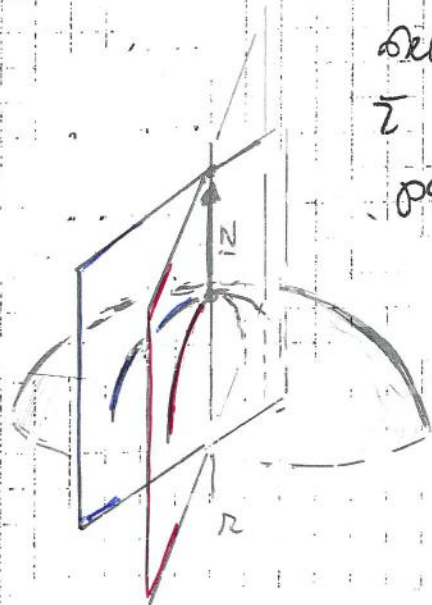


non c'è dipendenza dall'orientamento di  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}''$ ...



★ I valori di  $\mathbb{I}_P$

si ottengono considerando le curvature (con segno) delle curve ottenute intersecando  $\Sigma$  con i piani del fascio per  $r$





### Dimostrazione

$\underline{p}$    $\alpha(s) = \underline{r}(u(s), v(s)) \quad s \in I (\ni 0)$

si ha

$$\langle \underline{N}(s) \mid \underline{\alpha}'(s) \rangle = 0 \quad s \in I \quad (\text{è giacenza})$$

$$\Rightarrow \langle \underline{N}'(s) \mid \underline{\alpha}'(s) \rangle + \langle \underline{N}(s) \mid \underline{\alpha}''(s) \rangle = 0$$

$(T = \frac{d}{ds})$  si ha:

$$\Pi_{\underline{p}}(\underline{\alpha}'(0)) = - \langle dN_{\underline{p}} \underline{\alpha}'(0) \mid \underline{\alpha}'(0) \rangle =$$

$$= - \langle \underline{N}'(0) \mid \underline{\alpha}'(0) \rangle = \langle \underline{N}(0) \mid \underline{\alpha}''(0) \rangle =$$

$$= \kappa_m(0)$$

□

★ Poiché  $S$  è simmetrico,  $S$  è diagonalizzabile, i suoi autovalori sono reali e, se distinti, danno luogo ad autospazi ortogonali.

Siano tali autovalori  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , con  $\kappa_1 \leq \kappa_2$ . Per ovvie ragioni, vengono chiamati curvature principali.

Inoltre è:

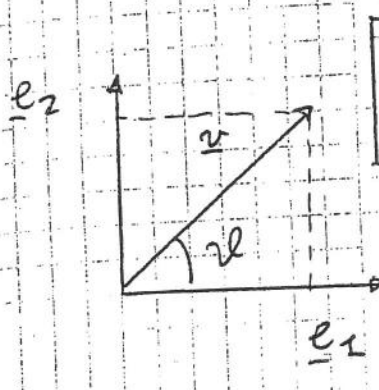
$$\kappa_1 = \min_{\|\underline{v}\|=1} \Pi_{\underline{p}}(\underline{v}) \quad \underline{v} \in T_{\underline{p}}\Sigma$$

★  $\kappa_2 = \max_{\|\underline{v}\|=1} \Pi_{\underline{p}}(\underline{v})$  (Principio di Rayleigh)



Considerata una base ortonormale  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  di  $\mathbb{R}^2$  formata da autovettori di  $S$  :  $S \underline{e}_i = \kappa_i \underline{e}_i$   $i=1,2$ .

e posto  $\underline{v} = \cos \vartheta \underline{e}_1 + \sin \vartheta \underline{e}_2$  si ha

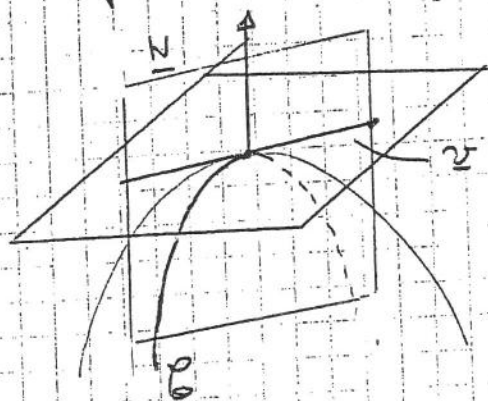


$$\kappa := \Pi_P(\underline{v}) = (\cos \vartheta \quad \sin \vartheta) \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta$$

ovvero si ha la

★ formula di Eulero



$\kappa$  è la curvatura (con segno) di  $C$

I punti critici di  $f(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta$  sono  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$  e corrispondono agli autovettori di norma 1 (principio di Rayleigh)

★ Sia  $K := \det S = \kappa_1 \kappa_2$  ( $K = K(P)$ )

$K$  : curvatura gaussiana di  $\Sigma$  in  $P$

$$H := \frac{1}{2} \text{Tr}(S) = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{curvatura media}$$

Vogliamo determinare  $K$  e  $H$  : per fare questo,

abbiamo esprimere  $\Pi_P$  in termini di una forma quadratica sullo spazio dei parametri,  $\mathbb{R}^2$

che chiameremo ancora 2<sup>a</sup> forma quadratica fondamentale

Si partendo da  $\langle \underline{N} | \underline{r}_x \rangle = 0$  ;  $\langle \underline{N} | \underline{r}_y \rangle = 0$

Derivando

$$\langle \underbrace{\underline{r}_x \underline{r}_x}_e | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_x | \underline{N}_x \rangle = 0$$

$$\langle \underbrace{\underline{r}_y \underline{r}_y}_g | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_y | \underline{N}_y \rangle = 0$$

$$\langle \underbrace{\underline{r}_x \underline{r}_y}_f | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_x | \underline{N}_y \rangle = 0$$

$$\langle \underbrace{\underline{r}_y \underline{r}_x}_f | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_y | \underline{N}_x \rangle = 0$$

si trova la  
simmetria  
dell'operatore  
di forma

" La 2° forma fondamentale ci dice come  $\underline{z}$  è immersa in  $\mathbb{R}^3$  ... entra in gioco  $\underline{N}$ .  
La 1° forma f. (metrica) descrive la geometria intrinseca di  $\Sigma$  ... "

Con le solite notazioni, si ha, dalle formule precedenti

$$\boxed{\Pi_p(\underline{\dot{\alpha}}(0)) = -\langle \underline{\dot{\alpha}}(0) | dX_p \underline{\dot{\alpha}}(0) \rangle = \dots}$$

$$(e \text{ arbitraria}) \quad \dots = e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2$$

$$= (\dot{u} \ \dot{v}) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

si possono identificare con  $(dx, dy) \dots$



Delta gli:

$$\underline{\dot{\alpha}} = \underline{r_u} \dot{u} + \underline{r_v} \dot{v}$$

$$-\underline{N} = \underline{S} \cdot \underline{\dot{\alpha}} = -(\underline{N_u} \dot{u} + \underline{N_v} \dot{v})$$

$$\begin{aligned} \text{II}(\underline{\dot{\alpha}}) &= \\ \langle \underline{\dot{\alpha}}, \underline{S} \underline{\dot{\alpha}} \rangle &= - \left[ \underbrace{\langle \underline{r_u}, \underline{N_u} \rangle}_{-e} \dot{u}^2 + 2 \underbrace{\langle \underline{r_u}, \underline{N_v} \rangle}_{-f} \dot{u} \dot{v} + \underbrace{\langle \underline{r_v}, \underline{N_v} \rangle}_{-g} \dot{v}^2 \right] \end{aligned}$$

$$= e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2$$

Si noti, successivamente, che

$$K_n = \text{II}(\underline{\alpha}') = \text{II} \left( \underline{\dot{\alpha}} \cdot \frac{dt}{ds} \right) = \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \text{II}(\underline{\dot{\alpha}})$$

$$\text{ma } \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2,$$

pertanto

$$K_n = \frac{e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2}{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2}$$

In generale, se si vuole la curvatura normale di una curva avente tangente in un punto da  $\underline{v} \in T_p \Sigma$

$$\text{si ha } K_n(p) = \frac{\text{II}(\underline{v})}{\|\underline{v}\|^2}$$



◇ Calcolo della curvatura gaussiana e della curvatura media.

TEOREMA

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

↳ rapporto di determinanti di f. quadratiche sul piano  $(u, v)$

$$H = \frac{1}{2} \frac{ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}$$

Dimostrazione sia  $\underline{v} \in T_p \Sigma$  un autovettore

di  $S$ . Si ha  $S \underline{v} = \lambda \underline{v}$   
 ↳ autovalore

Da cui, posto  $\underline{v} = \alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )

$$\star -\alpha \underline{N}_u - \beta \underline{N}_v = \lambda (\alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v)$$

Moltiplicando scalarmemente entrambi i membri per  $\underline{r}_u$  e poi per  $\underline{r}_v$ , si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} \alpha (e - \lambda E) + \beta (f - \lambda F) = 0 \\ \alpha (f - \lambda F) + \beta (g - \lambda G) = 0 \end{cases}$$

Altrimenti esso ammette una sol. non banale  $((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$

Da cui si trae

$$(e - \lambda E)(g - \lambda G) - (f - \lambda F)^2 = 0 \quad (\star)$$

(eq. di 2° grado in  $\lambda$ )



Ricordando che

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = a(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)$$

$\alpha_1, \alpha_2$   
radici

$a \neq 0$

con  $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}$        $\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}$

e che nel nostro caso  $\alpha_i = R_i$ , si ottiene l'asserto.  $\square$

Dettagli: sviluppando (\*) si ottiene infatti

$$(Eg - F^2)R^2 - (Eg + 2Ff - 2Ff)R + eg - f^2 = 0$$

da cui la conclusione.

★ Corollario Le curvature principali si ottengono risolvendo l'equazione

$$R^2 - 2H R + K = 0$$

$\square$

Osservazione

Sia data una superficie in forma cartesiana:  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ )  
(f liscia...)

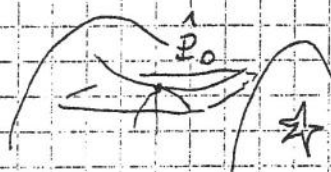
Sia  $P_0 = (x_0, y_0)$  un punto critico di  $f$

$$\nabla f(P_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) = 0$$

$$(\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right))$$

Sia  $\hat{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$   
"  $f(x_0, y_0)$

cf. l'interpretazione geometrica di  $\mathbb{II}$



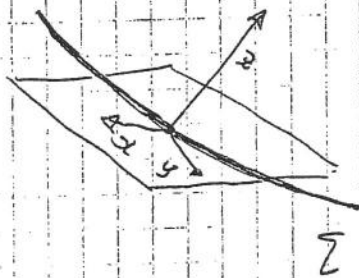
In tal caso

★ matrice di  $\mathbb{II}_{\hat{P}_0}$  =  $\mathcal{H}_{P_0}$   $\equiv$  matrice hessiana

e  $K = \det \mathcal{H}$  e curv. principali  
" autovalori di  $\mathcal{H}$

... verificare ...

... Questa osservazione può risultare utile  
 in sede di esercizi... ogni punto di  $\Sigma$  risulta  
 critico rispetto ad un opportuno sistema di  
 riferimento, e si può ripetere il teorema del  
 Dini...



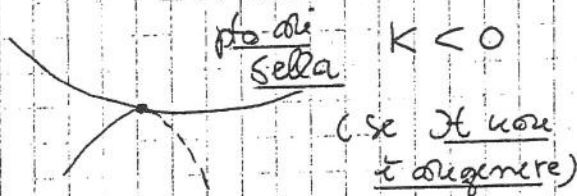
[ Osservazione: sia  $y = y(x) \quad x \in I \dots$

$$R(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} \quad \text{curvatura}$$

(se con segno il minimo!),

in un pto critico  $y'(x) = 0 \Rightarrow R(x) = |y''(x)|$

... la derivata seconda misura la curvatura...]



minimo (rd)  
 $K > 0$

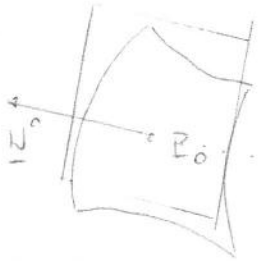


massimo (rd)  
 $K < 0$



◇ Ulteriore interpretazione geometrica della II<sup>a</sup> forma fondamentale

Nelle ipotesi e notazioni usuali, consideriamo lo sviluppo di Taylor



$$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) &= \underline{r}_0 + \underline{r}_u^0 \Delta u + \underline{r}_v^0 \Delta v + \\ &+ \frac{1}{2} (\underline{r}_{uu}^0 \Delta u^2 + 2 \underline{r}_{uv}^0 \Delta u \Delta v + \underline{r}_{vv}^0 \Delta v^2) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta u \\ v &= v_0 + \Delta v \end{aligned}$$

Fissiamo il sistema di riferimento

prendendo come origine  $P_0$ , come "piano (x, y)" il piano tangente; come "asse z" la retta a questo perpendicolare passante per  $P_0$ , e diretta come  $N^0$ .

Lo scostamento verticale di  $\underline{r}$  dal piano tangente sarà dato, in un intorno di  $P_0$ , dalla "funzione altera"

$$z := \langle \underline{r}(u, v), \underline{N}^0 \rangle = \frac{1}{2} [\langle \underline{r}_{uu}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta u^2 + 2 \langle \underline{r}_{uv}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta u \Delta v + \langle \underline{r}_{vv}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta v^2] + \dots$$

si ricorrono:  $P_0 = \underline{0}$

$$\langle \underline{r}_u, \underline{N} \rangle = 0 \quad \text{+ in generale}$$

$$\langle \underline{r}_v, \underline{N} \rangle = 0$$

$$= \frac{1}{2} [e \Delta u^2 + 2f \Delta u \Delta v + g \Delta v^2] + \dots$$

II<sup>a</sup> forma fondamentale

$$= \frac{1}{2} (\Delta u \ \Delta v) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + \dots$$

ossia, il governato, al 2° ordine, della II<sup>a</sup> forma  
fondamentale. Si assume che, posto

$$z = f(u, v) = \langle E(u, v), \underline{N}^0 \rangle, \text{ la}$$

funzione  $f$  ha un pto critico in  $(u^0, v^0)$ , e l'Hessiana  
 coincide con la II<sup>a</sup> fo fondamentale

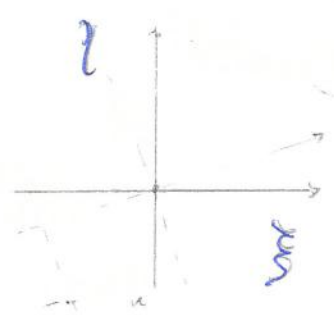
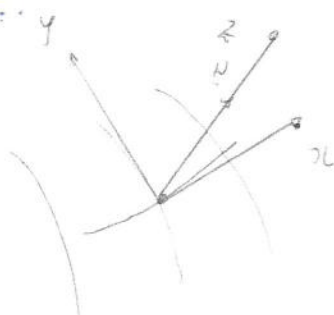
Se ora fissiamo gli assi  $x$  e  $y$  lungo le direzioni  
principali (\*) (assumiamo, nel caso generale,  $R_1 \neq 0, R_1 \neq R_2$   
 (in particolare,  $E$  non è parabolico (i.e. una delle curv. princ. è  
 nulla, né ombelicale ( $R_1 = R_2$ ) né, a fortiori, planare ( $K_1 = K_2 = 0$ )  
 tra cui 0

velocità agli auto sp.  
 di  $S$ . v. c. di altre

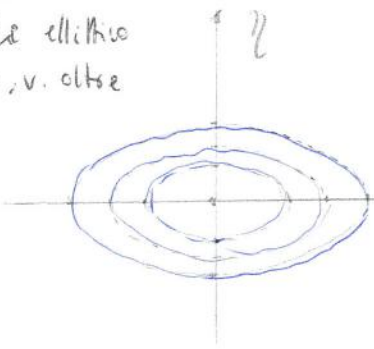
assumendo  $E = G = 1, F = 0$  in  $P_0$

$R_1 < R_2$   
 più grosse  
 & idee

$$z = \frac{1}{2} (R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2) + \dots$$



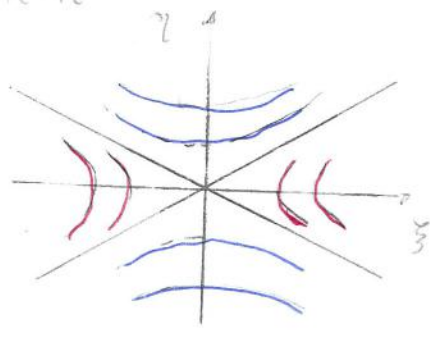
paraboloidi ellittico  
 o iperbolico, v. oltre



Curve di  
 livello  
 approssimate  
 di  $z = f(u, v)$

$0 < R_1 < R_2$   
 $R_1 < R_2 < 0$

nel piano dei  
 parametri

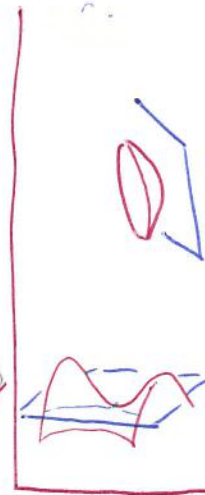
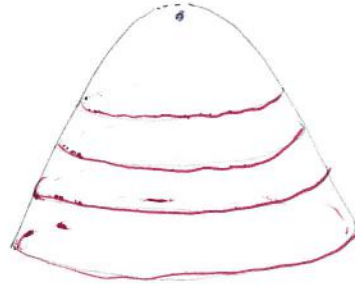
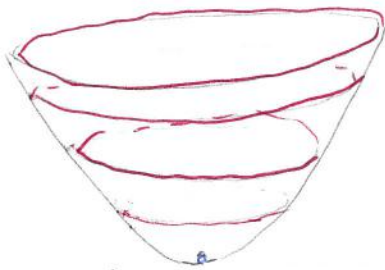


$R_1 < 0 < R_2$

$R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2 = \pm 1$   
 \*\* indicatrice di Dupin  
 ellisse, se  $R_i$  concordi  
 iperbolici, se  $R_i$  discordi

$R_i \neq 0$





$K > 0$

pto ellittico  
 $\tau$  loc.

da una  
stessa parte  
del piano  
tangente

$K < 0$

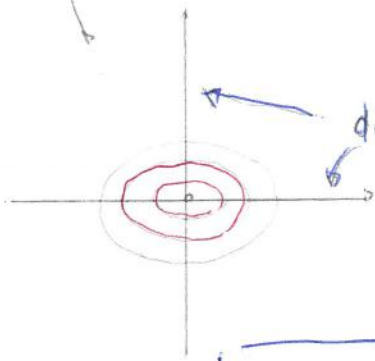
pto iperbolico:

il  
piano  
tangente  
attraversa  
 $\tau$

paraboloidi ellittici

paraboloide  
iperbolico

o a sella

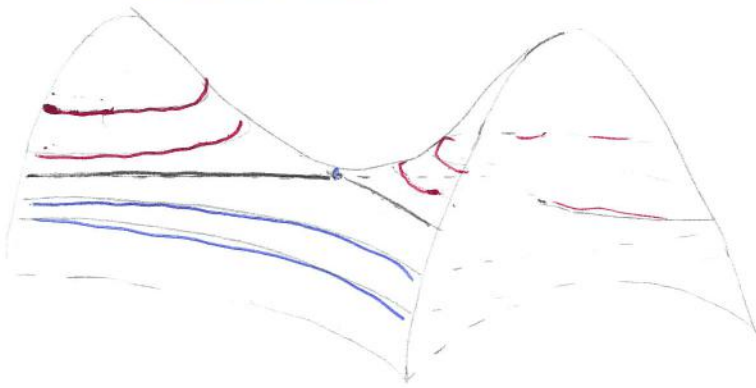


direzioni principali

in un punto ombelicale  $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$   
si ottengono le conferenze...

$P_0$ : punto  
ellittico di  $\Sigma$

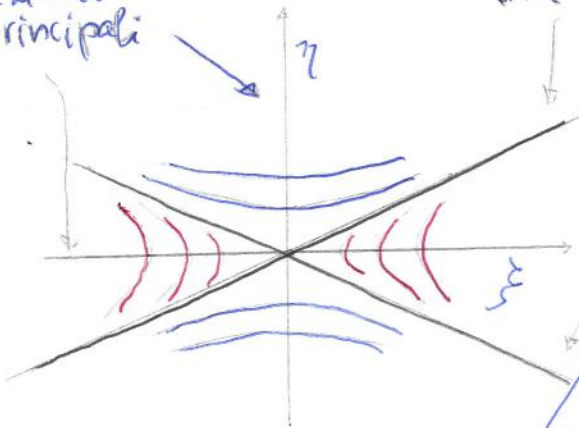
$K = \kappa_1 \kappa_2 > 0$



direzioni  
principali

direzioni asintotiche

$K < 0$



$P_0$ : punto iperbolico  
di  $\Sigma$

L'equazione di approssimazione  
che fornisce le curve  
asintotiche è

$e u^2 + 2f uv + g v^2 = 0$

queste sono presenti solo nel caso in cui  $K \leq 0$

Se una delle due curv. principali è nulla si  
parla di punto parabolico ( $K = 0$ )

★ Linee di curvatura

Una curva  $\mathcal{C} \subset \Sigma$  è detta linea di curvatura

se la sua tangente individua punto per punto una

direzione principale, ovvero  $\underline{\dot{\alpha}} (\neq 0)$  ( $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t) = \underline{r}(u(t), v(t))$ )

è un vettore di  $\mathcal{S}$  (pto per punto): in formale

$$\mathcal{S} \underline{\dot{\alpha}} = \kappa \underline{\dot{\alpha}}$$

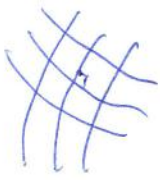
Ma  $\mathcal{S} \underline{\dot{\alpha}} = -\underline{\dot{N}} \Rightarrow \underline{\dot{N}} = -\kappa \underline{\dot{\alpha}}$

pertanto  $\underline{\dot{N}} \parallel \underline{\dot{\alpha}}$  (teorema di Rodrigues)

(equiv.  $\underline{\dot{N}} \times \underline{\dot{\alpha}} = \underline{0}$ ). In generale, in un intorno

di un pto in cui  $\kappa_1 \neq 0, \kappa_1 \neq \kappa_2$  esistono

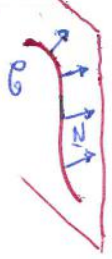
|| due famiglie di linee di curvatura, necessariamente ortogonali (v. oltre per i dettagli analitici).



A titolo di esempio, mostreremo direttamente che i meridiani e i paralleli di una superficie di rivoluzione costituiscono le sue

linee di curvatura.

• meridiani



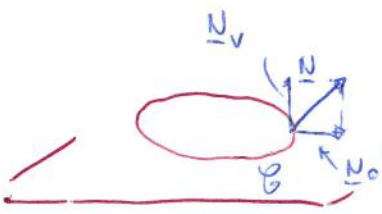
$\underline{\dot{N}} \perp \underline{N}$  ed è contenuto nel piano meridiano, pertanto è tangente a  $\mathcal{C}$ , i.e.  $\underline{\dot{N}} \parallel \underline{\dot{\alpha}}$

• paralleli

: sono linee di curvatura poiché punto per punto sono ortogonali ai meridiani. Vediamo anche direttamente:

$$\underline{N} = \underline{N}_0 + \underline{N}_v \Rightarrow \underline{\dot{N}} = \underline{\dot{N}}_0 + \underline{\dot{N}}_v = \underline{\dot{N}}_0$$

( $\underline{N}_v$  è costante). Ma  $\underline{\dot{N}}_0 \perp \underline{N}_0$  (ha modulo costante) e pertanto, poiché è contenuto nel piano del parallelo  $\mathcal{C}$ , deve essere tangente a  $\mathcal{C}$ .  $\square$





# Dettagli sul calcolo delle direzioni principali e delle linee di curvatura

Si ricordi il calcolo di  $H$  e  $K$ ; riprendiamo

l'equazione  $\downarrow$

$$\begin{cases} S\underline{v} = \kappa \underline{v} \\ \underline{v} = \alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} (e - \kappa E)\alpha + (f - \kappa F)\beta = 0 \\ (f - \kappa F) + (g - \kappa G)\beta = 0 \end{cases} \quad \text{cambiamo } \underline{v} \mapsto \underline{\alpha} = \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \underline{r}_u + \begin{matrix} \beta \\ \alpha \end{matrix} \underline{r}_v$$

raggruppiamo, ponendo  $\alpha \equiv \dot{u}$   $\beta \equiv \dot{v}$

$$\begin{cases} (e \dot{u} + f \dot{v}) - (E \dot{u} + F \dot{v}) \kappa = 0 \\ (f \dot{u} + g \dot{v}) - (F \dot{u} + G \dot{v}) \kappa = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e \dot{u} + f \dot{v} & E \dot{u} + F \dot{v} \\ f \dot{u} + g \dot{v} & F \dot{u} + G \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ -\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per avere soluzioni deve essere  $\det(\quad) = 0$

ossia:

$$(e \dot{u} + f \dot{v})(F \dot{u} + G \dot{v}) - (E \dot{u} + F \dot{v})(f \dot{u} + g \dot{v}) = 0$$

$$(eF - Ef) \dot{u}^2 + (eG + fF - fF - Eg) \dot{u}\dot{v} + (fG - Fg) \dot{v}^2 = 0$$

$$(eF - Ef) \dot{u}^2 + (eG - Eg) \dot{u}\dot{v} + (fG - Fg) \dot{v}^2 = 0$$

↑  
Equazione differenziale  
per le linee di curvatura

L'equazione delle linee di curvatura può essere scritta nella forma (semplice da ricordare)

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Risoliamo il problema seguente: quali  $\dot{u}$  (che le curve  $C_u, C_v$  costituiscono con esse le linee di curvatura?)  $\dot{u} = 0$  ( $u = \text{cost}$ ) fornisce

$$\dot{v}^2 (Fg - fG) = 0 \Rightarrow Fg - fG = 0$$

Analogamente  $\dot{v} = 0$  fornisce

$$\dot{u}^2 (Ef - eF) = 0 \Rightarrow Ef - eF = 0$$

Poniamoci nella condizione  $\kappa_1 \neq \kappa_2$   
 $\mu_i \neq 0$   
 $g_i$  ellittici o iperbolici  
non ombelici

Ma due curve  $\boxed{F=0}$  ( $C_u$  e  $C_v$  si tagliano ortogonalmente)  $\Rightarrow fG = Ef = 0$

$$\Rightarrow \boxed{f=0} \quad (E > 0, G > 0)$$

viceversa  $f=F=0$  fornisce (\*)

$$\dot{u}\dot{v} (Eg - eG) = 0 \Rightarrow (\text{se } Eg - eG \neq 0)$$

$\Rightarrow \dot{u} = 0$  o  $\dot{v} = 0 \Rightarrow$  le  $C_u, C_v$  sono linee di curvatura



Lezioni de tagli:  $\text{ca } F=f=0 \quad i$

$$K = \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G} \quad , \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right)$$

$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{e}{E} \quad , \quad R_2 = \frac{g}{G}$$

$$R_i \neq 0 \Rightarrow e \neq 0 \quad , \quad g \neq 0 \quad \text{e} \quad R_1 \neq R_2 \Leftrightarrow$$

$$Eg - eG \neq 0 \quad , \quad \text{che } i \text{ per l'appunto la condizione (*)}$$

◇  $\mathbb{I}^q$  forma fondamentale per le superficie di rivoluzione

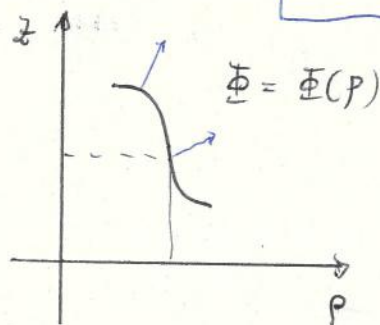
Si ricordi:

coord. cilindriche

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, \varphi) = (p \cos \varphi, p \sin \varphi, \Phi(p))$$

$$\mathbf{r}_p = (\cos \varphi, \sin \varphi, \Phi'(p)) \quad \dot{=} \frac{d}{dp}$$

$$\mathbf{r}_\varphi = (-p \sin \varphi, +p \cos \varphi, 0)$$



$$\underline{N} = \left( -\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \cos \varphi, -\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \sin \varphi, \frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \right)$$

$$E = 1 + \Phi'^2, \quad F = 0, \quad G = p^2 \quad (\mathbb{I}^q \text{ f. fond.})$$

Calcoliamo la  $\mathbb{I}^q$  forma fondamentale

$$\mathbf{r}_{pp} = (0, 0, \Phi''(p))$$

$$\mathbf{r}_{p\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \mathbf{r}_{\varphi p}$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = (-p \cos \varphi, -p \sin \varphi, 0)$$

sicché

$$e = \langle \mathbf{r}_{pp}, \underline{N} \rangle = \Phi''(p) (1 + \Phi'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f = \langle \mathbf{r}_{p\varphi}, \underline{N} \rangle = \dots = 0$$

$$g = \langle \mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \underline{N} \rangle = \frac{p \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{p \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}}$$

$\Rightarrow$

$\mathbb{I}^q$  ff.

$$e = \frac{\Phi''}{\sqrt{1+\Phi'^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{p \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}}$$

$F=0$  e  $f=0$

implicano, come sappiamo anche tramite il teorema di Rodrigues, che i meridiani e i paralleli costituiscono le linee di curvatura.



$\xi$  ha allora

curvatura gaussiana

$$K = \frac{e g - f^2}{EG - F^2} = \frac{e g}{EG} \left( = \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G} \right)$$

$$= \frac{\Phi'' \cdot \rho \cdot \Phi'}{(1 + \Phi'^2)^2 \rho^2} = \frac{\Phi' \Phi''}{(1 + \Phi'^2)^2 \rho}$$

curvatura media

$$H = \frac{1}{2} \frac{G e - 2 F f + E g}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{G e + E g}{EG}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right] \Rightarrow R_1 = \frac{e}{E}$$

$$R_2 = \frac{g}{G}$$

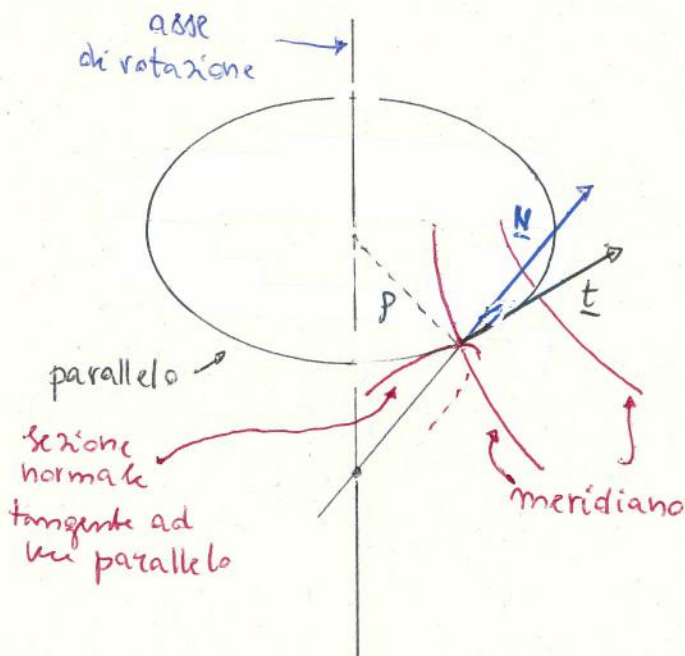
curvature principali:

$$R_1 = \frac{e}{E} = \frac{\Phi''}{(1 + \Phi'^2)^{3/2}}$$

← è la curvatura del generico meridiano  
(= curvatura normale del meridiano)

$$R_2 = \frac{g}{G} = \frac{\Phi'}{\rho \sqrt{1 + \Phi'^2}}$$

← curvatura normale del parallelo



la grandezza  $\rho_2$  è il raggio di curvatura della sezione normale

$$N := |\rho_2| \equiv \left| \frac{1}{R_2} \right|$$

$t$  detta

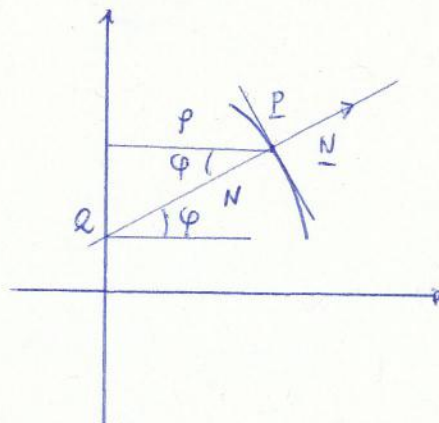
grannormale

interpretiamo il tutto geometricamente

Si ha il teorema della geonormale:

(i)  $\rho = N \cos \varphi$

raggio del parallelo per  $P$       "latitudine

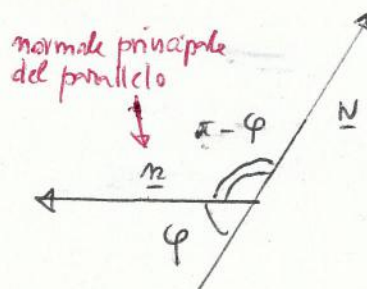


(ii)  $N = \overline{PQ}$

In altre parole: il centro di curvatura della sezione normale individuata dal primo verticale (piano per  $P$  di direzione  $\underline{N}, \underline{t}$ ,  $\underline{t}$  tangente al parallelo, che risulta perpendicolare al piano meridiano) si trova sull'asse di rotazione.  $N =$  raggio di curvatura della sezione normale

Dem. (i) è immediata dal teorema di Meusnier (v. figura)

$$R_n = R \cdot \cos(\pi - \varphi) = -R \cos \varphi$$



in figura  $\cos \varphi \geq 0$

$$\frac{1}{N} = |R_n| = R \cdot \cos \varphi = \frac{1}{\rho} \cos \varphi \Rightarrow \boxed{\rho = N \cos \varphi}$$

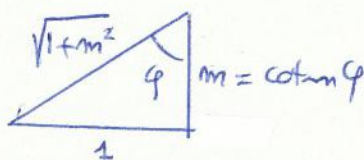
(ii) segue subito da (i) e dalla figura

In alternativa, osserviamo che la formula per  $R_n$  implica

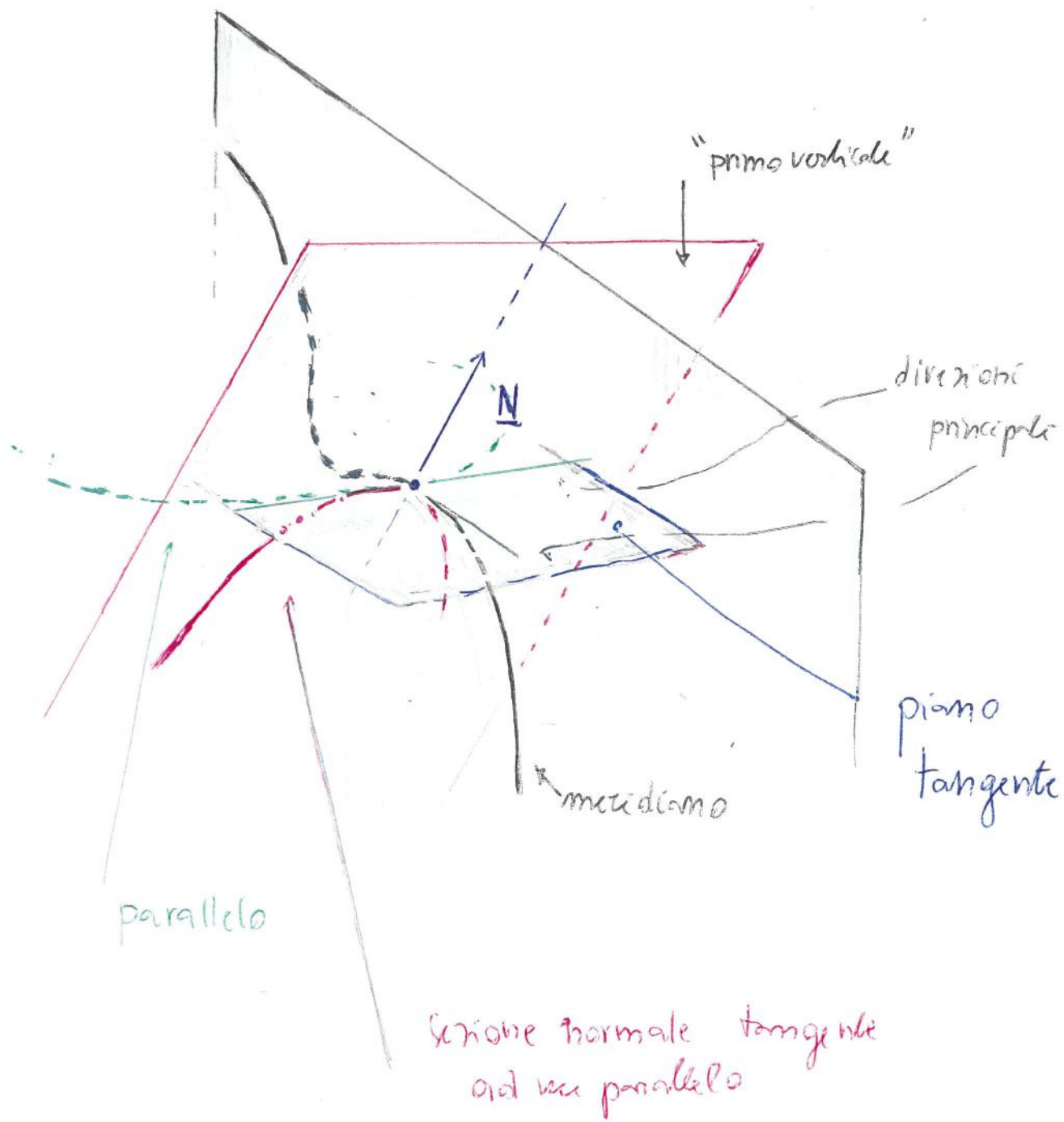
$$\frac{1}{N} = \left| \frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \right| \frac{1}{\rho} \quad \text{e' altresì} \quad \Phi' = \cotan \varphi$$

e  $\frac{\cotan \varphi}{\sqrt{1+\cotan^2 \varphi}} = \cos \varphi$ , o per via algebrica o così:

Di nuovo si ha l'asserto.



$$\cos \varphi = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$





ELEMENTI DI GEOMETRIA  
DIFFERENZIALE

Prof. Mauro Spina  
UCSC - Brescia

Lezione XVII

Curvatura della pseudosfera

Come semplice ma importante

applicazione del teorema  
della grannormale calcoliamo

la curvatura della pseudosfera di Beltrami.

Ricordando le considerazioni svolte in una lezione  
precedente (v. figura), si ha (2° teorema di Euclide)

raggio di curvatura del meridiano  $\overline{PQ}$       grannormale  $\overline{QR}$

$$\overline{PQ} \cdot \overline{QR} = \overline{QT}^2 = 1$$

per tanto è

$$\left| \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \right| = 1$$

curvatura del meridiano  
(= curvatura normale)

curvatura della sezione normale  
del parallelo

Ma (v. figura)  $R_2 > 0$   
e  $R_2 < 0$

=>

$$K = R_1 \cdot R_2 = -1$$

Curvatura  
gaussiana

=> la pseudosfera di Beltrami

ha curvatura costante negativa \*\* (ciò giustifica il nome)

(Non è l'unica superficie di questo tipo).

con qualche ambiguità, questa è la curvatura del primo  
ipربولico (a rigore per  $y > 1$ ); ritorneremo sull'argomento

◇ L'elicoide (ruotato)

Elicoide

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad u > 0 \\ v \in \mathbb{R}$$

$$\underline{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$\underline{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

$$\underline{r}_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$\underline{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\underline{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

Si ricorrono:

$$\boxed{E = 1 \quad F = 0 \\ G = 1 + u^2}$$

$$\underline{N} = \frac{1}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sin v \underline{i} - \cos v \underline{j} + u \underline{k}}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} \underline{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \underline{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \underline{k}$$

$$e = \langle \underline{N}, \underline{r}_{uu} \rangle = 0$$

$$f = \langle \underline{N}, \underline{r}_{uv} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$g = \langle \underline{N}, \underline{r}_{vv} \rangle = 0$$

$$\boxed{e = 0 \quad g = 0 \\ f = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}$$

Si trova subito  $\boxed{H = 0}$

$$e \quad K = \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{1+u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

(superficie massima)  
Si dimostra che l'elicoide è l'unica superficie rigata minima  
per cui superficie rigata  
è sempre  $K \leq 0$

Le curvature principali valgono allora

$$K_i = \mp \frac{1}{1+u^2} \quad i = 1, 2 \quad (u \quad K_1 < K_2)$$



★ Il catenoide è l'unica superficie di rivoluzione minima

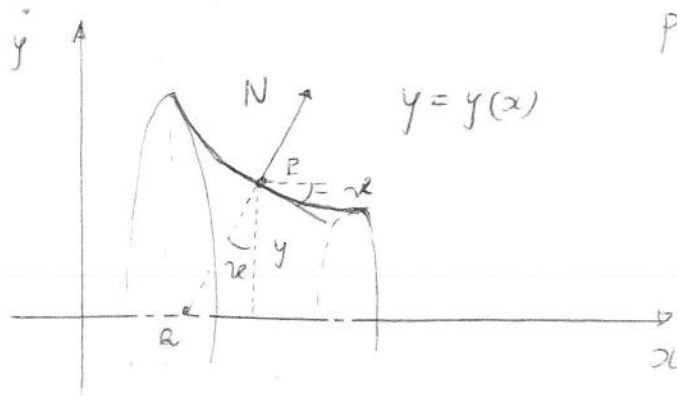
si può fornire una dimostrazione tramite le eq. di Eulero-Lagrange

(Vedi vecchie dispense, lez. XI)

Qui procediamo per via geometrica.

Dalla teoria generale delle sup. di rivoluzione,

le curvature principali sono



quella del (generico) meridianiano e l'inverso della geometrica

$$\overline{PQ} = \frac{y}{\cos \alpha} = y \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = y \sqrt{1 + y'^2} \quad R_1 = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = 0 \quad \text{diventa} \quad R_2 = -\frac{1}{y(1 + y'^2)^{1/2}}$$

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y} \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}$$

⇒ (assumendo  $y' \neq 0$ ...) e moltiplicando ambo i membri per  $2y'$

$$\frac{2y''y'}{1 + y'^2} = \frac{2y'}{y} \Rightarrow$$

$$d \log(1 + y'^2) = d \log y^2 \Rightarrow$$

$$1 + y'^2 = R^2 y^2 \quad (R \text{ costante})$$

$$y'^2 = R^2 y^2 - 1 \quad y' = \pm \sqrt{(ky)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(ky)^2 - 1}} = \pm dx$$

v. omnia (\*) ricordando

Calcoliamo:  $\int \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi$   
 $\xi = \cosh \psi$   
 $d\xi = \sinh \psi d\psi$   
 $\int \frac{\sinh \psi d\psi}{\sinh \psi} = \int d\psi = \psi + C$   
 $\psi > 0 \quad \xi = \cosh \psi$   
 ma di fatto ci serve solo  $\xi = \cosh \psi$

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$$

si arriva a ( $y > 0$ )

$$y = \frac{1}{R} \cosh(kx + c)$$

i.e. si ha una catenaria

## Formule di Weingarten

cerchiamo di esprimere  $S$  rispetto alla base  $(\underline{r}_u, \underline{r}_v)$ :  $S$  dipenderà dai coefficienti delle due forme fondamentali.

Scriviamo:

$$\underline{N}_u = a_{11} \underline{r}_u + a_{21} \underline{r}_v$$

$$\underline{N}_v = a_{12} \underline{r}_u + a_{22} \underline{r}_v$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Moltiplicando ora i vettori scalari sia per  $\underline{r}_u$  che per  $\underline{r}_v$ , si ottiene un sistema (non omogeneo) lineare di 4 equazioni in 4 incognite, universalmente risolvibile ( $(\underline{r}_u, \underline{r}_v)$  costituisce una base!). Si ottiene

$$e = (\underline{r}_u, \underline{r}_v)$$

$$m_{cc}(S) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

formule di Weingarten

in modo più compatto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} E & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

in det. pari  $\det(-A) = \det A$  | controlli:  $a_{11} + a_{22} = -2H$  ✓

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (eg - f^2) / (EG - F^2) = K_Y$$

A titolo di controllo, pobiamoci nel caso

$F = 0$  e verifichiamo che, posto

$$e = (\underline{r}_u, \underline{r}_v) \quad e' = \left( \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \frac{r_v}{\sqrt{E}} \right)$$

la matrice  ${}_{e'}^{-dX}$

base ortogonale

$M_{e'e'}(\mathcal{S})$  è simmetrica (e calcoliamola!)

compo. di base

(v. richiamo nella pagina successiva)

$$M_{e'e'}(\mathcal{S}) = M_{e'e'}(I) \cdot M_{ee'}(\mathcal{S}) \cdot M_{ee'}(I)$$

$$\begin{array}{l} e \\ \underline{r}_u \mapsto \\ \underline{r}_v \mapsto \end{array} \begin{array}{l} e' \\ \frac{r_u}{\sqrt{E}} \\ \frac{r_v}{\sqrt{E}} \end{array} \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{E}} \end{array} \right)^{-1} \\ \left( \begin{array}{cc} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{E} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} \frac{e}{E} & \frac{f}{E} \\ \frac{f}{E} & \frac{g}{E} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{E}} \end{array} \right) \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{E\sqrt{E}} & \frac{f}{E\sqrt{E}} \\ \frac{f}{E\sqrt{E}} & \frac{g}{E\sqrt{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{\sqrt{E}E} \\ \frac{f}{\sqrt{E}E} & \frac{g}{E} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

— • — • — Variante:

$$\begin{array}{l} dX: \\ \underline{r}_u \mapsto \\ \underline{r}_v \mapsto \end{array} \begin{array}{l} a_{11} \underline{r}_u + a_{21} \underline{r}_v \\ a_{12} \underline{r}_u + a_{22} \underline{r}_v \end{array}$$



$$\frac{v_x}{\sqrt{E}} \mapsto a_{11} \left( \frac{v_x}{\sqrt{E}} \right) + \frac{a_{21}}{\sqrt{E}} \left( \frac{v_y}{\sqrt{E}} \right)$$

$$\frac{v_y}{\sqrt{E}} \mapsto \frac{a_{12}}{\sqrt{E}} \left( \frac{v_x}{\sqrt{E}} \right) + a_{22} \left( \frac{v_y}{\sqrt{E}} \right)$$

ora  $a_{21} = -\frac{f}{E}$   $a_{12} = -\frac{f}{E}$

$$a_{21} \frac{\sqrt{E}}{E} = -\frac{f}{E} \frac{\sqrt{E}}{E} = \left( -\frac{f}{\sqrt{E}E} \right)$$

$$a_{12} \frac{\sqrt{E}}{E} = -\frac{f}{E} \frac{\sqrt{E}}{E} = \left( -\frac{f}{\sqrt{E}E} \right) \quad \checkmark$$

Richiamo:  $M_{e'e}(I)$  : matrice del cambiamento di base da  
 base  $\rightarrow e$   $\leftarrow$  nuova  
 $e = (e_1, \dots, e_n)$  a  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$

$$\boxed{x' = M_{e'e}(I) x}$$

nuove coordinate di  $v \in V$  vecchie coordinate di  $v \in V$

In pratica  $\tilde{\cdot}$ , posto  
 (\*) :  $e_i \mapsto e'_i$

$$M_{e'e}(I) = M_{e'e}((*)^{-1}$$

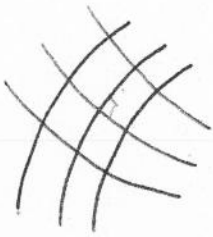
$$M_{e'e}((*) = \begin{pmatrix} \vdots \\ e'_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

componenti rispetto alla base  $e$

★ Sulla definizione originale di Gauss di curvatura

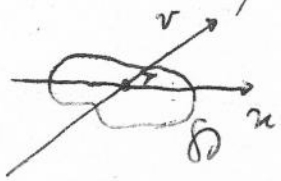
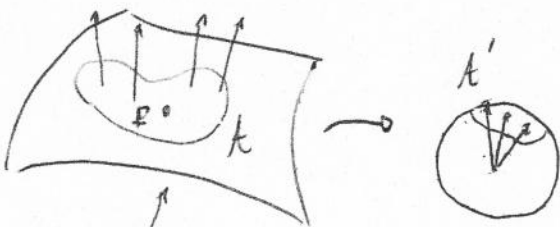
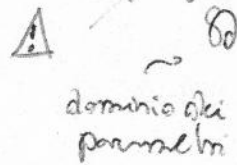
vogliamo recuperare l'intuizione iniziale di Gauss in modo formale. Per semplicità - ma il discorso è del tutto generale -

sia  $\Sigma$  parametrizzata tramite linee di curvatura  
( $F=f=0$ )



$$\begin{aligned} E' & \quad \oint r_u = -N_u = R_1 r_u \\ & \quad \oint r_v = -N_v = R_2 r_v \end{aligned}$$

Si ha  $A' = \pm \iint_{\Theta} \|N_u \times N_v\| du dv$   
è un'area orientata



sia  $E$  corrisp. a  $u=v=0$

$$A' = \iint_{\Theta} K d\sigma$$

$$\iint_{\Theta} \underbrace{R_1 R_2}_{\substack{\text{curvatura} \\ \text{gaussiana} \\ \text{(incorpora il} \\ \text{segno)}}} \underbrace{\|r_u \times r_v\|}_{\substack{\text{elemento} \\ \text{d'area}}} d\sigma$$

$$A = \iint_{\Theta} d\sigma$$

★ Per il teorema del valore medio

$$A' = K(P') \iint_{\Theta} d\sigma$$

Per tanto  $\frac{A'}{A} = K(P') \rightarrow K(E)$  se  $E' \rightarrow E$

In generale si utilizzano le formule di Weingarten...

# ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spica - UCSC Brescia

Lezione XVIII

## ★ Superficie rigate

In modo informale, una superficie rigata  $R$  è una superficie generata dal moto continuo di una volta nello spazio. Essa pertanto si ottiene assegnando una

**direttrice**  $\mathcal{C}$  :  $Q = Q(s)$  ( $s$  lunghezza d'arco ( $SEI$ ) -

volendo si può utilizzare un parametro qualsiasi) e una

**famiglia di direzioni**  $\underline{R} = \underline{R}(s)$  ,  $\|\underline{R}(s)\| = 1$

$R$

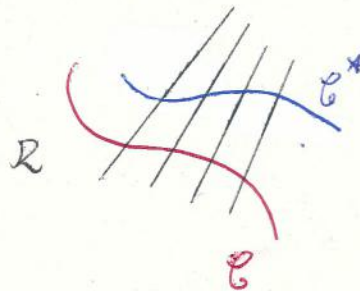
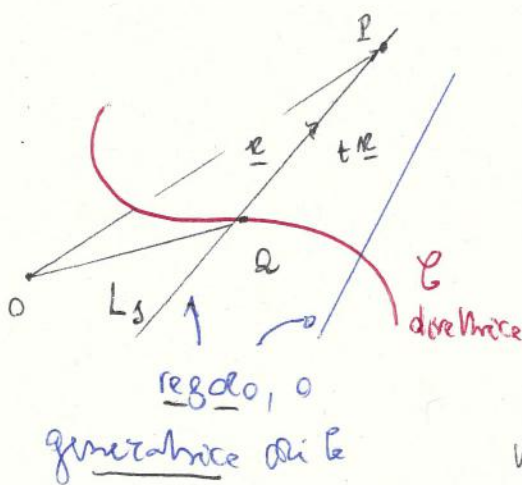
non è necessario, ma è comodo per questioni tecniche

$R$  è allora descritta da

$$(\spadesuit) \quad \boxed{P = P(s, t) := Q(s) + t \underline{R}(s)}$$

$\cap$   
 $\mathbb{R}$


( $Q$  e  $\underline{R}$  sono funzioni lisce di  $s$ )



È chiaro che una rigata ammette infinite direttrici: è sufficiente considerare una qualsiasi curva che intersechi trasversalmente le generatrici (ed esattamente una volta)

Nella rappresentazione  $(\spadesuit)$ ,  $t$  riveste l'ovvia funzione di regola  $L_s$ .

Osserviamo subito che i regoli forniscono direzioni asintotiche di  $R$  (si ricordi che  $v \in T_p R$ ,  $\|v\|=1$  fornisce una direzione asintotica in  $R$  se  $\mathbb{I}_p(v) = \langle v, Sv \rangle = 0$ ): questo perché  $K_m$  (curvatura normale) è nulla lungo un regolo.

( $\rightarrow$   se  $K_1 < 0 < K_2$ , le direzioni asintotiche sono rappresentate dagli asintoti dell'indicatrice di Dupin XVIII - 1)



Da ciò segue subito che per una rigata  $R$  si ha

$$K \leq 0$$

Pertanto una rigata non può averla gli ellittici.

con.  
gaussiana

||  $R$  è detta sviluppatibile se il piano tangente non varia lungo una generatrice.

Per una rigata si fatta si ha  $K = 0$  (e sarebbe vero anche il viceversa)

Vediamola in due modi:

① Se il piano tangente non varia lungo le generatrici,  $\underline{N} = \underline{N}(s)$  (il vettore normale non dipende da  $t$ , coord. sui regoli). Pertanto l'immagine dell'applicazione di Gauss è una curva, e, tenendo conto dell'idea originale di Gauss ( $K = \lim \frac{d^2}{dt^2}$  v. lezione prec.), si ha subito  $K = 0$ .

② Calcoliamo:  $\underline{P}_s = \underline{R}_s + t \underline{R}_s$   
 $\underline{P}_t = \underline{R}$

$$\underline{P}_{ss} = \underline{R}_{ss} + t \underline{R}_{ss}$$

Si ha poi  $\underline{N}_t = 0$  per

$$\underline{P}_{st} = \underline{R}_s$$

ipotesi. Pertanto

$$\underline{P}_{tt} = 0$$

$$g = \langle \underline{P}_{tt}, \underline{N} \rangle = 0 \quad e$$

$$0 = \langle \underline{N}_t, \underline{P}_s \rangle = - \langle \underline{N}, \underline{P}_{st} \rangle = -f$$

$$\Rightarrow K = 0.$$

Caratterizziamo la sviluppatibilità di una rigata  $R$

L'equazione del piano tangente ad una rigata  $\mathcal{R}$   
 in un pto generico della superficie è

$$0 = \langle U - P, P_s \times P_t \rangle = \langle U - P, (Q_s + t R_s) \times R \rangle = 0$$

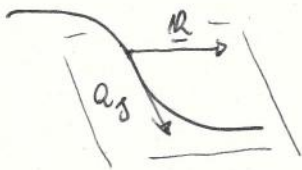
↑  
 pto generico  
 del piano  
 tangente

Se  $t=0$ , il piano tangente a  $\mathcal{R}$   
 in  $P(s, 0)$  è generato da  $Q_s$  e  $R$

(nel pto dato). Il piano tangente risulterà allora indipendente

da  $t \Leftrightarrow R_s = \text{c.l.} (Q_s \text{ e } R)$

combo.  
 lineare



Però, la condizione cercata è

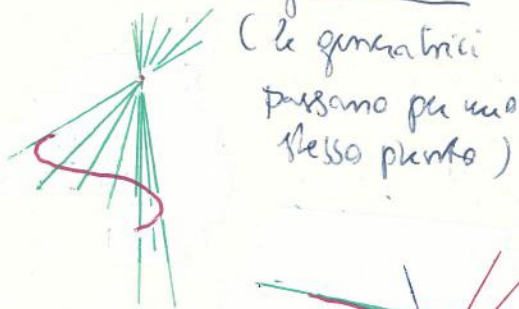
$$\begin{vmatrix} Q_s & R & R_s \\ | & | & | \\ | & | & | \end{vmatrix} = 0$$

vettori letti come  
 colonne (o, indifferenzialmente, come righe)

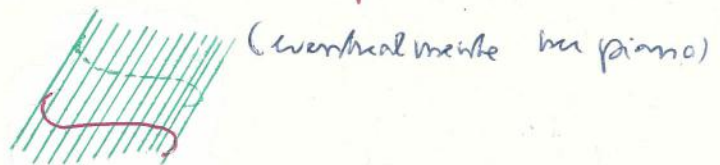
Si prova che, localmente, una rigata sviluppabile è 0

o un Cilindro generalizzato\*  
 (generatrici parallele)

o un cono generalizzato\*

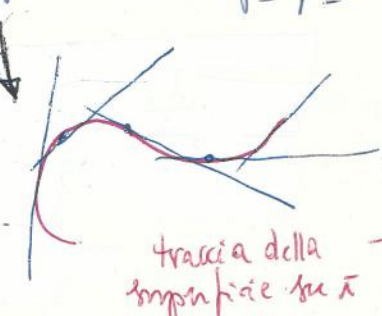
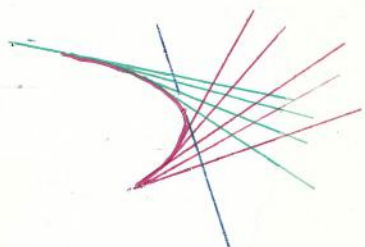


(le generatrici  
 passano per uno  
 stesso punto)

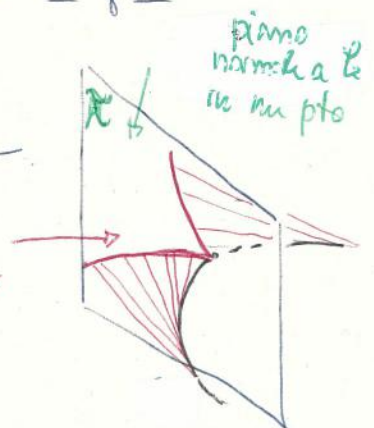


(eventualmente in piano)

oppure una superficie tangente\*

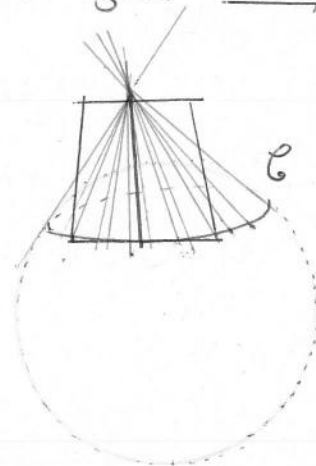
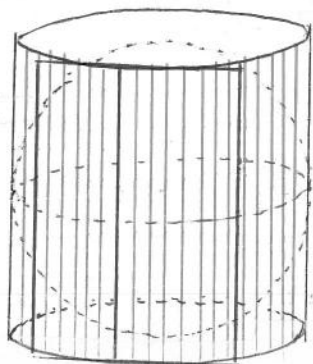


traccia della  
 superficie su  $\pi$



piano  
 normale a  $\mathcal{R}$   
 in un pto

\* Mostriamo che l'involuppo dei piani tangenti di una superficie  $\Sigma$  lungo una sua curva  $\mathcal{C}$  non asintotica è una rigata sviluppabile (cf. le proiezioni cartografiche)



La superficie richiesta ha equazione

$$\underline{r} = \underline{r}(s, v) = \underline{\alpha}(s) + v \frac{\underline{N}(s) \times \underline{N}'(s)}{\|\underline{N}'(s)\|} \quad (\diamond)$$

$\mathcal{C} \uparrow$   $\neq 0$

vediamo perché: i piani tangenti  $T_{\underline{\alpha}(s)} \Sigma$  e  $T_{\underline{\alpha}(s+\Delta s)} \Sigma$

si intersecano lungo una retta la cui direzione è individuata

da

$$\frac{\underline{N}(s) \times \underline{N}(s+\Delta s)}{\Delta s} = \underline{N}(s) \times \left[ \frac{\underline{N}(s+\Delta s) - \underline{N}(s)}{\Delta s} \right]$$

che, al limite per  $\Delta s \rightarrow 0$ , conduce a  $(\diamond)$

verifichiamo che, nelle ipotesi fatte, la superficie

è effettivamente regolare; è sufficiente verificare la Cond. 3

$$\begin{aligned} \underline{r}_s \times \underline{r}_v &= \underline{\alpha}' \times \left( \underline{N} \times \frac{\underline{N}'}{\|\underline{N}'\|} \right) = -\overset{=0}{\langle \underline{N}, \underline{\alpha}' \rangle} \frac{\underline{N}'}{\|\underline{N}'\|} \\ &+ \langle \frac{\underline{N}'}{\|\underline{N}'\|}, \underline{\alpha}' \rangle \underline{N} = -\frac{\langle \underline{N}, \underline{\alpha}'' \rangle}{\|\underline{N}'\|} \underline{N} = -\text{Rim} \frac{\underline{N}}{\|\underline{N}'\|} \\ &\neq 0 \quad (\mathcal{C} \text{ non è asintotica}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} &= \\ \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle \underline{v} - & \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \underline{u} & \end{aligned}$$



\* Sull'iparaboloida ad una falda

Sia  $S^1 : \{ x^2 + y^2 = 1, z = 0 \}$  (circ. unitaria sul piano  $xy$ )

$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s) : \begin{cases} x = \cos s \\ y = \sin s \\ z = 0 \end{cases} \quad s = \varphi = l. \text{ d'arco} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$   
 $\underline{\alpha} = (\cos s, \sin s, 0)$

$\underline{\alpha}' = (-\sin s, \cos s, 0) = -\sin s \underline{i} + \cos s \underline{j}$

$\underline{w}(s) := (\underline{\alpha}' + \underline{R}) = -\sin s \underline{i} + \cos s \underline{j} + \underline{k}$

consideriamo la superficie rigata  $\| \underline{w} \| = \sqrt{2}$

$\underline{r}(s, t) = \underline{\alpha}(s) + t \underline{w}(s)$

$= (\underbrace{\cos s - t \sin s}_x, \underbrace{\sin s + t \cos s}_y, \underbrace{t}_z)$



$x^2 + y^2 - z^2 = \cos^2 s - 2t \sin s \cos s + t^2 \sin^2 s + \sin^2 s + t^2 \cos^2 s + 2t \sin s \cos s + t^2 - t^2 = 1$



\* iparaboloida iperbolico  
di rivoluzione

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Sia  $P = (1, 0, 0) \in \mathcal{G}$

Determiniamo, in  $T_P \Sigma$ , le dir. asintotiche e le direzioni principali, col calcolo implicito. [ per esercizio, si calcoli il tutto tramite la parametrizzazione precedente ]

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$f(x, y, z) = 0$$

si osserva che, in  $P$   $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$$= 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$  (Diri)  $x = x(y, z) \equiv \varphi(y, z)$

$$\varphi^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$2\varphi\varphi_y + 2y = 0$$

$$\varphi\varphi_y + y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}$$

$$+2\varphi\varphi_z - 2z = 0$$

$$\varphi\varphi_z - z = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\varphi_y^2 + \varphi\varphi_{yy} + 1 = 0$$

$$\varphi_{yy}(P) = -1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$$

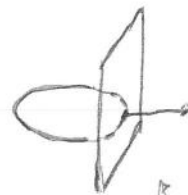
$$\varphi_z\varphi_y + \varphi\varphi_{yz} = 0$$

$$\varphi_{yz}(P) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\varphi_z^2 + \varphi\varphi_{zz} - 1 = 0$$

$$\varphi_{zz}(P) = +1$$



in  $P: (1, 0, 0)$

$$x = \varphi(0, 0) = +1$$

$$\varphi_y(P) = 0$$

$$\varphi_z(P) = 0$$

(chiamo...)

$$\underline{N}(P) = (1, 0, 0)$$

$$I^a \begin{cases} E = 1 + \varphi_y^2 & \text{in } P: E = 1 \\ F = \varphi_y\varphi_z & \text{in } P: F = 0 \\ G = 1 + \varphi_z^2 & \text{in } P: G = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{r} = (\varphi, y, z) \\ \underline{r}_y = (\varphi_y, 1, 0) \\ \underline{r}_z = (\varphi_z, 0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{r}_{yy} = (\varphi_{yy}, 0, 0) \\ \underline{r}_{yz} = (\varphi_{yz}, 0, 0) \\ \underline{r}_{zz} = (\varphi_{zz}, 0, 0) \end{cases}$$

$$e = g_{yy}$$

$$\text{in } P: \quad e = -1$$

$$f = g_{yz}$$

$$\text{in } P \quad f = 0$$

$$g = g_{zz}$$

$$\text{in } P \quad g = +1$$

$$\text{I}^a \quad E = g = 1 \quad F = 0 \quad \left( \text{chiuso a priori...} \right)$$

$$\text{II}^a \quad e = -1 \quad g = 1 \quad f = 0$$

$$K = -1 \quad (\text{in } P)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{ge - 2Ff + Eg}{Eg - f^2} = \frac{1}{2} \frac{-1 + 1}{1} = 0 \quad (\text{in } P)$$

$$\dot{S}(P) = -dN(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

direzioni principali

$$z=0 \quad (\text{orizz})$$

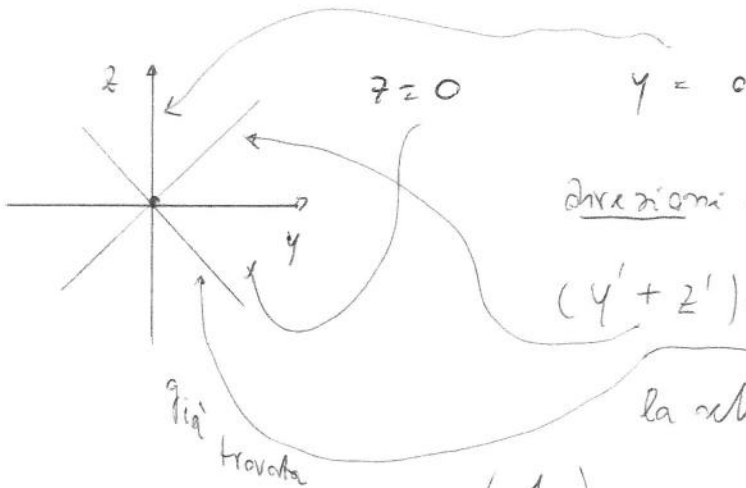
$$y=0 \quad (\text{vert})$$



$$R_1 = -1 \quad (\text{parallelo})$$

$$R_2 = +1 \quad (\text{perpendicolare})$$

in una sup. di evoluzione, i meridiani e i paralleli sono linee di curvatura !!



direzioni asintotiche

$$y'^2 - z'^2 = 0$$

$$(y' + z')(y' - z') = 0$$

la retta  $P + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ t \end{pmatrix}$$

è contenuta in  $\Sigma$ :

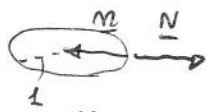
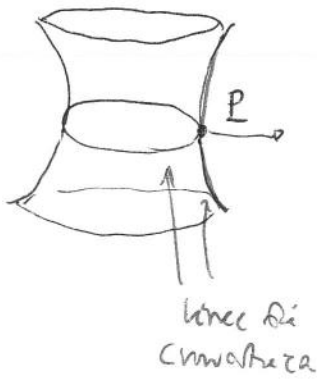
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

( $\Sigma$  è doppiamente rigato)

XVIII-7



Calcoliamo le curvatures principali in  $P$  anche direttamente



$$R_1 = -1$$

$\varepsilon$  è subito

(conv. normale del parallelo)

Calcoliamo  $R_2$  così:

Nel punto  $(x, z)$ , il meridiano

ha equazione

$$z^2 - x^2 = 1 \quad \text{Si ha, localmente}$$

(Dini)

$$x = x(z) \quad (\text{attenzione...})$$

deriviamo:

$$2z - 2x x' = 0$$

$$1 = \frac{dz}{dx}$$

$$1 - x'^2 - x x'' = 0$$

e, pertanto, in  $P$ , risulterà:

$$x' = 0, \quad x'' = 1$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{x''}{(1 + x'^2)^{3/2}} = +1$$

$$R_1 = -1$$

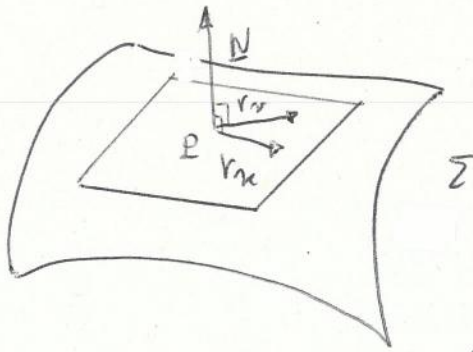
$$R_2 = +1$$



Qui abbiamo cambiato la notazione delle curvature principali in virtù della parametrizzazione scelta inizialmente.

Lezione XIX

★ Simboli di Christoffel



Nelle solite condizioni,  
in  $P \in \Sigma$ ,  $(\underline{r}_u, \underline{r}_v, \underline{N})$   
costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$  (base di Darboux)

Le derivate parziali seconde  $\Gamma_{uv}$ ,  $\Gamma_{vu} = \Gamma_{uv}$ ,  $\Gamma_{vv}$   
possono esprimersi, più o meno, come col. dei vettori  
suddetti:

$$\underline{\Gamma}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{11}^2 \underline{r}_v + e \underline{N}$$

$u \leftrightarrow 1$   
 $v \leftrightarrow 2$   
si ricordi  
 $e = \langle \underline{\Gamma}_{uu}, \underline{N} \rangle$

$$\underline{\Gamma}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{12}^2 \underline{r}_v + f \underline{N}$$

$f = \langle \underline{\Gamma}_{uv}, \underline{N} \rangle$

$$\underline{\Gamma}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{21}^2 \underline{r}_v + f \underline{N}$$

$$\underline{\Gamma}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{22}^2 \underline{r}_v + g \underline{N}$$

$g = \langle \underline{\Gamma}_{vv}, \underline{N} \rangle$

I coefficienti  $\{\Gamma_{ij}^k\}$ ,  $i, j, k = 1, 2$  sono detti

simboli di Christoffel. Notiamo subito che, da

$$\underline{\Gamma}_{uv} = \underline{\Gamma}_{vu} \quad \text{si ha intanto}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$$

(simmetria negli indici superiori). Facciamo vedere che  
i  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  dipendono solo dalla metrica e dalle sue  
derivate parziali prime

A titolo di esempio, calcoliamo  $\Gamma_{11}^1$  e  $\Gamma_{11}^2$ .

$$\text{Da } \underline{r}_{xx} = \Gamma_{11}^1 \underline{r}_x + \Gamma_{11}^2 \underline{r}_y + e \underline{N}$$

Si trova, prendendo il prodotto scalare di ambo i membri con  $\underline{r}_x$

$$\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_x \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

ed è pure  $\parallel$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_x \rangle}_E = \frac{1}{2} E_x$$

$$\frac{1}{2} E_x = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

(\*)

Successivamente

$$\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_y \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

$\parallel$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_y \rangle}_F - \langle \underline{r}_x, \underline{r}_{xy} \rangle = F_x - \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_{xy} \rangle}_{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_{xy} \rangle}$$

$$= F_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\langle \underline{r}_x, \underline{r}_x \rangle}_E = F_x - \frac{1}{2} E_x$$

ossia

$$F_x - \frac{1}{2} E_x = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \quad (**)$$

Le (\*) e (\*\*) forniscono un sistema lineare non omogeneo nelle incognite  $\Gamma_{11}^1$  e  $\Gamma_{11}^2$ , (univocamente) risolvibile in virtù di  $E G - F^2 > 0$ .

Il discorso è analogo per gli altri coefficienti.

L'asserto è provato.



È possibile esprimere i  $\Gamma_{jk}^i$  in modo compatto

nel modo seguente: sia  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

poniamo  $\Gamma_{im,k} := \frac{\partial}{\partial x^k} g_{im}$

$u \rightarrow x_1$   
 $v \rightarrow x_2$

Ripetendo il ragionamento svolto poc'anzi si trova

$$\langle \Gamma_{ik}, \Gamma_m \rangle = \frac{1}{2} \left( \Gamma_{im,k} + \Gamma_{mk,i} - \Gamma_{ki,m} \right)$$

$$\equiv \Gamma_{ikm}$$

e

$$\Gamma_{ik}^l = g^{lm} \cdot \Gamma_{ikm}$$

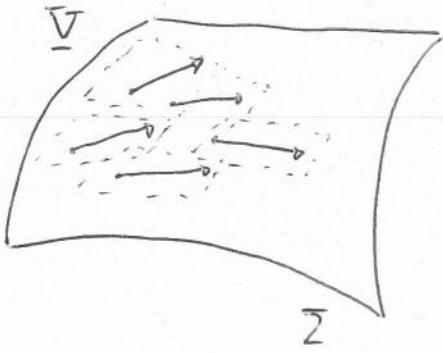
è sottintesa una somma su  $m$

dove  $(g^{em})$  è la matrice inversa di  $g = (g_{ij})$

e si è usata la Convenzione di Einstein di

Sommare sugli indici ripetuti (nella fattispecie  $m$ )

★ Derivata covariante ("connessione di Levi-Civita")



Sia  $V: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\underline{V} = \underline{V}(u, v) \equiv \underline{V}(P) \in T_P \Sigma$$

↳ spazio tangente in  $P \in \Sigma$

un campo vettoriale tangente su  $\Sigma$

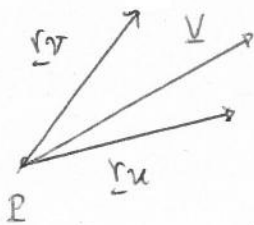
(esempi:  $\underline{r}_u, \underline{r}_v$  e, in generale,

$$\underline{V}(u, v) = \alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v, \quad \alpha = \alpha(u, v), \quad \beta = \beta(u, v)$$

funzioni lisce.

La (\*) derivata covariante di  $V$  in  $P$

rispetto a  $u$  è definita così:



"habla"

$$(\nabla_u \underline{V})(P) = P_P \left( \underline{V}_u(P) \right)$$

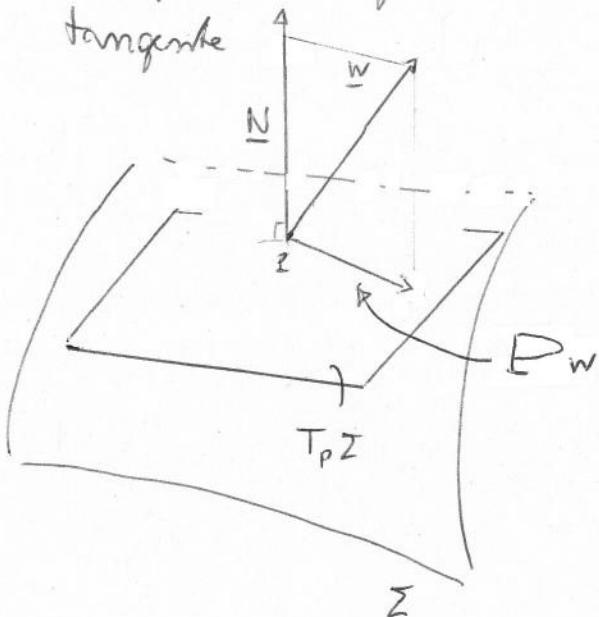
$$= \frac{\partial V}{\partial u}(P)$$

si ricavi

$$P_P \underline{w} = \underline{w} - \langle \underline{w}, \underline{N} \rangle \underline{N}$$

proiezione ortogonale su  $T_P \Sigma$

In altre parole, si prende la derivata parziale  $\underline{V}_u$  (che non è un vettore tangente, in generale) e la si proietta sul piano tangente, ottenendo un nuovo campo vettoriale tangente



Analogamente si definisce  $\nabla_v \underline{V}$ . Si osserva, per il seguito, che  $\nabla$  si può applicare anche ad un campo vettoriale su  $\Sigma$  non tangente: in ogni caso, l'applicazione di  $P$  conduce comunque ad un campo vettoriale tangente.

Le derivate covarianti sono governate dai simboli di Christoffel precedentemente introdotti:

$$\nabla_u \underline{r}_u = \Gamma(\underline{r}_u)_u = \Gamma(\underline{r}_{uu})$$

$$= \Gamma_{11}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{11}^2 \underline{r}_v$$

(si è rimossa la componente normale)

$$\nabla_v \underline{r}_u = \Gamma_{12}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{12}^2 \underline{r}_v$$

Si noti che  $\nabla_u \underline{r}_v = \nabla_v \underline{r}_u$

$$\left( \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \right)$$

(simmetria della connessione di Levi-Civita - assenza di torsione)

$$\nabla_u \underline{r}_v = \Gamma(\underline{r}_{vu}) =$$

$$= \Gamma_{21}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{21}^2 \underline{r}_v$$

$$= \Gamma_{12}^1 \underline{r}_u + \Gamma_{12}^2 \underline{r}_v = \nabla_v \underline{r}_u$$

⚠ non la si confonda con la torsione di una curva.

Si noti altresì che

in generale

$$\nabla_i \underline{r}_j = \Gamma_{ij}^k \underline{r}_k$$

(convenzione di Einstein)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \langle \underline{r}_i, \underline{r}_j \rangle = \langle \underline{r}_{ik}, \underline{r}_j \rangle +$$

$$\langle \underline{r}_i, \underline{r}_{jk} \rangle = \left( \underline{r}_j \perp \underline{N} \right)$$

$$= \langle \nabla_k \underline{r}_i, \underline{r}_j \rangle + \langle \underline{r}_i, \nabla_j \underline{r}_k \rangle$$

$$\parallel \Gamma_{ki}^e \underline{r}_e$$

$$\parallel \Gamma_{jk}^e \underline{r}_e$$

$$\Rightarrow g_{ij,k} = \Gamma_{ki}^e g_{ej} + \Gamma_{jk}^e g_{ie} \quad (\diamond\diamond) \quad \text{"compatibilità con la metrica"}$$

Le  $(\diamond)$  e  $(\diamond\diamond)$  individuano i simboli di Christoffel univocamente (è un risultato generale di Levi-Civita)



# ☆☆☆ Il "Theorema Egregium" di Gauss

Nelle solite ipotesi:

La curvatura gaussiana  $K$  è invariante per isometrie,  
ovvero dipende solo dai coefficienti della metrica e dalle  
loro derivate parziali fino al second'ordine

Dim. Consideriamo il campo vettoriale tangente

$$[\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_u := \nabla_u (\nabla_v \underline{r}_u) - \nabla_v (\nabla_u \underline{r}_u)$$

↗  
Commutatore

Tale campo vettoriale è della forma

$$\alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v$$

e  $\alpha$  e  $\beta$  dependono dalla metrica e dalle derivate  
di questa fino all'ordine due (sono coinvolti i simboli  
di Christoffel e le loro derivate parziali prime...).

Ricordando la definizione di derivata covariante - come  
ricordato, si può applicare anche a campi vettoriali non tangenti -  
si trova:

$$\begin{aligned} \nabla_u (\nabla_v \underline{r}_u) &= \nabla_u (\underline{r}_{uv} - \langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle \underline{N}) = \\ &= \nabla_u (\underline{r}_{uv}) - \nabla_u (\langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle \underline{N}) = \\ &= \underline{r}_{uvu} - \langle \underline{N}, \underline{r}_{uvu} \rangle \underline{N} - \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial u} \langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle \underline{N} + \langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle \underline{N}_u \right)}_f \\ &= \underline{r}_{uvu} - \langle \underline{N}, \underline{r}_{uvu} \rangle \underline{N} - \underbrace{\langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle \underline{N}_u}_f \end{aligned}$$

Scompare nella  
proiezione

Analogamente

$$\nabla_v (\nabla_u \underline{r}_u) = \underline{r}_{uvv} - \langle \underline{N}, \underline{r}_{uvv} \rangle \underline{N} - \underbrace{\langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle \underline{N}_v}_e$$

Da ciò otteniamo

$$[\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_u = e \underline{N}_v - f \underline{N}_u$$

e, in virtù delle formule di Weingarten (v. pagina successiva)

$$[\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_u = \underbrace{KF}_{\alpha} \underline{r}_u - \underbrace{KE}_{\beta} \underline{r}_v \quad \begin{array}{l} \alpha = \alpha(E, \dots, E_u, \dots, E_{uu}) \\ \beta = \beta(E, \dots, E_u, \dots, E_{uu}) \end{array}$$

e ciò fornisce l'assunto:  $K = K(E, \dots, E_u, \dots, E_{uu}, \dots)$

Nel caso  $F=0$  si ottiene in particolare

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right]$$

A titolo di esempio, e per uso futuro, ricalcoliamo la curvatura dell'elicoide: nelle sue coordinate naturali  $u, v$ , si era trovato

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + 1. \quad \text{Si ha allora } E_v = 0$$

$$G_u = 2u. \quad K = - \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \frac{d}{du} \left( \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} \right) = - \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \frac{2\sqrt{1+u^2} - 2u \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}$$

$$= - \frac{1+u^2 - u^2}{(1+u^2)^2} = - \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

\*\*\* Il "Theorema equigium" sancisce l'impossibilità di risolvere il problema geografico, concernente la possibilità di rappresentare fedelmente (ossia isometricamente) la superficie terrestre su una carta (per una sfera o un ellissoide  $K > 0$ , per un piano  $K = 0$ )

Qualche dettaglio in più:

ponendoci nel caso  $F=0$ , dimostriamo che

$$\textcircled{1} = [\nabla_u, \nabla_v] \underline{r}_\alpha = -KE \underline{r}_\alpha = \textcircled{2}$$

Si ha  $\textcircled{1} = e \underline{N}_v - f \underline{N}_u =$

$$= e (a_{12} \underline{r}_u + a_{22} \underline{r}_v) - f (a_{11} \underline{r}_u + a_{21} \underline{r}_v)$$

weingarten (F=0)

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \frac{-fg}{Eg} & \frac{-gE}{Eg} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ -\frac{eg}{Eg} & -\frac{fE}{Eg} \end{array}$$

$$= \left( \underbrace{-\frac{ef}{E} + \frac{ef}{E}}_0 \right) \underline{r}_u + \left( -\frac{eg}{g} + \frac{f^2}{g} \right) \underline{r}_v$$

$$= -E \frac{eg - f^2}{Eg} \underline{r}_v = -KE \underline{r}_v = \textcircled{2}$$

K

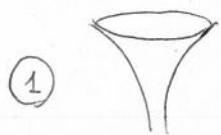
★ La curvatura misura la non commutatività delle derivate covarianti



4 Controesempio all' inverso del "teorema egregium"

$$K_1 = K_2 \not\Rightarrow \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 \text{ localmente isometriche}$$

( $(\Leftarrow)$  è l'egregium)



$$\underline{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u) \quad \begin{array}{l} u > 0 \\ v \in [0, 2\pi) \end{array}$$

sup. di rotazione  
di  $\log$  (rispetto  
all'asse  $z$ )



$$\underline{y}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad \text{elicoide}$$

Si ha subito  $E_1 = 1 + \frac{1}{u^2}$ ,  $F_1 = 0$ ,  $G_1 = u^2$   
 $E_2 = 1$ ,  $F_2 = 0$ ,  $G_2 = u^2 + 1$

Si trova subito

$$K_1 = K_2 = - \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Sia ora  $u = u_0 = \text{cost.}$

$$\underline{x}(u_0, v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, \log u_0)$$

$$\underline{y}(u_0, v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, v)$$

cerchio 

elica 

$$ds_1^2 = u_0^2 dv^2$$

$$ds_2^2 = (1 + u_0^2) dv^2$$

$$\frac{ds_1^2}{ds_2^2} = \frac{u_0^2}{1 + u_0^2}$$

$\Rightarrow$  i tratti corrispondenti delle rispettive curve non hanno la stessa lunghezza. Pertanto, le superfici non sono isometriche

Tuttavia, esiste il teorema di Minding (v. oltre): due superfici aventi la stessa curvatura costante sono localmente isometriche.

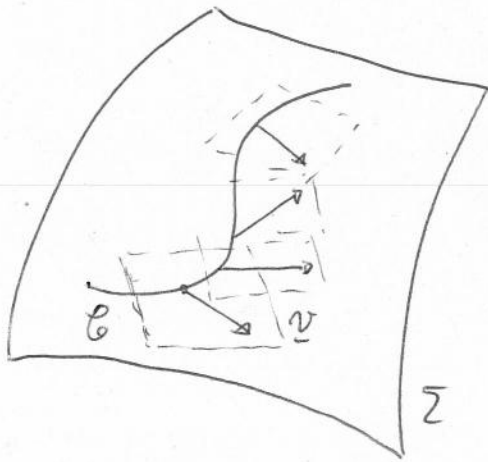
★ L' enunciato originale di Gauss  
( Disquisitiones generales circa superficies curvas )  
1826

Si superficies curva in quocumque aliam  
superficiem explicatur, mensura curvaturae  
(è un' applicazione isometrica) è la curvatura gaussiana  
in singulis punctis invariata manet

Manifesto quoque

quaevis pars finita superficiei curvae post  
explicationem in aliam superficiem eandem  
"isometrica"  
curvatura integrum retinebit  
(è  $\iint_S K \, d\sigma$ , vedi oltre)

☆☆☆ Trasporto parallelo (Levi-Civita) 1917



Sia  $C \subset \Sigma$  (curva su  $\Sigma$ )

$$C: \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t) \quad t \in I$$

$$\text{Sia } \underline{v}: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \underline{v}(t) \in T_{\underline{\alpha}(t)}\Sigma$$

Un campo vettoriale su  $C$ , tangente a  $\Sigma$  punto per punto  
(non necessariamente a  $C$ )

★ Def. Il campo vettoriale  $\underline{v}$  ti dice parallelo su  $C$  (o lungo  $C$ )  
se  $\underline{\nu}$  è normale a  $\Sigma$  in ogni punto, ovvero

$$\boxed{\langle \underline{\dot{v}}, \underline{r}_u \rangle = \langle \underline{\dot{v}}, \underline{r}_v \rangle = 0 \quad \forall t \in I}$$

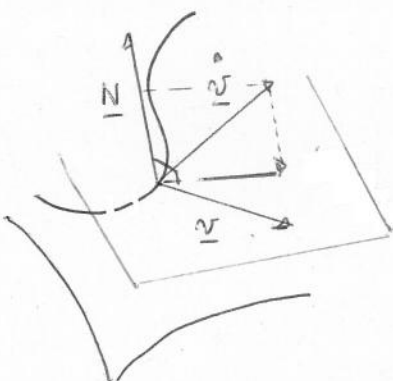
( $\underline{r}_u, \underline{r}_v$  sono viste come funzioni di  $t$ )

Introduco la derivata covariante di  $\underline{v}$  lungo  $C$   
nel modo seguente

$$\boxed{\left(\frac{\nabla}{dt} \underline{v}\right)(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proiezione ortogonale su } T_{\underline{\alpha}(t)}\Sigma}}{\underline{P}_{\underline{\alpha}(t)}} \underline{\dot{v}}(t) = \underline{\dot{v}}(t) - \langle \underline{N}(t), \underline{\dot{v}}(t) \rangle \underline{N}(t)}$$

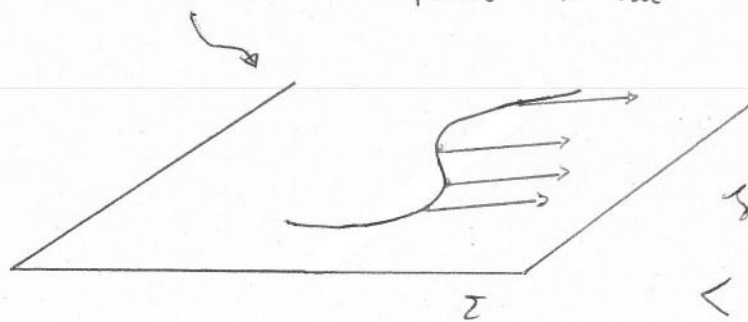
la condizione di parallelismo diviene

$$\boxed{\frac{\nabla}{dt} \underline{v} = \underline{0} \quad \text{lungo } C.}$$





Nel piano viene riprodotta l'usuale nozione di parallelismo: infatti si ha  $\langle \underline{\dot{v}}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{\dot{v}}, \underline{v} \rangle = 0$



e, da  $\langle \underline{v}, \underline{N} \rangle = 0$ ,

segue  $\frac{d}{dt} \langle \underline{v}, \underline{N} \rangle = 0$ , cioè

$$\langle \underline{\dot{v}}, \underline{N} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{\dot{N}} \rangle = 0$$

Ma  $\underline{\dot{N}} = \underline{0}$  ( $\Sigma$  è un piano), sicché è anche  $\langle \underline{\dot{v}}, \underline{N} \rangle = 0$ .

In definitiva è allora  $\underline{\dot{v}} = \underline{0}$ , cioè  $\underline{v} = \underline{v}_0$  (costante).

⚡ Osserviamo pure che il parallelismo conserva i prodotti scalari (e quindi le lunghezze e gli angoli):

Dati infatti due campi vettoriali  $\underline{v}, \underline{w}$  paralleli lungo  $\mathcal{C}$ , si ha:

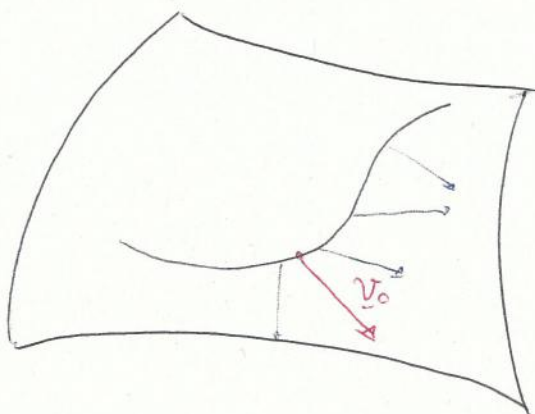
$$\frac{d}{dt} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underbrace{\langle \underline{\dot{v}}, \underline{w} \rangle}_{\substack{= \\ 0 \\ (\underline{v} \text{ è parallelo})}} + \underbrace{\langle \underline{v}, \underline{\dot{w}} \rangle}_{\substack{= \\ 0 \\ (\underline{w} \text{ è parallelo})}} = 0$$

Questa osservazione sarà di uso continuo nel seguito.

★ Teorema/def nelle usuali condizioni, data  $\mathcal{C} \subset \Sigma$ ,  
 $\mathcal{C} : \underline{d} = \underline{d}(t), t \in \mathcal{I}, \mathcal{I} \ni 0$ ,  
 dato  $\underline{w}_0 \in T_{\underline{d}(0)}\Sigma$ ,  $\exists!$   $\underline{w} = \underline{w}(t), t \in \mathcal{I}$ ,  
parallela su  $\mathcal{C}$ , con  $\underline{w}(0) = \underline{w}_0$ .

|| Tale campo vettoriale è detto trasporto parallelo di  $\underline{v}_0$   
lungo  $\mathcal{C}$ .

In altre parole, un qualsiasi vettore tangente  $\underline{w}_0 \in T_{\underline{d}(0)}\Sigma$   
 può essere prolungato ad un campo vettoriale parallelo  
 lungo  $\mathcal{C}$  (si noti che la lunghezza di  $\underline{v}$  rimane  
 costante)



Dim. Formuliamo la  
 condizione  $\frac{\nabla}{dt} \underline{w} = 0$   
 in modo esplicito.

Sia  $\underline{w} = w^i \underline{r}_i$  ( $i=1,2$ ; conv. di Einstein)  
 componenti di  $\underline{w}$ ,  $w_1 = u, w_2 = v$   $\underline{r}_1 = \underline{r}_u, \underline{r}_2 = \underline{r}_v$

$$\dot{\underline{w}} = \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \dot{\underline{r}}_i = \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i (\underline{r}_{ij} \dot{x}^j)$$

Ma  $\underline{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^R \underline{r}_R + \langle \underline{r}_{ij}, \underline{N} \rangle \underline{N}$

dec. f. con poste

Pertanto, cambiando un indice muto:  $\dot{w}^i r_i = \dot{w}^R r_R$   
 (si somma!)

$$\underline{\dot{w}} = (\dot{w}^R + \Gamma_{ij}^R \dot{w}^i w^j) \underline{r}_R + \langle \underline{r}_{\alpha i}, \underline{w} \rangle \underline{N}$$

e

$$\frac{\nabla}{dt} \underline{w} = \underline{P} \underline{\dot{w}} = \dot{w}^R + \Gamma_{ij}^R \dot{w}^i w^j$$

$$(\quad = \dot{w}^R + \Gamma_{ij}^R \dot{w}^i w^j \quad \text{poiché } \Gamma_{ij}^R = \Gamma_{ji}^R)$$

La condizione di parallelismo diventa perciò

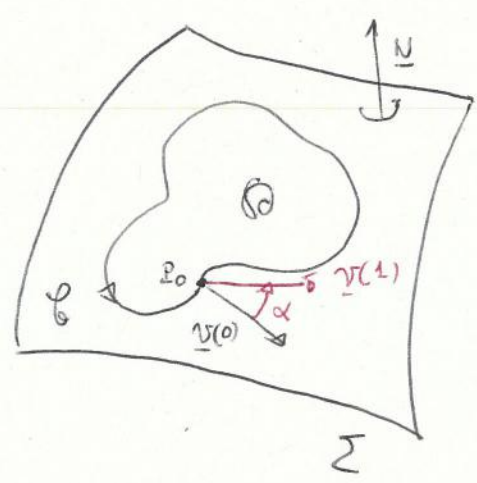
$$\boxed{\dot{w}^R + \Gamma_{ij}^R \dot{w}^i w^j = 0} \quad R=1,2$$

(si somma su  $i$  e  $j$ )

che, unita alla condizione iniziale  $\underline{w}(0) = \underline{w}_0$ , dà vita ad un sistema di equazioni differenziali lineari, omogeneo, del prim'ordine, la cui soluzione esiste ed è unica (teorema di Cauchy-Lipschitz).

Lezione XX

Formula di Levi-Civita

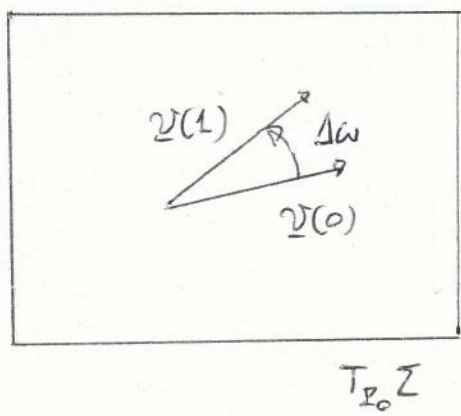


Sia  $\Gamma \subset \Sigma$  chiusa, orientata  
(è liscia a tratti)  
compatibilmente con la superficie  
(v. figura accanto), che  
racchiude un dominio  $D$



$\Gamma: \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t), t \in [0, 1], \underline{\alpha}(0) = \underline{\alpha}(1)$

Si trasporti parallelamente un vettore  $\underline{v}_0 = \underline{v}(0)$  lungo  $\Gamma$ :  
per  $t=1$  si ottiene un vettore  $\underline{v}(1) \neq \underline{v}(0)$   
in generale, ma della stessa lunghezza



ruotato di un angolo  $\Delta\omega$  (angolo di parallelismo)

Vogliamo determinare una formula per

|| l'angolo di parallelismo  $\Delta\omega$  (opportunamente orientato)

Troveremo  $\diamond$

$$\Delta\omega = \iint_D K \, d\sigma$$

↑ elemento d'area

(K: curvatura gaussiana)

★ formula di Levi-Civita

La strategia della dimostrazione è la seguente:

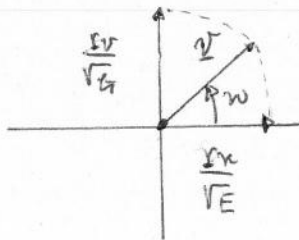
poniamoci nel caso  $F=0$  (coordinate curvilinee ortogonali, per semplicità - non si perde in generalità)



① Troviamo

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2\sqrt{Eg}} (E v \dot{u} - g u \dot{v}) \quad (*)$$

Variatione  
dell'angolo di  
parallelismo



② Da (\*) si otterrebbe, successivamente:

$$\Delta \omega = \int_0^1 \dot{\omega} dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{Eg}} (E v \dot{u} - g u \dot{v}) dt$$

//  
omega(1) - omega(0)

//  
è un integrale di linea

$$= \int_C \left( \underbrace{\frac{E v}{2\sqrt{Eg}}}_{P} du - \underbrace{\frac{g u}{2\sqrt{Eg}}}_{Q} dv \right)$$

\* teorema di Green

$$= \iint_D \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{g u}{2\sqrt{Eg}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E v}{2\sqrt{Eg}} \right) \right\} du dv$$

③

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv$$

integrale doppio



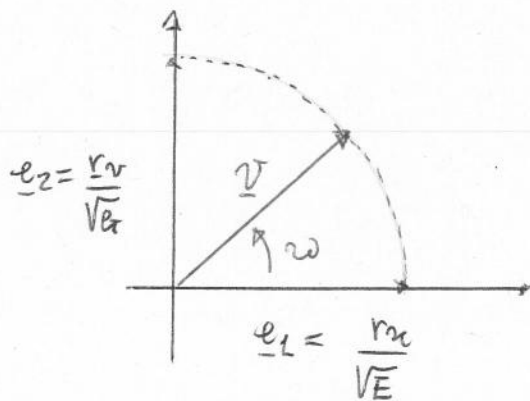
$$= \iint_D \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{Eg}} \left[ \left( \frac{g u}{\sqrt{Eg}} \right)_u + \left( \frac{E v}{\sqrt{Eg}} \right)_v \right] \right\} \underbrace{\sqrt{Eg}}_{d\sigma} du dv$$

K

$$= \iint_D K d\sigma$$

ovvero l'asserto.

Dobbiamo pertanto dimostrare (1)



$$\text{Sia } \underline{v} = \cos \omega \underline{e}_1 + \sin \omega \underline{e}_2$$

$$(\|\underline{v}\| = 1)$$

$$(F=0)$$

Imponiamo la condizione di parallelismo:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{v}} = & -\sin \omega \dot{\omega} \underline{e}_1 + \cos \omega \dot{\underline{e}}_1 \\ & + \cos \omega \dot{\omega} \underline{e}_2 + \sin \omega \dot{\underline{e}}_2 \end{aligned}$$

e deve essere

$$\langle \underline{\dot{v}}, \underline{e}_1 \rangle = \langle \underline{\dot{v}}, \underline{e}_2 \rangle = 0$$

Si ha poi  $\langle \dot{\underline{e}}_i, \underline{e}_i \rangle = 0$  ( $\underline{e}_i$  è un vettore).

Imponendo  $\langle \underline{\dot{v}}, \underline{e}_1 \rangle = 0$  si trova allora

$$-\sin \omega \dot{\omega} \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle + \sin \omega \langle \dot{\underline{e}}_1, \underline{e}_1 \rangle = 0$$

e, poiché in generale  $\sin \omega \neq 0$ , si ha

$$-\dot{\omega} + \langle \dot{\underline{e}}_1, \underline{e}_1 \rangle = 0$$

(la condizione  $\langle \underline{\dot{v}}, \underline{e}_2 \rangle = 0$  conduce ad una formula analoga)

ossia

$$-\dot{\omega} \sqrt{E} + \langle \dot{\underline{e}}_2, \underline{r}_2 \rangle = 0$$

Proseguiamo:

$$\dot{\underline{e}}_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{E}} \right) = \frac{\dot{\underline{r}}_v \sqrt{E} - \underline{r}_v \cdot \frac{1}{2\sqrt{E}} \dot{E}}{E}$$

$$= \frac{\dot{\underline{r}}_v}{\sqrt{E}} - \frac{\dot{E}}{2E^{3/2}} \underline{r}_v$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\perp \underline{r}_v}$

$$\langle \dot{\underline{e}}_2, \underline{r}_u \rangle = \frac{\langle \dot{\underline{r}}_v, \underline{r}_u \rangle}{\sqrt{E}}$$

Dunque

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\sqrt{E}} \langle \dot{\underline{r}}_v, \underline{r}_u \rangle$$

$$\text{ma } \langle \dot{\underline{r}}_v, \underline{r}_u \rangle = \langle \underline{r}_{vu} \dot{u} + \underline{r}_{vv} \dot{v}, \underline{r}_u \rangle$$

$$= \langle \underline{r}_{vu}, \underline{r}_u \rangle \dot{u} + \langle \underline{r}_{vv}, \underline{r}_u \rangle \dot{v}$$

$$\parallel$$

$$\langle \underline{r}_{vu}, \underline{r}_u \rangle$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2} E_v$$

$$\parallel$$

$$F_v - \langle \underline{r}_{vv}, \underline{r}_v \rangle$$

$$\parallel$$

$$0 \quad \parallel$$

$$- \langle \underline{r}_{vu}, \underline{r}_v \rangle$$

$$\parallel$$

$$- \frac{1}{2} E_{vu}$$

$$(F=0 \Rightarrow$$

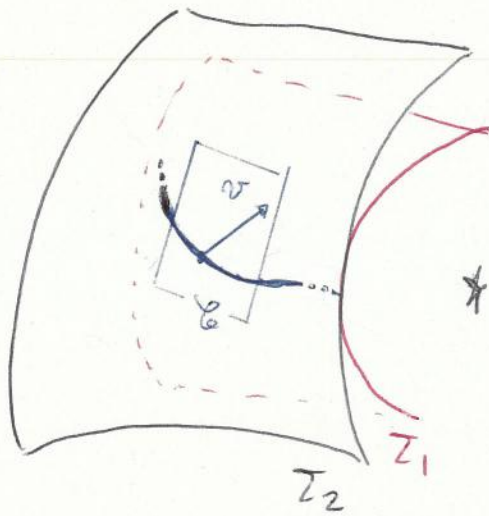
$$F_v=0)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2\sqrt{E}} (E_v \dot{u} - E_{vu} \dot{v})$$

La dimostrazione è  
conclusa

★ Interpretazione geometrica del trasporto parallelo  
(è l'idea originaria di Levi-Civita)



Siano  $T_1$  e  $T_2$   
tangenti lungo  $C$ .

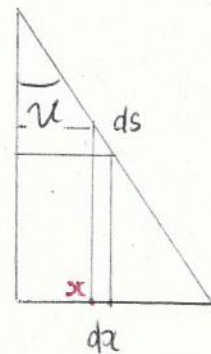
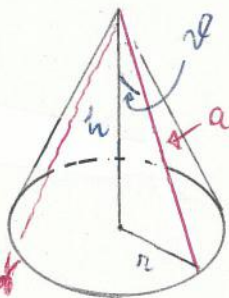
★ Il trasporto parallelo lungo  $C$   
è il medesimo per le due  
superficie

Applicazione: trasporto parallelo sulla sfera

Premessa:

cono circolare retto

area laterale (calcolo rapido)

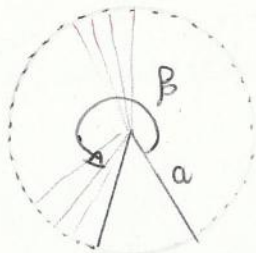


$$dA = df \cdot x \cdot ds$$

$$= df \cdot x \cdot \frac{dx}{\sin \alpha}$$

sviluppo  
piatto del  
cono

$$A = \int_0^{2\pi} df \int_0^r \frac{x dx}{\sin \alpha} = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \frac{1}{\sin \alpha}$$

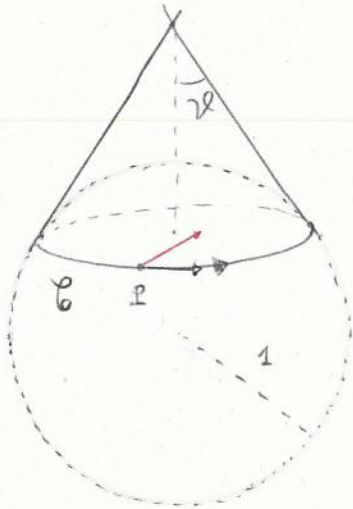


$$\frac{1}{2} \beta \cdot a^2 = \frac{1}{2} \beta \frac{r^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2\pi \sin \alpha}$$



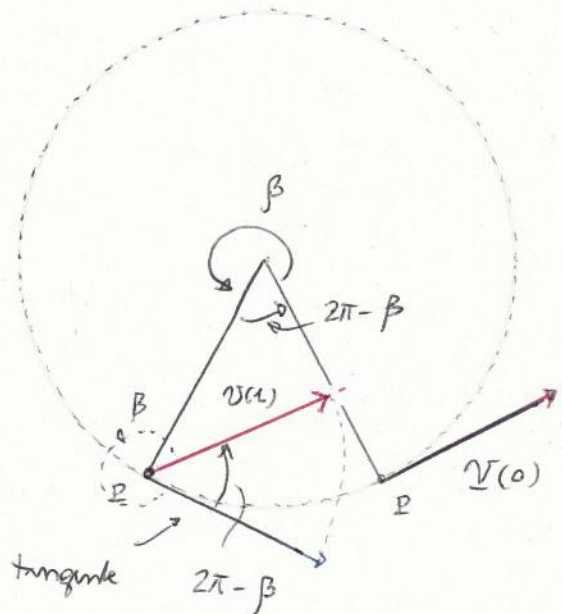
\* il trasporto parallelo di un vettore tangente alla sfera lungo un parallelo è uguale al corrispondente trasporto rispetto al cono (che è sviluppatibile: il trasporto parallelo è quello sul piano)



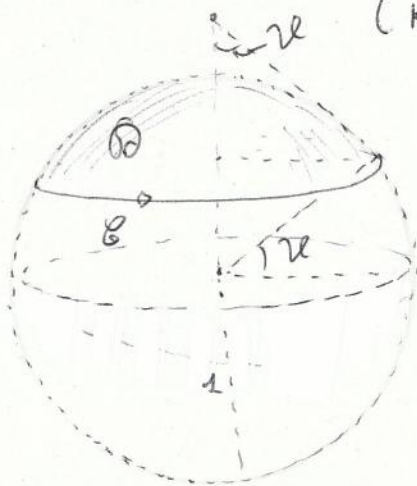
È subito

$$\omega = 2\pi - \beta$$

$$= 2\pi(1 - \sin \vartheta)$$



Controlliamo il risultato con la formula di Levi-Civita ( $K=+1$ )



L'area della calotta  $\mathcal{O}$  vale infatti:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta} d\varphi \cos \vartheta d\vartheta = 2\pi(1 - \sin \vartheta)$$



Caso particolare:  $\beta=0 \Rightarrow \omega=2\pi$   
 $=$  area emisfero

Prenderemo in seguito la discussione di tale risultato, apparentemente paradossale...

Leczione XXI

★ Geodetiche

Esistono varie definizioni di geodetica  $\gamma \subset \Sigma$ , equivalenti tra loro.

① Una geodetica  $\gamma$  su  $\Sigma$  è una curva autoparallela su  $\Sigma$ , cioè tale che il suo vettore velocità sia parallelo lungo  $\gamma$ . Posto allora  $\underline{v} = v^i \mathbf{r}_i$

$$= \dot{x}^i \mathbf{r}_i = \underline{\dot{x}} \quad (\underline{x} = \underline{x}(t) = \mathbf{r}(x(t), y(t)))$$

nell'equazione del trasporto parallelo, si ha subito

$$(*) \quad \boxed{\ddot{x}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad m=1,2}$$

Ora, dato che il trasporto parallelo conserva le lunghezze, il vettore velocità  $\underline{\dot{x}}$  deve avere lunghezza costante,

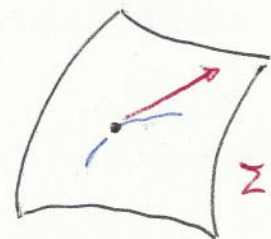
|| e pertanto il parametro  $t$  deve essere proporzionale alla lunghezza d'arco  $s$   $(\|\underline{\dot{x}}\| = \|\frac{d\underline{x}}{dt}\| = |\frac{ds}{dt}| \|\underline{\dot{x}}'\| = |\frac{ds}{dt}|)$

Come di consueto, spesso confonderemo una geodetica col suo sostegno, pensandola però sempre parametrizzata con la lunghezza d'arco, o parametro a questa proporzionale.

Si noti, a questo proposito, che la (\*) non è invariante per cambiamenti di parametro.

Per quanto detto, possiamo scrivere (\*) nella forma compatta

$$(*)' \quad \boxed{\frac{\nabla}{ds} \underline{\dot{x}} = \underline{0}}$$

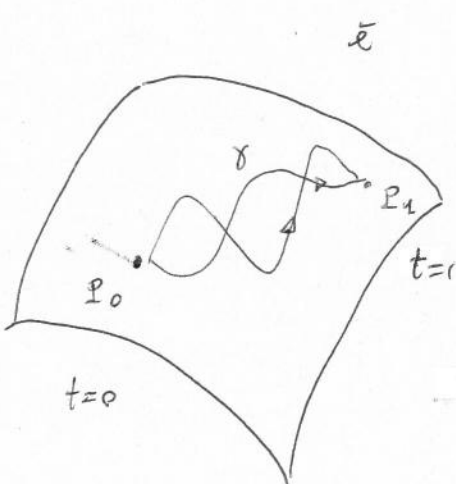


In virtù del teorema di Cauchy-Lipschitz, per un qualsiasi punto della superficie esiste un'unica geodetica uscente dallo stesso con una velocità prefissata (v. figura).

② L'equazione delle geodetiche può dedursi a partire da due principi variazionali sia  $\gamma = \gamma(t)$  curva su  $Z$ .  $\dot{\gamma} = (\dot{x}^i)$

②' Sia  $L_1 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$  (Lagrangiana)

(Energia cinetica di una particella di massa  $m=1$  che si muove liberamente su  $Z$ ). L'azione corrispondente



$$S_1(\dot{x}^i, x^i) = \int_0^1 L_1 dt =: \text{energia della curva } \gamma$$

Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \quad j=1,2$$

sono proprio le (4)! [vedi poco oltre per la dimostrazione]

②'' Le stesse equazioni si ottengono pure se si considera

$$L_2 = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$$

$$\Rightarrow S_2(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt = \text{lunghezza di } \gamma$$

perché  $t \propto s$  ( $t$  proporzionale alla lunghezza al'arco)

(sicché  $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = c$  (cost.))

Pertanto le geodetiche costituiscono i  
cammini critici del funzionale energia  
 e del funzionale lunghezza.

|| In particolare, localmente, almeno tra ai cammini  
 di lunghezza minima tra due punti su una superficie.  
 (v. anche oltre)

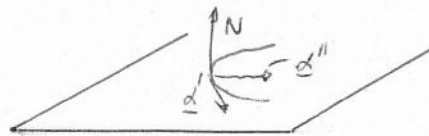


Ciò non è vero globalmente.

Consideriamo i seguenti esempi

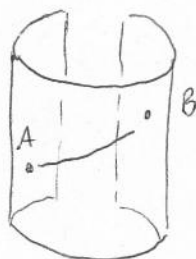
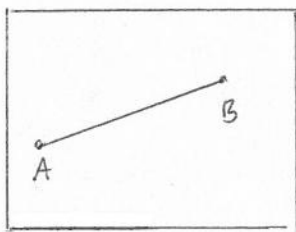
• Le geodetiche del piano sono le rette

Ciò è chiaro da (4):  $\ddot{x}^i = 0$  ( $M_{12}^i \equiv 0$ ) o, equivalente-  
 mente, dalla (4')

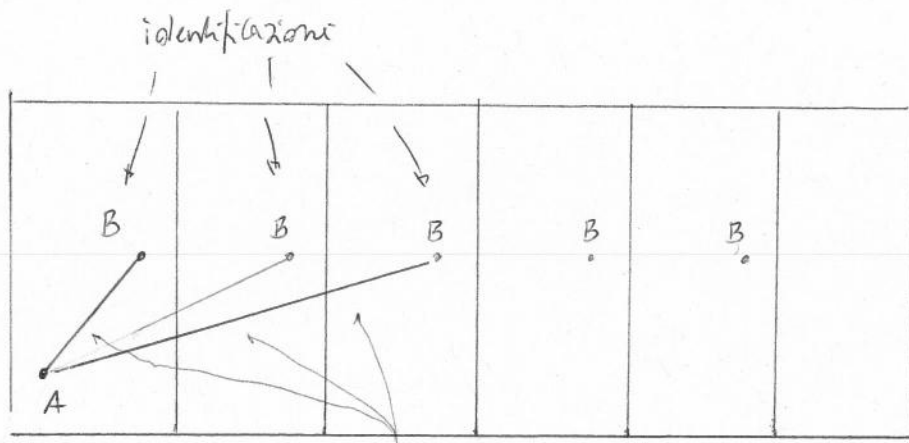


Si ha  $\frac{\nabla}{ds} \underline{d}' = \underline{P} \underline{d}'' = \underline{d}'' = 0$ .

Tramite un'isometria, geodetiche vanno in geodetiche  
 (almeno parametrizzate) e, dato che un cilindro è  
localmente isometrico ad un piano, concludiamo che  
 le geodetiche su un cilindro sono fornite dalle eliche  
cilindriche

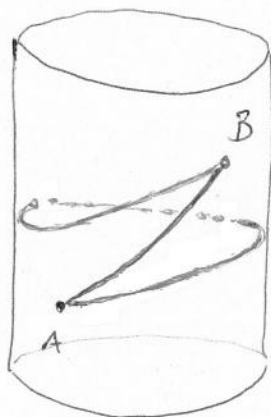






geodetiche congruenti  
A e B sul cilindro

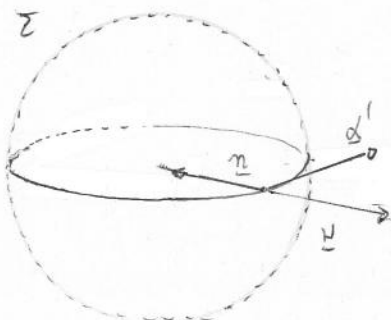
Di più, A e B



possiamo avere congruenti  
da infinita geodetiche  
(una sola delle quali avrà  
lunghezza minima)

- su una sfera, le geodetiche sono costituite dai cerchi massimi. (Cio' si puo' accettare tramite la (\*) (vedi oltre) ma e' molto piu' complicato).

Preso un cerchio massimo  $\gamma$



$$\underline{d}'' = \frac{1}{R} \underline{n} = -\frac{1}{R} \underline{N} \Rightarrow$$

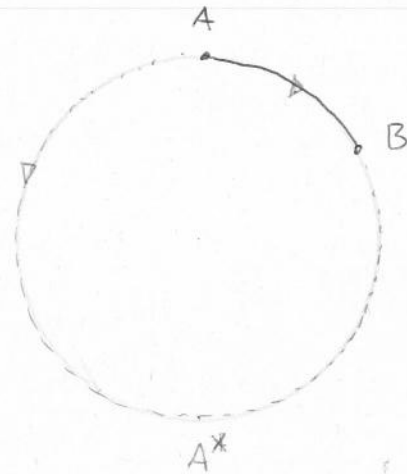
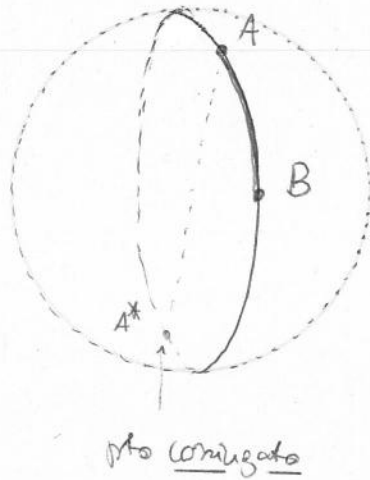
$$\frac{\nabla}{ds} \underline{d}' = \underline{0}$$

dunque i cerchi massimi sono geodetiche.

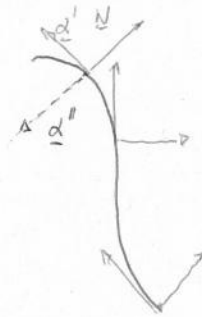
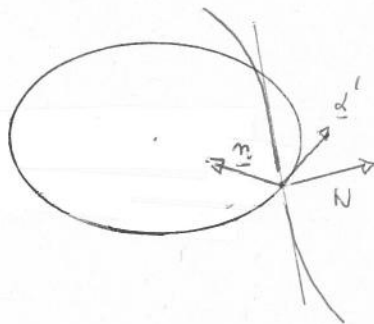
dato  $P \in \Sigma$  e  $\underline{v} \in T_P \Sigma$ ,  $\|\underline{v}\| = 1$ ,  $\exists!$  geodetica per  $P$   
con velocità  $\underline{v}$  (la (\*) e' un sistema di eq. diff. del secondo ordine,  
vale il teorema di Cauchy-Lipschitz...). Ma dato che  $\forall P \in \Sigma$   
passa un unico cerchio massimo con la data velocità, tale  
geodetica coincidera' necessariamente con quel cerchio massimo

$\widehat{AB}$  : geodetica minima

$\widehat{AA^*B}$  : geodetica, ma non minima



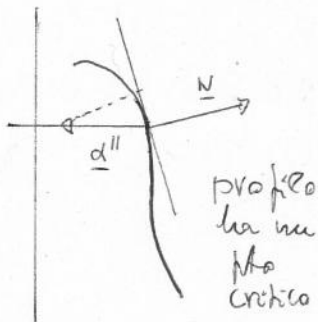
- Su una superficie di rivoluzione, i meridiani sono geodetiche, i paralleli lo sono solo se corrispondono a gli critici del profilo [ v. anche oltre la discussione del teorema di Clairaut ].



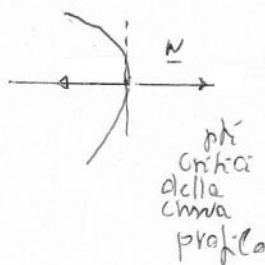
$$\underline{\alpha}'' \parallel \underline{N} \Rightarrow \frac{\nabla}{ds} \underline{\alpha}' = \underline{e}$$

$$\underline{\alpha}'' = \frac{1}{R} \underline{n}$$

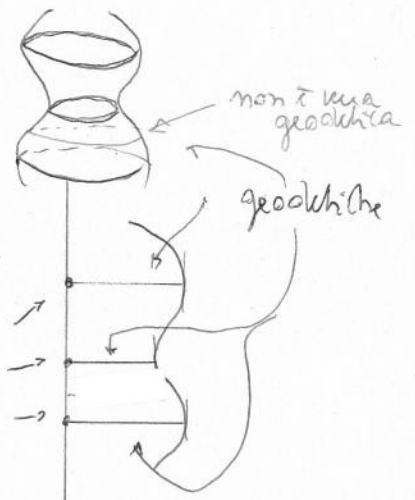
e in generale  $\underline{n}$  non è  $\parallel \underline{N}$ :  
lo è se la curva



profilo ha un pto critico



pti critici della curva profilo



★ eq. delle geodetiche  $\equiv$  Eulero-Lagrange

dimostrazione

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$   
vale per una generica varietà Riemanniana

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} &= \frac{1}{2} g_{ij} \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial \dot{u}^k} \dot{u}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{u}^i \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^k} \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \delta_{ik} \dot{u}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \delta_{jk} \dot{u}^i \\ &= \frac{1}{2} g_{kj} \dot{u}^j + \frac{1}{2} g_{ik} \dot{u}^i \\ &= g_{kj} \dot{u}^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} \right) &= \frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{u}^j) = \frac{d}{dt} (g_{kj}) \dot{u}^j \\ &\quad + g_{kj} \ddot{u}^j \\ &= g_{kj} \ddot{u}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \dot{u}^i \dot{u}^j \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{u}^j) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

(\*)

$$\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

$$g_{kj} \ddot{u}^j + \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$$

tratt. pu  $g^{km}$

$$g^{km} g_{jk} = g^{mk} g_{kj} = \delta_j^m$$

$$u^{m} + g^{km} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) u^i u^j = 0$$

★ ora

$$g^{km} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} u^i u^j =$$

cruciale!

$$= \frac{1}{2} u^i u^j g^{km} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right)$$

$\Rightarrow$

$$u^{m} + \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) u^i u^j = 0$$

$\Gamma_{ij}^m$

$$\boxed{u^{m} + \Gamma_{ij}^m u^i u^j = 0}$$

$m=1 \dots n$

Q.E.D.



$$\text{Se } L = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = \frac{\partial L}{\partial u^k}$$

diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{g_{kj} \dot{u}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}}$$

Se  $t = \alpha \cdot s$  l. d'arco

$$\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} \equiv \text{cost}$$

$\Rightarrow$  l'eq. diventa

$$\frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{u}^j) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

cioè la (\*)

Lezione XXII

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spina UCSC - Brescia

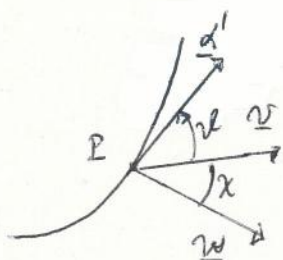
③ Geodetiche:  
Approccio "estremo"



Sia  $C \subset \Sigma$   $C: \underline{d} = \underline{d}(s)$  biregolare

Sia  $\underline{v} = \underline{v}(s)$  un campo vettoriale parallelo lungo  $C$ ,  $\|\underline{v}(s)\| = 1$

Sia  $\underline{w} = \underline{w}(s)$  l'angolo orientato da  $\underline{v}(s)$  ad  $\underline{d}'(s)$  (v. figura)



Definiamo curvatura geodetica di  $C$  in un pts  $P$  (notazione:  $R_g^C(P)$ ) il numero reale

$$R_g^C(P) := \frac{d\alpha}{ds}(P)$$

Notiamo subito che  $R_g^C(P)$  non dipende dal vettore parallelo scelto: questo perché dato un altro vettore parallelo  $\underline{w} = \underline{w}(s)$ , l'angolo  $\alpha$  tra  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  rimane invariato lungo la curva, sicché  $\frac{d}{ds}(\alpha + \alpha) = \frac{d\alpha}{ds}$

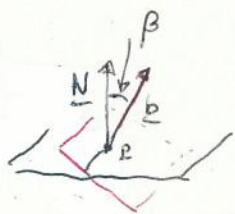
Inoltre  $R_g^C(P) = 0 \iff C$  è una geodetica

Pertanto  $R_g^C$  misura la non geodeticità di una curva su una superficie.

Dimostriamo che, in ogni pts di  $C$ ,

$$(*) \quad R_g = R \cdot \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle$$

$\uparrow$  curvatura spaziale di  $C$        $\uparrow$  binormale di  $C$        $\nwarrow$  normale alla superficie

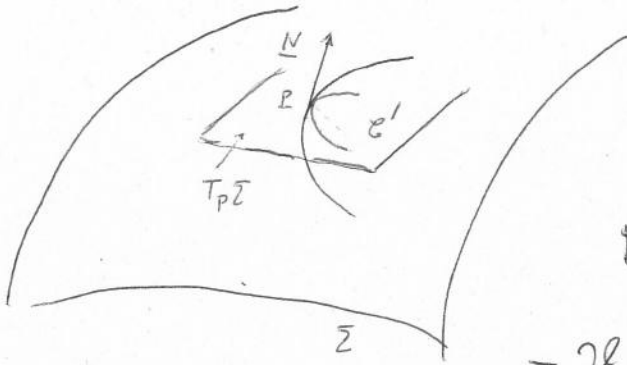


$$\langle \underline{b}, \underline{N} \rangle = \cos \beta$$

$\beta$  angolo tra il piano tangente e il piano osculatore di  $C$  (in  $P$ )

La (\*) si dirà che la curvatura geodetica di  $\mathcal{C}$  è la curvatura (dotata di segno) in  $\mathbb{R}^3$  della curva piana  $\mathcal{C}'$  ottenuta proiettando  $\mathcal{C}$  sul piano tangente a  $\Sigma$  in  $P$ .

Dim. Si ha  $(\|\underline{v}\| = \|\underline{\alpha}'\| = 1)$



$$\cos \varphi = \langle \underline{v}, \underline{\alpha}' \rangle$$

Deriviamo:

$$-\varphi' \sin \varphi = \langle \underline{v}', \underline{\alpha}' \rangle + \langle \underline{v}, \underline{\alpha}'' \rangle$$

$$i = \frac{d}{ds}$$

ma  $\langle \underline{v}', \underline{\alpha}' \rangle = 0$  perché  $\underline{v}$  è parallelo ( $\underline{v}' \parallel \underline{N}$ ),  
da cui

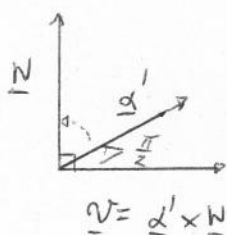
$$-\varphi' \sin \varphi = \langle \underline{v}, \underline{\alpha}'' \rangle$$

ora possiamo scegliere  $\underline{v}$  in modo che in  $\mathbb{R}^3$  risulti  
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (e  $\sin \varphi = 1$ ) [questo per l'indipendenza  
 dal vettore parallelo]  $\Rightarrow$

$$R_g = \varphi' = -\langle \underline{v}, \underline{\alpha}'' \rangle$$

ma la scelta fatta ci permette di assumere che, in  $\mathbb{R}^3$ , è

$$\underline{v} = \underline{\alpha}' \times \underline{N}$$



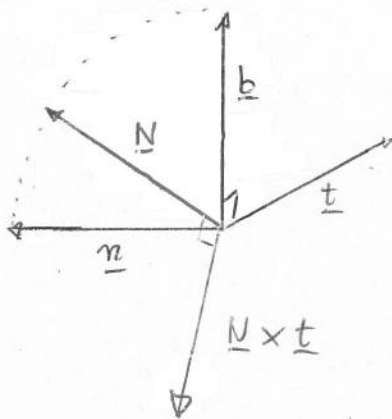
$$\begin{aligned} R_g &= -\langle \underline{\alpha}' \times \underline{N}, \underline{\alpha}'' \rangle = \\ &= \langle \underline{\alpha}' \times \underline{\alpha}'', \underline{N} \rangle = \langle \underline{t} \times \underline{r}'', \underline{N} \rangle \\ &= R \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle \quad (\underline{t} \times \underline{r}'' = \underline{b}) \end{aligned}$$

ovvero l'asserto.  $\square$

Corollario: per  $\mathcal{C} \subset \mathcal{I}$  (irregolare) si ha

$$(\star) \quad \boxed{R^2 = R_m^2 + R_g^2}$$

$\swarrow$  curvatura       $\swarrow$  curvatura normale       $\swarrow$  curvatura geodetica



Infatti

$$\underline{N} = \langle \underline{N}, \underline{n} \rangle \underline{n} + \langle \underline{N}, \underline{b} \rangle \underline{b}$$

$$\Rightarrow \langle \underline{N}, \underline{n} \rangle^2 + \langle \underline{N}, \underline{b} \rangle^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\star)$$

Altra conseguenza notevole (e nuova dim. di  $\mathcal{I}$ )

$$\boxed{\frac{\nabla}{ds} \underline{d}' = R_g (\underline{N} \times \underline{t})}$$

Dim.

$$\underline{d}'' = R \underline{n} = R \left\{ \langle \underline{n}, \underline{N} \times \underline{t} \rangle \underline{N} \times \underline{t} + \langle \underline{n}, \underline{N} \rangle \underline{N} \right\}$$

$$= R \left\{ \langle \underline{N}, \underline{t} \times \underline{n} \rangle \underline{N} \times \underline{t} + \langle \underline{n}, \underline{N} \rangle \underline{N} \right\}$$

$$= \underbrace{R_g \cdot \underline{N} \times \underline{t}}_{\perp T_{\mathcal{I}} \Sigma} + \underbrace{R_n \cdot \underline{N}}_{\parallel \underline{N}} \quad ( \Rightarrow (\star) )$$

Pertanto

$$\frac{\nabla}{ds} \underline{d}' = R_g (\underline{N} \times \underline{t}) \quad \text{come asserito (si rimuove la componente normale)}$$

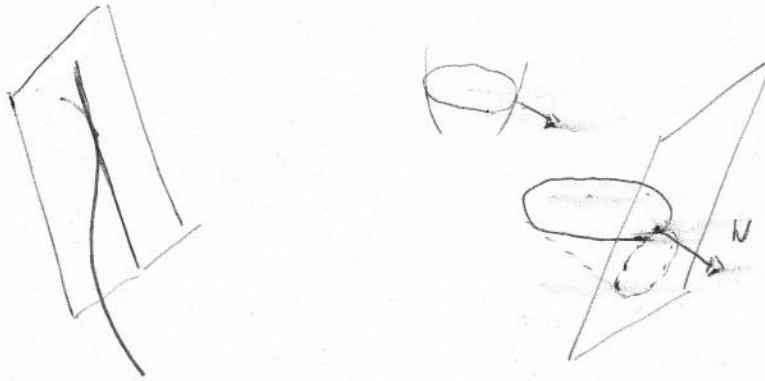
ovviamente  $R_g = 0 \Leftrightarrow \frac{\nabla}{ds} \underline{d}' = 0$   
(geodetica)



Si ritrova facilmente, attraverso il pto di vista ③, che i meridiani di una superficie di rivoluzione sono sempre geodetiche, mentre i paralleli lo sono solo se corrispondono a phi critica del profilo:

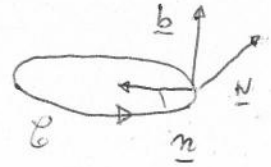
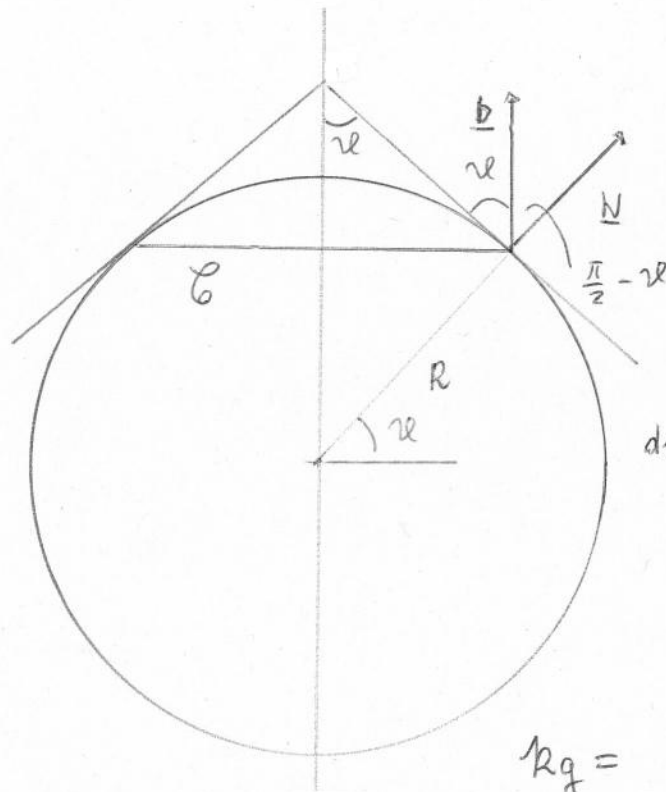
Se si proietta un meridiano sul piano tangente in un qualsiasi pto si ottiene una retta (che ha curvatura nulla).

Se si proietta un parallelo (una circonferenza) si ottiene un' ellisse, in generale (curvatura  $\neq 0$ ), e una retta nella condizione summenzionata.



Discuteremo più oltre l'approccio generale alle geodetiche sulle superficie di rivoluzione.

\* Ancora sul trasporto parallelo e la curvatura geodetica



$$K_g = \frac{1}{R} \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle$$

$$= \frac{1}{R} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

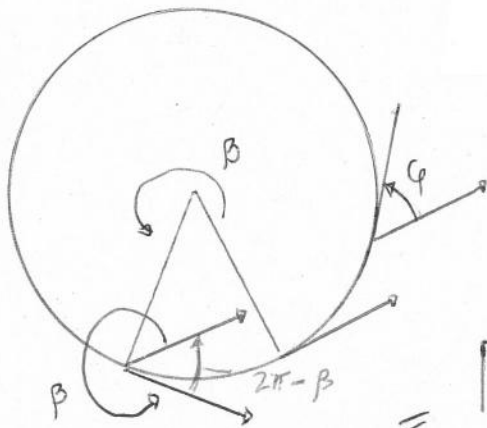
$$= \frac{1}{R} \sin \alpha$$

$$ds = R d\varphi$$

$$\int_C K_g ds = R \cdot \frac{1}{R} \cdot 2\pi \sin \alpha$$

$$= 2\pi \sin \alpha$$

$$K_g = \frac{d\beta}{ds} \leftarrow \text{velocità di variazione rispetto ad una versione parallela}$$



$$\text{Variazione totale} = \beta = 2\pi \sin \alpha$$

Troviamo perciò

$$\alpha_{\parallel} = 2\pi - \int_C K_g ds$$

angolo di parallelismo

$2\pi(1 - \sin \alpha)$   
come già trovato

In virtù dell'osservazione fondamentale

di Levi-Civita, tale formula vale per un parallelo di una superficie di rivoluzione generica facendo attenzione ai vari orientamenti (della curva e della superficie...)



★ Un apparente paradosso

Nel caso  $\beta = 0$ , ossia  $\sin \alpha = 0$

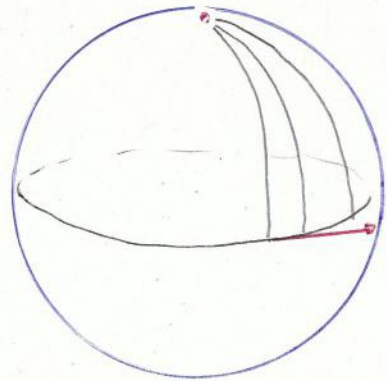
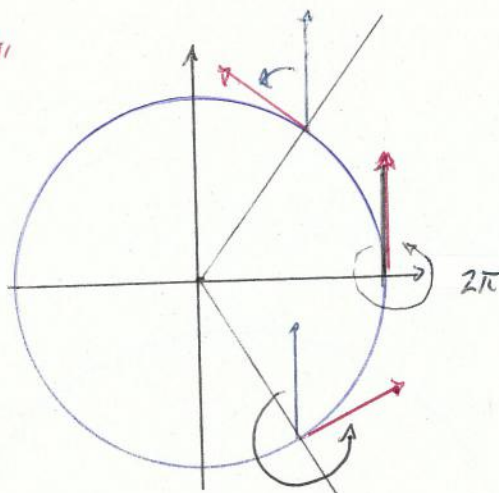


il vettore tangente all'equatore (v. figura), rimanendo parallelo, non subisce alcuna rotazione. La formula

fornisce però  $\alpha_{//} = 2\pi$  (comunque indistinguibile)

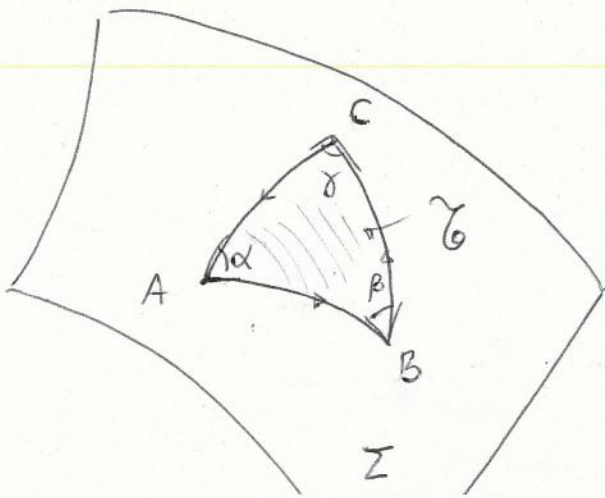
Ciò accade perché il sistema delle coordinate polari <sup>(+)</sup> geodetiche è singolare nell'origine (come le coordinate polari piane)

Il vettore "rosso"  
in figura  
ruota in  
effetti di  $2\pi$



(+) vedi oltre per la discussione dell'applicazione esponenziale

☆☆☆ Il "teorema elegantissimo" di Gauss  
 (teorema del difetto angolare; teorema dell'eccesso sferico generalizzato)



Sia  $ABC$  un triangolo geodetico su  $\Sigma$   
 (sup. parametrizzata)

Si ha

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\mathcal{G}} K \, d\sigma$$

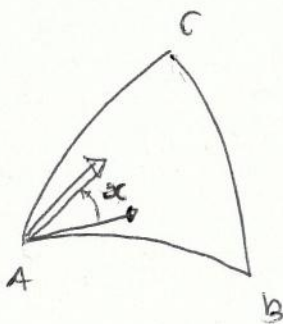
somma degli angoli interni

difetto angolare - eccesso sferico generalizzato

**ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE**

Prof. Mauro Spina, UCSC, Brescia

**Lezione XXIII**

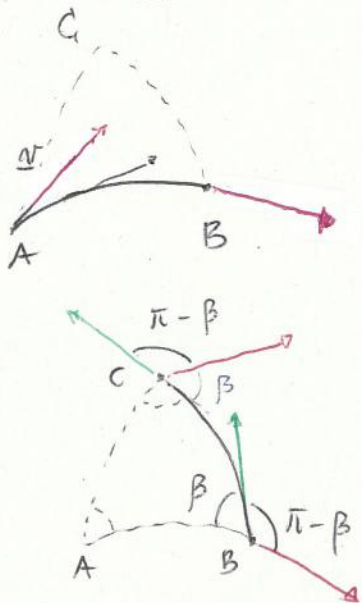


Dim. Determiniamo il trasporto parallelo di un vettore lungo il triangolo (ad esempio, il vettore tangente in A). In base alla formula di Levi-Civita

$$\alpha = \iint_{\mathcal{G}} K \, d\sigma$$

Dimostriamo dunque

che  $\alpha = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

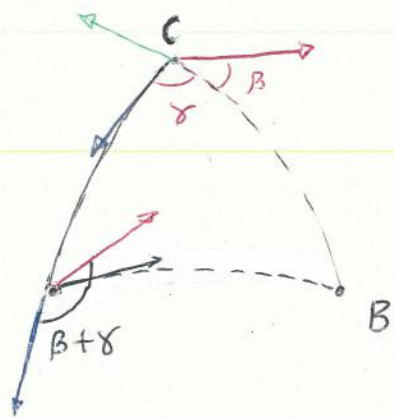


Dato che  $\widehat{AB}$  è una geodetica  $\underline{v}$  = vettore tangente ad  $\widehat{AB}$  in A, rimane tangente ad  $\widehat{AB}$ .

Trasportiamo  $\underline{v}$  e  $\underline{v}$  vettore tangente a  $\widehat{BC}$  in B parallelamente lungo  $\widehat{BC}$ : l'angolo  $\pi - \beta$  da questi formato si conserva.

In C si trova:



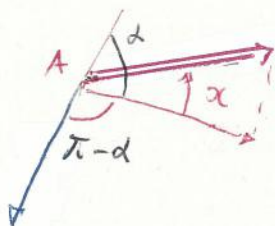


trasportiamo  $\rightarrow$

il vettore tangente ad  $\widehat{AC}$  in  $\widehat{C}$  parallelamente lungo  $\widehat{CA}$  fino ad  $A$ . Di nuovo l'angolo  $\beta + \gamma$  tra loro

si conserva.

Si ha allora (v. figura accanto)



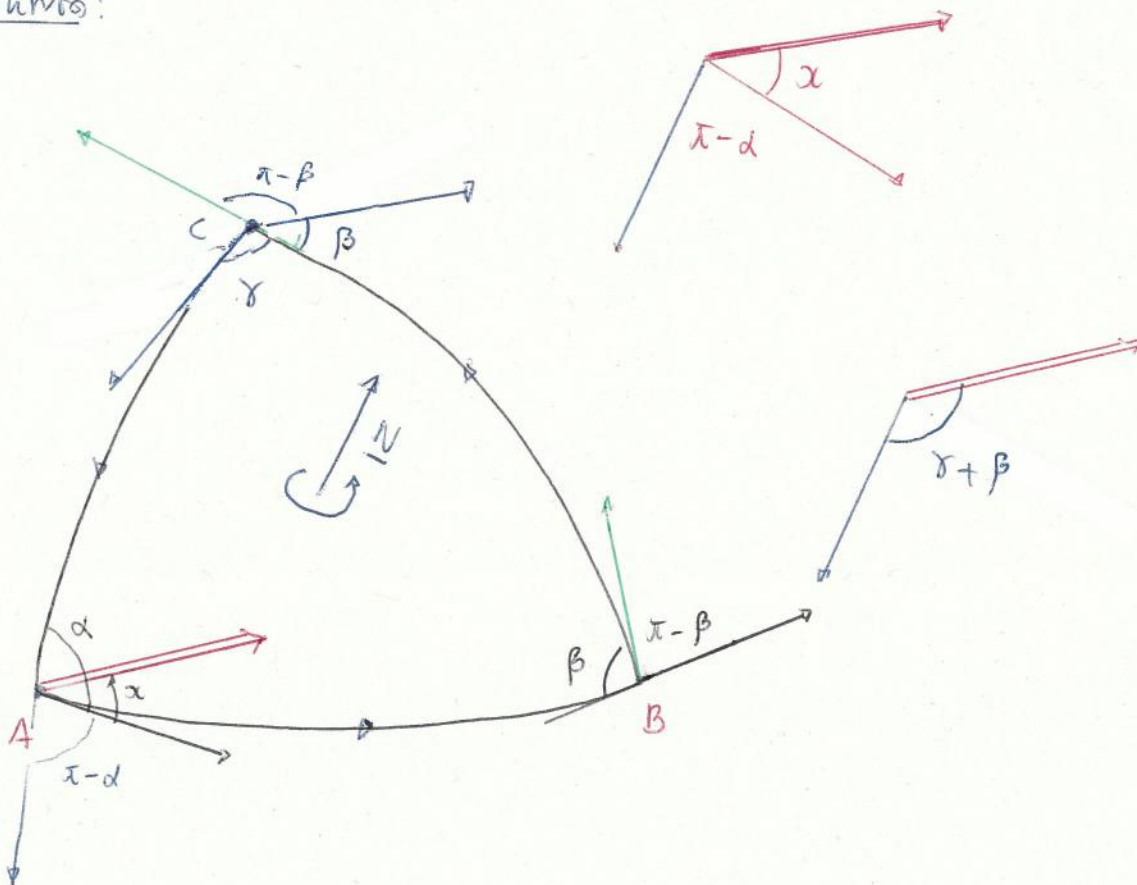
$$\beta + \gamma = \pi - d + \alpha$$

da cui

$$\alpha = d + \beta + \gamma - \pi$$

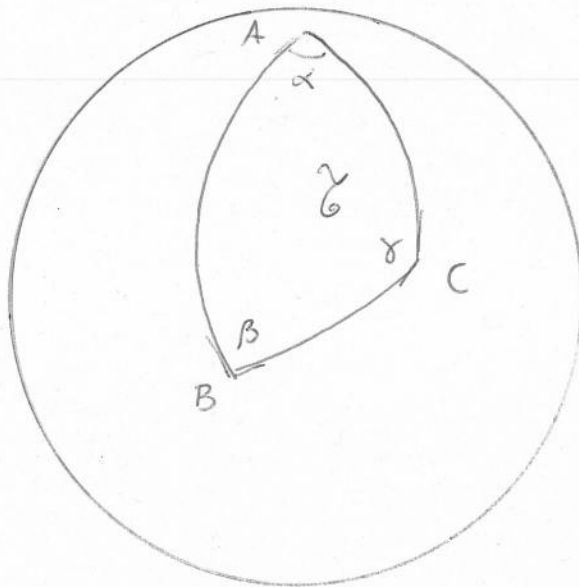
come desiderato.

Riassunto:



## 4 Applicazioni

- Sfera di raggio  $R$



$\tau = ABC$  triangolo sferico  
 $\widehat{AB}, \widehat{AC}, \widehat{BC}$  archi  
 di curvatura massima  
 (minori di una semicirconferenza  
 massima) (Triangolo geodetico)

$$K = \frac{1}{R^2}$$

il Teorema

elegantissimo

fornisce

$$E = \underbrace{\alpha + \beta + \gamma - \pi}_{\text{eccesso sferico}} = \frac{A(\tau)}{R^2}$$

ovvero  $A(\tau) = ER^2$

(formula di Harriot (L'Hospital, Cavalieri))

si può dimostrare anche elementarmente

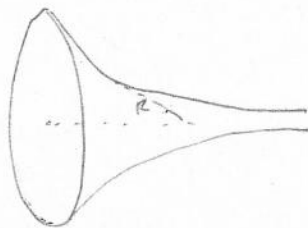
- ipersfera di "raggio"  $R$

Qui  $K = -\frac{1}{R^2}$

e si ha

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{A(\tau)}{R^2}$$

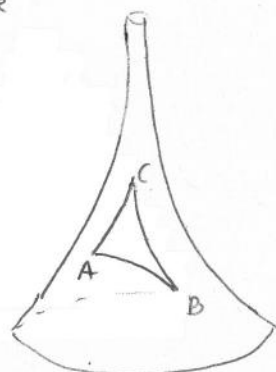
di defetto  
angolare



$$A(\tau) = \delta R^2$$

se  $R \rightarrow 0$  e  $\tau$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



Di fatto, abbiamo incontrato due modelli di geometrie non euclidee "rette" = geodetiche

$$\# \mathbb{R}P^2 = \frac{S^2}{\sim}$$

↑  
piano proiettivo reale

↑  
identificazione dei poli antipodali

La somma degli angoli interni di un triangolo supera  $\pi$   
 $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

piano ellittico

non vi sono "rette" parallele

(due cerchi massimi si incontrano in due poli antipodali, che vengono identificati). Triangoli simili risultano automaticamente congruenti

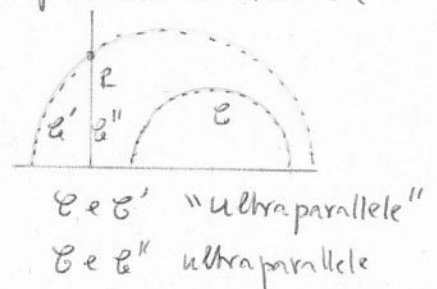
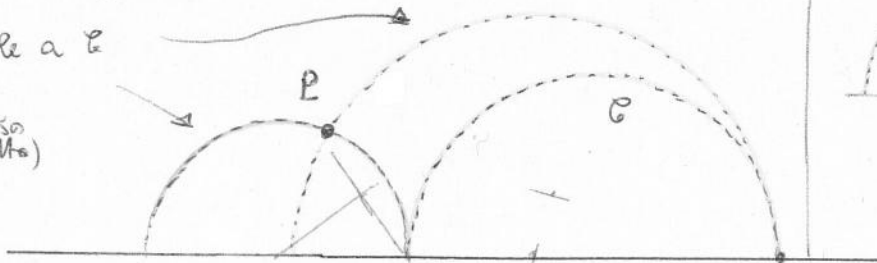
$$\# (IH, ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}) \quad \boxed{\text{piano iperbolico}}$$

(di Lobachevskij) : la pseudosfera ne fornisce un modello locale con  $K = -1$  e per un triangolo geodetico si ha  $\delta = \underbrace{\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}_{\text{defetto angolare}} = A(\tau)$

Anche qui triangoli simili sono necessariamente congruenti. Mostriamo poco oltre che le "rette" del modello (geodetiche) sono le semirette verticali e le semicirconferenze con centro sull'asse  $x$  (i punti dell'asse  $x$  non fanno parte di  $IH$ ).

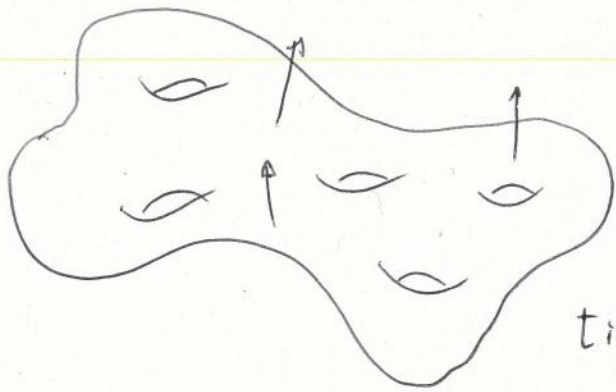
Qui, per un dato estremo ad una "retta" si possono condurre infinite parallele alla "retta" data.

parallele a  $e$  da  $P$  (in senso stretto)



# \*\*\* Il teorema di Gauss - Bonnet

(caso particolare)



Sia  $\Sigma$  una superficie  
liscia, compatta, senza bordo  
Chiusa

orientabile

[il tutto vale per una superficie riemanniana astratta,  
chiusa, orientabile]

(i) Data una triangolazione (\*) (geodetica) di  $\Sigma$  qualsiasi

Si ha

(\*) L'esistenza di una triangolazione  
è garantita da un teorema  
di Pado



$$\chi(\Sigma) := n_0 - n_1 + n_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K \, d\sigma$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 # vertici   # lati   # triangoli

Caratteristica  
di Euler-Poincaré

$\chi$  è pertanto indipendente dalla triangolazione

(ii) Detto  $g$  il genere di  $\Sigma$  (numero dei "buchi"  
o "manici")



Si ha

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g$$

Pertanto

$$\chi(\Sigma) = n_0 - n_1 + n_2 = 2 - 2g = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} K \, d\sigma$$

Carattere  
topologico

Carattere geometrico  
e analitico

no legami tra geometria e topologia (no leggi in fisica)



Dim. (i) La dimostrazione discende facilmente dal

"Theorema elegantissimum":

$$\iint_{\Sigma} k d\sigma = \sum_{i=1}^{n_2} \iint_{\tilde{\sigma}_i} k d\sigma = \sum_{i=1}^{n_2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi)$$

(additività dell'integrale)                      (Theorema elegantissimum)



$$= \sum_{i=1}^{n_2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - n_2 \pi$$

Somma degli angoli interni di tutti i triangoli



$$= 2\pi n_0 - \pi n_2$$

$$= 2\pi \left( n_0 - \frac{n_2}{2} \right)$$

Ma  $n_1 = \frac{3n_2}{2}$  (ogni lato compete a due triangoli)



quindi  $n_0 - n_1 + n_2 = n_0 - \frac{3n_2}{2} + n_2$

$$= n_0 - \frac{n_2}{2}$$

In definitiva  $\iint_{\Sigma} k d\sigma = 2\pi (n_0 - n_1 + n_2) = 2\pi \chi(\Sigma)$

(ii) non vorrà dimostrata (esce dagli scopi del presente corso)

□

Il risultato vale per qualsiasi triangolazione. L'abbiamo presa geometrica per comodità

Per una sfera (\*)  $\chi = 2$

$$\chi = 2$$



(\*) dal pto di vista topologico

e si ritroverebbe il risultato di Eulero per un poliedro omeomorfo ad una sfera :

$$[V - E + F = 2] (**)$$

↑            ↑            ↑  
vertici    lati        facce  
                 spigoli



Per un toro



$$\chi = 0$$



$$\chi = 6$$

Nota: il risultato vale qualsunque sia la metrica di cui possiamo dotare la superficie ("concreta" o "astratta" che sia).

E' questa la sua forza.

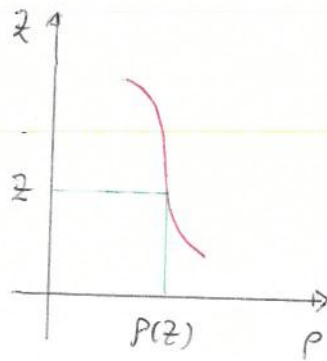
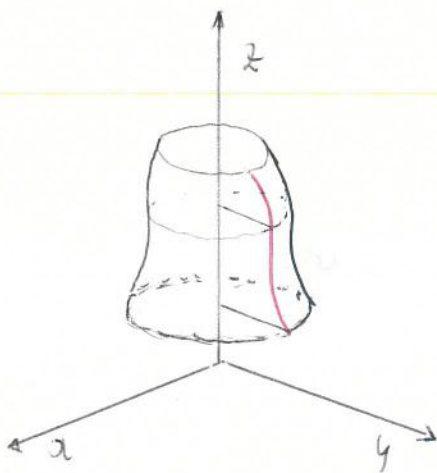
Il tutto porterebbe, dopo molta strada, al \*\*\* Teorema di Atiyah-Singer

e alle sue molteplici estensioni...

(\*\*) può essere illustrata per via elementare (Coxeter), glissando su alcuni dettagli: sia  $\chi = V - E + F$ . Se dalla maglia togliamo un triangolo la somma a secondo membro  $\chi = \chi - 1$  ora, stendendo la maglia su di un piano, e rimuovendo opportunamente, "dall'esterno", un triangolo alla volta,  $\chi - 1$  non cambia (si perdono una faccia, un vertice, due lati) finché si arriva ad un solo triangolo, sicché  $\chi - 1 = 1 \Rightarrow \chi = 2$ .



# \* geodetiche sulle superficie di rivoluzione



ELEMENTI DI  
GEOMETRIA  
DIFFERENZIALE

Prof. Mauro Spica - UCSC  
Brescia

Lezione  
XXIV

$$p = f(z)$$

$$ds^2 = f(z)^2 d\varphi^2 + (1 + f'(z)^2) dz^2$$

$$1 = \frac{d}{dz}$$

Scriviamo l'energia cinetica

$$L = \frac{1}{2} (f(z)^2 \dot{\varphi}^2 + (1 + f'(z)^2) \dot{z}^2)$$

$L = L(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z})$  ma  $\varphi$  non compare esplicitamente  
(variabile ciclica o ignorabile)

In meccanica analitica

una variabile ciclica conduce ad una quantità

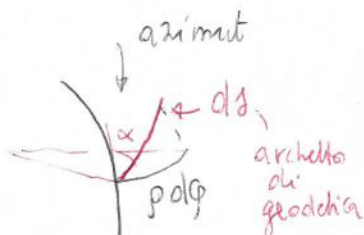
conservata: se  $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ ,  $\bar{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  si conserva lungo le traiettorie (integrale primo):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = c \quad \text{Nel nostro caso}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = f^2 \dot{\varphi} = c, \text{ oppure } p^2 \dot{\varphi} = c \quad \text{sia } t = s$$

$$p^2 d\varphi = c ds \quad ds = p d\varphi \cdot \frac{1}{\sin d} \quad d \neq 0$$



$$p \cdot \sin d = c$$

raggio del  
parallelo

seno dell'azimut

teorema di  
Clairaut

(L'integrabile primo in questione è la componente del momento angolare lungo l'asse  $z$ )

\* L'equazione delle geodetiche si integra direttamente (senza passare attraverso i simboli di Christoffel):

la "conservazione dell'energia"  $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1$

prende la forma (ora  $s = \frac{d}{ds}$ )

$$1 = \frac{d}{ds}$$

$$(f'^2 + 1) \dot{z}^2 + f^2 \dot{\varphi}^2 = 1$$

sostituendo si ha

$$(f'^2 + 1) \dot{z}^2 + f^{-2} c^2 = 1 \quad (**)$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{ds}$$

che fornisce due equazioni del primo ordine a variabili separabili, integrabili per quadrature, in linea di principio.

L'integrazione delle (\*) e (\*\*) consente di individuare le geodetiche cercate.

Il metodo lagrangiano in presenza di variabili cicliche risulta efficace anche in altri casi, come vedremo a breve.

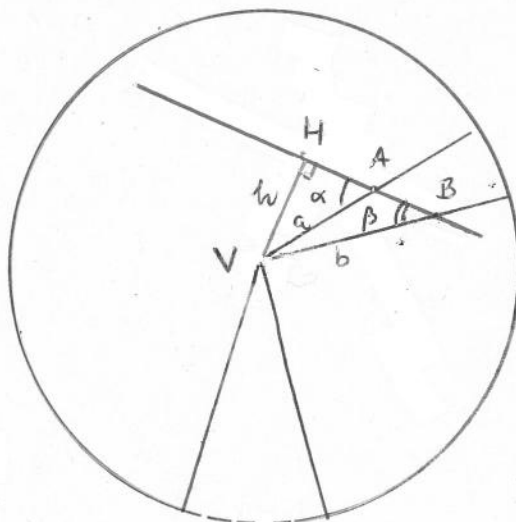
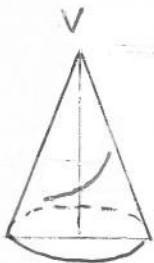
\* Osservazione importante La condizione espressa dal teorema di Clairaut è necessaria, ma non sufficiente, affinché una curva su una superficie di rivoluzione sia una geodetica. Ad esempio, un parallelo forma un azimut costante ( $= \frac{\pi}{2}$ ) con i meridiani, ma in generale non è una geodetica (si noti poi che  $\sin \alpha = 0 \dots$ ).



\* A titolo di esempio, descriviamo le geodetiche su un cono in modo qualitativo (non sarebbe difficile descriverle analiticamente in virtù delle osservazioni precedenti).

Dato che un cono è localmente isometrico ad un piano (si intende privato del vertice), le geodetiche in questione saranno immagini di rette.

Verifichiamo in tale contesto il teorema di Clairaut:



$$\overline{VA} \cdot \sin \alpha = \overline{VB} \cdot \sin \beta = \overline{VH}$$

$$a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta = \overline{VH}$$

$$\Downarrow \quad \left( \begin{array}{l} r_A = \sin \alpha \cdot a \\ r_B = \sin \beta \cdot b \end{array} \right)$$

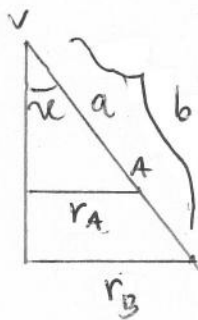
$$\boxed{r_A \cdot \sin \alpha = r_B \cdot \sin \beta}$$

$$\left( = \overline{VH} \cdot \sin \alpha \right)$$

$$\parallel$$

$$h$$

□



★ Determinazione delle geodetiche in alcuni esempi importanti

★ Sfera : cerchi massimi (chiara dalla def. tramite  $Rg = 0$ ).

$(r, \varphi)$   
 $\uparrow \quad \downarrow$   
 coordinate longitudinale  
 $\parallel \quad \parallel$   
 $x^1 \quad x^2$

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 r \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\sin^2 r} \begin{pmatrix} \sin^2 r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 r} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \sin 2r$$

$$\Gamma_{12}^2 = \cotan r$$

(gli altri sono nulli...) Si ha, per le geodetiche

$$\begin{cases} r'' - \frac{1}{2} (\varphi')^2 \sin 2r = 0 \\ \varphi'' + 2\varphi' r' \cotan r = 0 \end{cases}$$

Si calcoli  $K = \dots + 1$

$\varphi = \text{cost}$   $r = s$  (meridiano) è certamente soluzione, prendendo come parametro la lunghezza d'arco). Per simmetria, tutti i cerchi massimi sono geodetiche, e una geodetica qualsiasi, essendo la sua direzione iniziale tangente ad un cerchio massimo, è necessariamente un cerchio massimo.

Richiamo:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{matrice}$$

$$\Gamma_{jR}^i = \frac{1}{2} g^{iH} (g_{KH,j} + g_{jH,K} - g_{jK,H})$$

simboli di Christoffel

$$\frac{\partial g_{KH}}{\partial x^j} \text{ etc.}$$

matrice inversa di  $(g_{ij})$

★ geodetiche

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{KH}^i \dot{x}^K \dot{x}^H = 0 \quad i=1, \dots, n$$

Le formule hanno validità generale; si usa la convenzione di Einstein: Somma su indici ripetuti

# \* variante, trovate le equazioni di Lagrange

[ si tratta il calcolo dei simboli di Christoffel ]

$$g = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2$$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + \sin^2 r \dot{\varphi}^2)$$

"energia cinetica"

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \sin r \cos r \dot{\varphi}^2$$

Nota: se  $t = 3$

$$\dot{r}^2 + \sin^2 r \dot{\varphi}^2 = a = \text{cost.}$$

$$\dot{r}^2 + \frac{c^2}{\sin^2 r} = a \quad (\text{pu } (**))$$

e derivando, otteniamo  $a(**)$ ,  $a$   
integriamo l'equazione

$$\Rightarrow \ddot{r} = \sin r \cos r \dot{\varphi}^2 \quad (**)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{r}) = \ddot{r}$$

↓ tutto cruciale:  $\varphi$  è ciclica

ma  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{cost.}$

(\*\*)  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \sin^2 r \dot{\varphi} = c \quad (\text{Clairaut}) \quad r \neq 0, \pi/2$

ovv, se  $c=0$  è  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\varphi = \text{cost}$  (minimo)

e concludo come prima, per ragioni di simmetria

[ sostituendo in (\*\*), che di fatto non serve, è

$$\ddot{r} = \sin r \cos r \frac{c^2}{\sin^4 r} = \frac{\cos r c^2}{\sin^3 r} \dots ]$$

\* Piano iperbolico (Lobachevskij)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad y > 0$$

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g^{ij}) = y^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y} \quad \Gamma_{11}^2 = +\frac{1}{y} \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

i rimanenti sono nulli

si ha:

(\*)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2 \frac{\dot{x} \dot{y}}{y} & \ddot{x} + \Gamma_{12}^1 \dot{x} \dot{y} + \Gamma_{21}^1 \dot{x} \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y} & \ddot{y} + \Gamma_{11}^2 \dot{x}^2 + \Gamma_{22}^2 \dot{y}^2 = 0 \end{cases}$$

$\circ = \frac{d}{dt}$

ora  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\dot{y}} \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) =$

$\triangle$  se  $\dot{x} \neq 0$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^3} = (da(*))$$

$$= \frac{\frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y} \dot{x} - \dot{y} \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{y} \frac{\dot{y}^2 \dot{x} - \dot{x}^3 - 2\dot{y}^2 \dot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$= \frac{1}{y} \left( \frac{-\dot{y}^2 \dot{x} - \dot{x}^3}{\dot{x}^3} \right) = -\frac{1}{y} \left( \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 + 1 \right) = -\frac{1}{y} (y'^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} \equiv y'$$



Da cui

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{1}{y} (y'^2 + 1) \Rightarrow$$

$$y y'' + y'^2 = -1 \Rightarrow$$

$$(y y')' = -1 \Rightarrow$$

$$y y' = -x + A \quad (\diamond)$$

Integriamo  $(\diamond)$ :

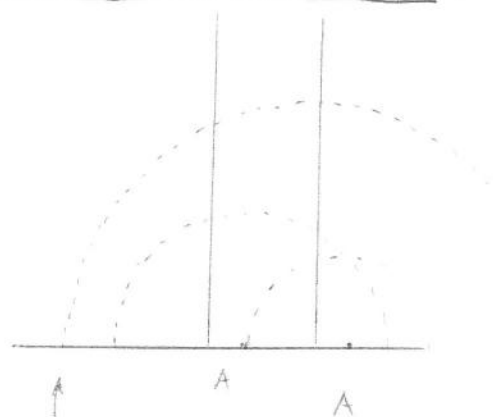
$$y dy = (-x + A) dx$$

$$\frac{1}{2} d(y^2) = (-x + A) dx$$

$$y^2 = -x^2 + 2Ax + B$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2Ax - B = 0$$

$$(x - A)^2 + y^2 = A^2 + B = c_1$$



(semi)  
circonferenze  
( $c > 0$ )

$\Delta$  Se  $x=0$  e  $x=c_1 \Rightarrow$  (semi) rette verticali

Curvatura del pinno iperbolico

viene dalla formula nota con  $E = G = 1 \quad F = 0 \quad y > 0$

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{y^2}$$

$$\log \lambda = -2 \log y$$

$$\Delta \log \lambda = -2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log y =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\log \lambda) = 0$$

$$= -2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right) = +2 y^{-2}$$

$$K = -\frac{2 y^{-2}}{2 y^{-2}} = -1$$

\* Variante (Eq. di Lagrange)

$v = \frac{d}{ds}$  lunghezza d'arco

[iperbolica!]

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (x'^2 + y'^2)$$

[cf. il teorema di Ekeland una "simmetria" dà luogo ad un principio di conservazione]

da  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  si ha  $\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{x'}{y^2} = c$  (cost.) Nota

invarianza per traslazioni  $x \mapsto x+a$

polinomio, per fissare le idee

(\*)  $x' = y^2$

se  $c=0$   
 minimo  
 $x'=0$   
 $x = \text{cost}$   
 $\Rightarrow$  (semi) rette verticali

Si ha pure (da  $g_{ij} u_i u_j = 1$ )

"conservazione dell'energia"

$$\frac{1}{y^2} (x'^2 + y'^2) = 1$$

$x'^2 + y'^2 = y^2 \Rightarrow$  (usando (\*))

$$y'^2 = y^2 - x'^2 = y^2 - y^4 = y^2(1-y^2)$$

$y > 0$

$$y' = \pm y \sqrt{1-y^2}$$

prevediamo il segno -

$$y' = -y \sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{cases} x' = y^2 \quad (= \frac{dx}{ds}) \\ y' = -y \sqrt{1-y^2} \quad (= \frac{dy}{ds}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

( $\xi \in (0, \pi)$ )

posto  $y = \sin \xi \quad dy = \cos \xi d\xi$

$$\frac{-y dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$$

$$\frac{-\sin \xi \cos \xi d\xi}{\cos \xi} = dx$$

$$dx = -\sin \xi d\xi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos \xi + a \\ y = \sin \xi \end{cases}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

**Calcolo dei simboli di Christoffel**

+ ... 0

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \underbrace{g_{11,1}}_{g_{11}=1} + \underbrace{g_{11,1}}_{=0} - \underbrace{g_{11,1}}_{=0} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0$$

Simboli di Christoffel della sfera: della g<sub>li</sub> (metrica standard)

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \cancel{g_{21,1}} + \cancel{g_{11,2}} - g_{12,1} \right) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = 0$$

$$\Gamma_{21}^1 = 0$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( \cancel{g_{21,2}} + \cancel{g_{21,2}} - g_{22,1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = -\sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( \cancel{g_{12,1}} + \cancel{g_{12,2}} - \cancel{g_{11,2}} \right) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( g_{22,1} + \cancel{g_{12,2}} - \cancel{g_{12,2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$= \cotan \vartheta$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( g_{22,2} + \cancel{g_{22,2}} - \cancel{g_{22,2}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (g_{22,2}) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^2 = 0}$$

★ Simboli di Christoffel del piano iperbolico:

deRaghi metrica:  $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \underbrace{g_{11,1}}_0 + \cancel{g_{11,1}} - \cancel{g_{11,1}} \right) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{11}^1 = 0}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \cancel{g_{21,1}} + g_{11,2} - \cancel{g_{12,1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot y^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} y^{-2} = \frac{1}{2} y^{-2} \cdot (-2) y^{-3}$$

$$= -\frac{1}{y}$$

$$\boxed{\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \cancel{g_{22,2}} + \cancel{g_{21,2}} - \underbrace{g_{22,1}}_0 \right)$$

$$= 0$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^1 = 0}$$



$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \textcircled{2} \left( \cancel{g_{12,1}} + \cancel{g_{12,1}} - \cancel{g_{11,2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} y^2 \frac{\partial}{\partial y} (y^{-2}) = -\frac{1}{2} y^2 (-2) y^{-3} = y^{-2}$$

$$\boxed{\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \textcircled{2} \left( \cancel{g_{22,1}} + \cancel{g_{12,2}} - \cancel{g_{12,2}} \right) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{12}^2 = 0}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \textcircled{2} \left( \cancel{g_{22,2}} + \cancel{g_{22,2}} - \cancel{g_{22,2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial}{\partial y} (y^{-2}) = \frac{1}{2} y^2 (-2) y^{-3} = -y^{-1}$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}}$$

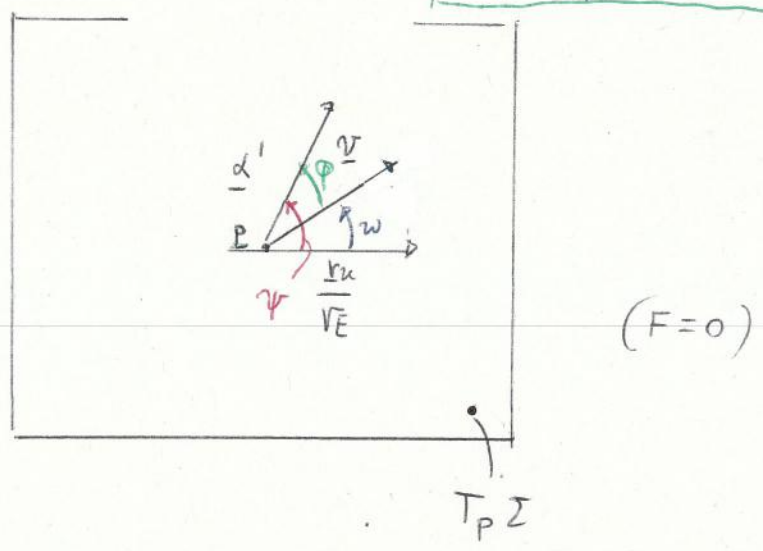
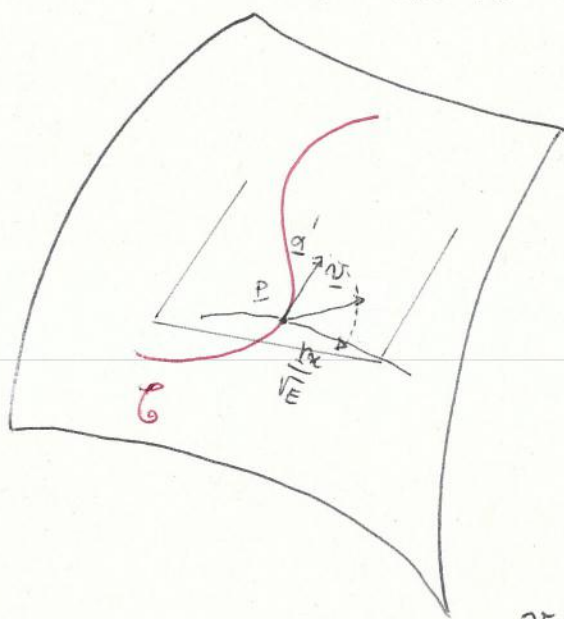
★ Lemma di Gauss

Lezione **XXV**

ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spina - UCSC, Bari

Prendiamo la discussione seguente



$v$  vettore parallelo lungo  $C$ ,  $\|v\| = 1$

Dalla figura si ha

$\psi = \varphi + \omega$ , da cui

$$\psi' = \varphi' + \omega' \quad (l = \frac{d}{ds})$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \text{Rg} \\ \uparrow \\ \text{Curvatura} \\ \text{geodetica di } C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \frac{1}{2\sqrt{E}} (E_{\nu} u' - G_{\nu\mu} v') \\ \downarrow \\ \text{velocità di variazione} \\ \text{di } v \text{ rispetto a } e_i = \frac{r_{ix}}{\sqrt{E}} \end{matrix}$$

Sia ora  $C$  una linea  $v = v_0$  (cost.)

Allora  $\psi' = 0$  e  $v' = 0$ , da cui si ottiene

$$\text{Rg} = -\omega' = -\frac{1}{2\sqrt{E}\sqrt{G}} \cdot \frac{E_{\nu}}{\sqrt{E}} \quad \alpha' = \frac{r_{ix} u'}{\sqrt{E}}$$

$$l = \|\alpha'\| = \sqrt{E} |u'| = \sqrt{E} u'$$

$$= -\frac{E_{\nu}}{2E\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\log \sqrt{E})}{\partial \nu} \quad (\text{orientando in modo naturale})$$

$$\mathcal{R}_g^{(v=v_0)} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} (\log \sqrt{E}) \quad (*)$$

Se ora le curve  $v = v_0$  sono geodetiche,

$$\varepsilon \quad \mathcal{R}_g^{(v=v_0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(x, v) = E(x)$$

(E dipende solo da  $x$ )

Consideriamo una porzione di superficie e una curva  $\mathcal{C}$  qualsiasi su di essa; a partire dai pts di  $\mathcal{C}$  spicchiamo le geodetiche

geodetiche



ortogonali a  $\mathcal{C}$ ; rispetto ad un opportuno parametro

$v^*$ , che può vedersi come parametro su  $\mathcal{C}$ , esse

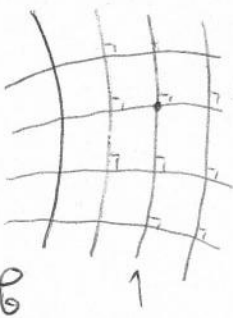
saranno fornite dalle equazioni  $v^* = c$ .

Consideriamo le loro traiettorie ortogonali

come curve  $x^* = \text{cost}$  ( $\mathcal{C}$  corrisponderà a  $x^* = a$ ).

[Queste ultime non sono necessariamente geodetiche]

In termini delle coordinate  $x^*$  e  $v^*$



si ha  $F^* = 0$  (ortogonalità) e,

in virtù delle considerazioni precedenti,

$$E^* = E^*(x^*) \quad (E^* \text{ non dipende da } v^*)$$

$\mathcal{C}$   
↑  
 $x^* = 0$     $x^* = c$

Poniamo allora

$$x = \int_0^{x^*} \sqrt{E^*(\xi)} d\xi$$

( $t$  la lunghezza d'arco su una geodetica),  $v = v^*$ .

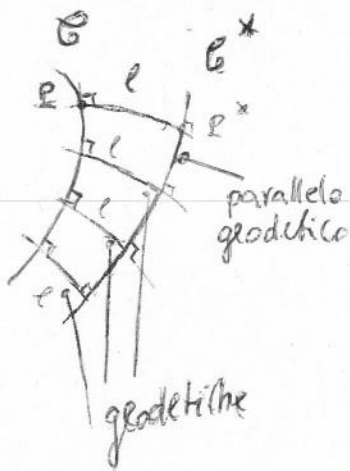
Si ottengono nuovamente coordinate curvilinee ortogonali

$$ds^2 = dx^2 + G(x, v) dv^2$$

( in particolare  $K = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^2}$  )

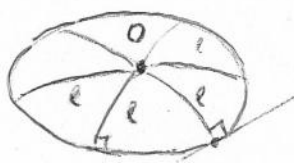
Dalla formula precedente si ha il lemma di Gauss \*

infatti, considerata la curva  $C^*$ , del tipo  $u = \text{cost.}$ , la lunghezza di un arco di geodetica  $\overline{PP^*}$  è costante

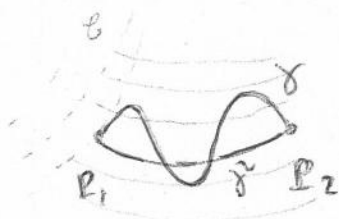


la curva  $C^*$  luogo dei punti sulle geodetiche emananti ortogonalmente da  $C$  ad una distanza fissata  $l$  (misurata tramite la metrica) è ancora ortogonale alle geodetiche ante.  $C^*$  è detta parallelo geodetico

In particolare un circhio geodetico è perpendicolare, in ogni suo punto, alla geodetica che va al pto di contatto



Se ora  $P_1$  e  $P_2$  sono punti di  $E$  congiunti da una unica geodetica  $\tilde{\gamma}$ , e costruito un sistema di coordinate geodetiche come sopra,



per la lunghezza di un arco  $\gamma$  corrispondente  $P_1$  e  $P_2$  trova

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{u}^2 + g_{22} \dot{v}^2} dt$$

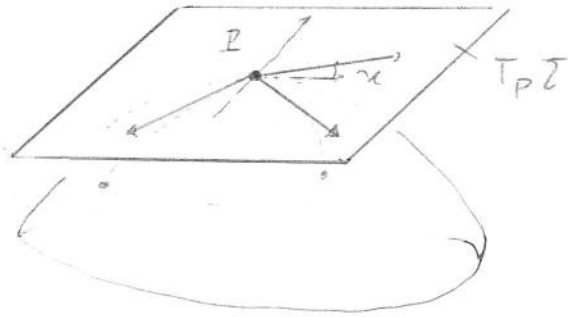
$$\geq \int_{t_1}^{t_2} \dot{u} dt = u_2 - u_1$$

Dunque, localmente una geodetica minimizza la distanza tra due punti

$E$ , se i pti sono suff. vicini,  $\exists!$  una geodetica minimizzante (Jacobi)

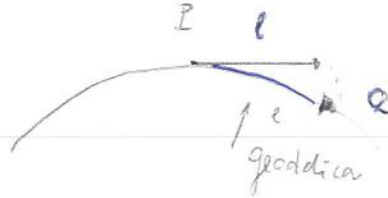
e vale  $\Leftrightarrow \dot{v} \equiv 0$ , cioè  $\gamma$  ha lo stesso sostegno della geodetica  $\overline{P_1 P_2} = \tilde{\gamma}$ .





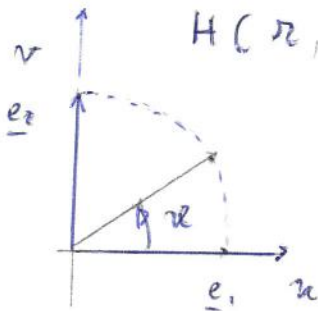
★ Applicazione,  
o mappa  
esponenziale

(.. al-Biruni.)  
X-XI sc.



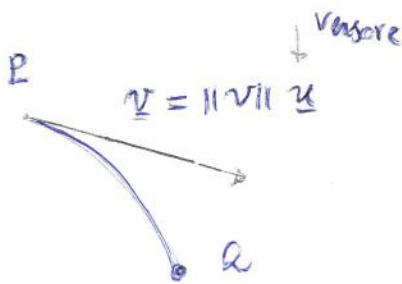
$$H(r, \nu) = \exp_P (r (\cos \nu \underline{e}_1 + \sin \nu \underline{e}_2)) \in \Sigma$$

[ per  $r$  suff. piccolo è  
un diffeomorfismo ]



$$\exp_P \nu := \gamma^{\nu}(1) = \text{2° estremo dell'arco di geodetica uscente da } P \text{ con velocità } \nu, \text{ per } s=1$$

( $s$  : ascissa curvilinea)



( $s$  : ascissa curvilinea)

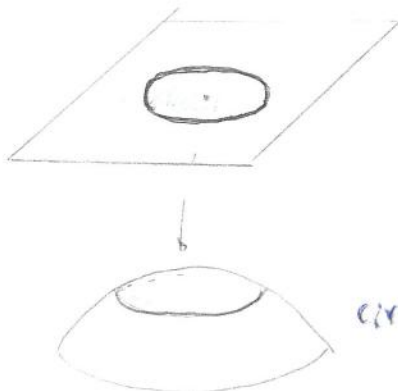
$$= \gamma^u (||\nu||)$$

(2° estremo dell'arco di geodetica uscente da  $P$  con velocità  $u$  ( $||u||=1$ ), per  $s = ||\nu||$ )

per  $s = ||\nu||$

$$C_r : \nu \mapsto H(r, \nu)$$

fisso



circonferenza geodetica di raggio  $r$  e di centro  $P$

# \* Teorema (Bertrand, Poincaré)

$$1. L(C_r^P) = \underbrace{2\pi r}_{\substack{\text{L circ.} \\ \text{euclidea}}} \left( 1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + \sigma(r^2) \right)$$

$$2. A(\tilde{C}_r^P) = \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{area} \\ \text{centro} \\ \text{"euclidea"}}} \left( 1 - \frac{K(P)}{12} r^2 + \sigma(r^2) \right)$$

↑  
cerchio geodetico

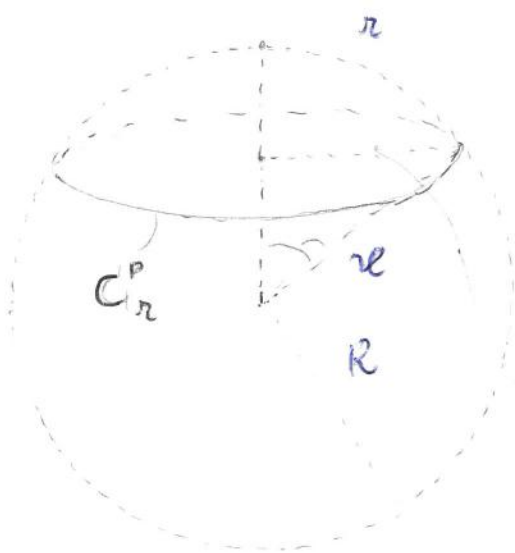
Dim. Diamo una dimostrazione (omettendo qualche dettaglio analitico) diretta, di tipo geometrico.

Approssimiamo  $\Sigma$ , in un intorno di  $P$ , con una sfera

tangente a  $\Sigma$  in  $P$  e di raggio  $R$

$$\text{con } \frac{1}{R^2} = K(P)$$

[ se  $K$  è negativo, si usi una pseudo-sfera ]



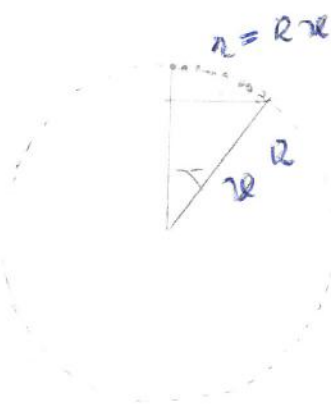
si ha:  $L(C_r^P) =$

$$2\pi R \sin r = 2\pi R \sin \frac{r}{R} =$$

$$= 2\pi R \left[ \frac{r}{R} - \frac{1}{6} \left( \frac{r}{R} \right)^3 + \dots \right]$$

$$= 2\pi r - 2\pi R \cdot \frac{1}{6} \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{R^2} + \dots$$

XXV-5 (K(P))



$$= 2\pi r - 2\pi r \cdot \frac{r^2}{6} \cdot K(\rho) + \dots$$

$$= 2\pi r \left( 1 - \frac{K(\rho)}{6} r^2 + \dots \right) \quad \text{che è la 1.}$$

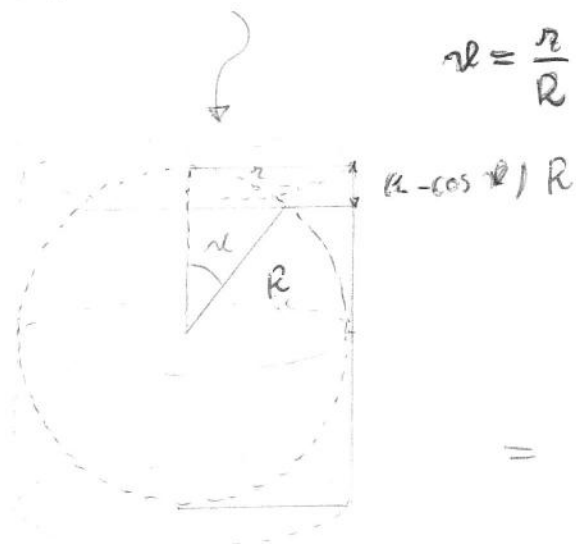
Allo stesso modo,  $A(\hat{C}_r^\rho) = \text{area calotta sferica}$

$$= \int_0^{\rho} \left( \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta = 2\pi R^2 (1 - \cos \vartheta)$$

(cf. anche il teor. di Archimede)

||

$$\rho = \frac{r}{R} \quad 2\pi R^2 \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4!} + \dots \right)$$



$$= 2\pi R^2 \left( \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^4}{4! R^4} + \dots \right)$$

$$= \pi r^2 \left[ 1 - \frac{1}{12} r^2 \cdot \frac{1}{R^2} + \dots \right]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{K(\rho)}$

$$= \pi r^2 \left[ 1 - \frac{K(\rho)}{12} r^2 + \dots \right], \quad \text{il che prova 2.}$$

\* Lemma tecnico in coordinate geodetiche polari  $(\rho, \vartheta)$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \rho} = 1$$

$$E \equiv 1$$

$$G = G(\rho, \vartheta)$$

Due

in coordinate normali

$$u^* = \rho \cos \vartheta$$

$$v^* = \rho \sin \vartheta$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} \cdot \frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(\rho, \vartheta)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{G} = \rho \sqrt{E^*G^* - F^{*2}}$$

Ora, in  $P$  ( $\rho=0, \vartheta$  arbitr.)  $E^* = G^* = 1, F^* = 0$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{G}}{\rho} = 1 \quad (\text{vedi anche la lezione successiva})$$

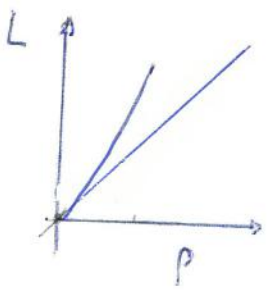
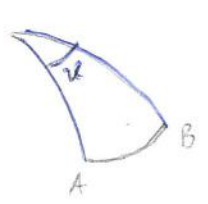
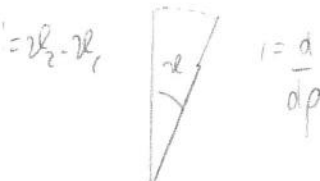
utilizzeremo ciò nel discutere la diffusione delle geodetiche (approssimo locale)

La lunghezza di un arco  $\rho = \text{cost}$ , in coord. polari è

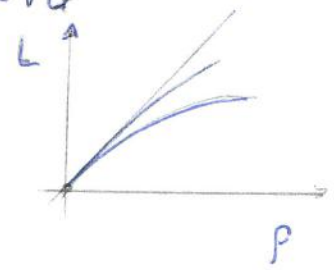
$$L(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{G} \, d\vartheta, \quad \text{successivamente è}$$

$$L'(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \rho} \, d\vartheta,$$

$$L''(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial^2(\sqrt{G})}{\partial \rho^2} \, d\vartheta = -k \sqrt{G}$$



$k < 0$   
le geod. si allontanano



$k > 0$   
inclinazione si allontanano; possono avvicinarsi

non è la dist. tra  $A$  e  $B$  in que.



Conseguenza: il flusso geodetico su una superficie a curvatura negativa è caotico (ovvero, si ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali).



\* Conseguenza remota: l'impossibilità di predizioni meteorologiche precise di lungo termine.

Le fasi stadi dell'atmosfera costituiscono i pt. di una varietà riemanniana di dimensione infinita, e la dinamica può interpretarsi come flusso geodetico di una corta metrica. Tale varietà ha curvatura (sezionale) generalmente negativa (V. I. Arnold)

## ★ Teorema di Minding

Due superficie con la stessa curvatura costante  
sono localmente isometriche

Dica. Parliamo da

$$(\sqrt{G})_{pp} + K \sqrt{G} = 0 \quad (\text{coord. polari})$$

↑  
costante

e ricordiamo che (\*)  $\lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$  ,  $\lim_{p \rightarrow 0} (\sqrt{G})_p = 1$

Abbiamo tre casi:

1.  $K = 0$       $\sqrt{G} = p + f(\vartheta)$  , ma da (\*) si ha  $f(\vartheta) \equiv 0$

$\Rightarrow E = 1, F = 0, G(p, \vartheta) = p^2$       $ds^2 = dp^2 + p^2 d\vartheta^2$   
piatto

2.  $K > 0$

$$\sqrt{G} = A(\vartheta) \cos(\sqrt{K} p) + B(\vartheta) \sin(\sqrt{K} p)$$

ma (\*) implica  $A(\vartheta) \equiv 0$  e (\*\*) da'  $B(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{K}}$

$\Rightarrow E = 1, F = 0, G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K} p)$       $\Rightarrow$  loc. sfera di raggio  $\frac{1}{\sqrt{K}}$

3.  $K < 0$       $\sqrt{G} = A(\vartheta) \cosh(\sqrt{-K} p) + B(\vartheta) \sinh(\sqrt{-K} p)$

$\Rightarrow E = 1, F = 0, G = -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K} p)$   
 $\sim$  loc. pseudosfera

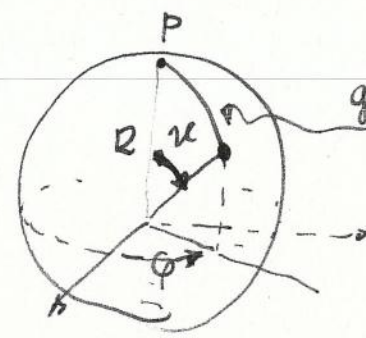
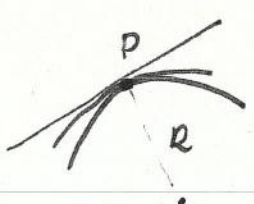
\* On normal coordinates

dim = 2

Lezione XXVI  
APPENDICE AUA XXV

ELEMENTI DI  
GEOMETRIA  
DIFFERENZIALE  
Prof. MANTO Spina  
UCSC - Brescia

(calling  $K = K(E_1, \dots, E_n, \dots, E_n, \dots)$ ) one can work on a (pseudo) sphere of radius  $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$



(let  $K > 0$  to fix ideas)

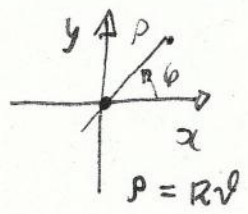
\* geodesic polar coordinates

$$ds^2 = R^2 dr^2 + R^2 \sin^2 r d\phi^2$$

$$\begin{cases} x = Rr \cos \phi \\ y = Rr \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi = \arctan \frac{y}{x} \\ r = \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

normal coordinates



now (crucial remark)

$$\sin^2 r = \left( r - \frac{r^3}{6} + \dots \right)^2$$

$$= r^2 - \frac{1}{3} r^4 + \dots$$

Therefore

$$ds^2 = \underbrace{R^2 dr^2 + R^2 r^2 d\phi^2}_{\text{euclidean polar coordinates}} - \frac{1}{3} R^2 r^4 d\phi^2$$

||  
 $dx^2 + dy^2$

(◇)

compute ( $\diamond$ )

$$d\phi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

$$- \frac{1}{3} R^2 \frac{1}{R^2} \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} (x dy - y dx)^2$$

$$= - \frac{1}{3} \frac{1}{R^2} \underbrace{\quad}_K (y^2 dx^2 - 2xy dx dy + x^2 dy^2)$$

$$\Rightarrow (ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j)$$

\* metric in normal coordinates

$$\begin{cases} g_{11} = E = 1 - \frac{1}{3} K y^2 \\ g_{12} = g_{21} = F = \frac{2}{3} K xy \\ g_{22} = G = 1 - \frac{K}{3} x^2 \end{cases}$$

notice the off-diagonal term, depending on K

The argument holds in general

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjc} x^k x^l + \dots \quad (\text{plane } (R, e))$$

cf Prop 1.28 in  
Burbine - Bretzler - Vergne

sum over k and l  
(Einstein's convention)

\* This clearly shows that curvature is the obstruction against existence of a "Cartesian" coordinate system on a surface, i.e. curvilinear coordinates  $u, v$  such that  $ds^2 = du^2 + dv^2$



# GEOMETRIA II

## Formulazio

### ★ CALCOLO VETTORIALE

- vettori geometrici

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

coordinate cartesiane  
(ortogonali)

- prodotto scalare

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

$$\|\underline{a}\| := \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{lunghezza (norma)} \\ \text{di } \underline{a}$$

- angolo tra  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|}$$

$\underline{a} \neq \underline{0}$   
 $\underline{b} \neq \underline{0}$

- ortogonalità:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$$

- prodotto vettoriale

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| |\sin \alpha| = \left( \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{a} \parallel \underline{b} \quad (\underline{a}, \underline{b} \text{ l.o.d.}) \quad : \quad \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$$

(parallelismo)

- prodotto misto

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \langle \underline{a}, \underline{b} \times \underline{c} \rangle \\ \equiv |\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}|$$

- complanarità

di  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \times \underline{c} \rangle = 0$$

( $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  l.o.d.)

### ★ CURVE

$$\underline{r} = \underline{r}(t)$$

$$t \in I$$

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\dot{\underline{r}} \neq \underline{0}$$

curve regolari

- lunghezza d'arco

$$ds = \|\dot{\underline{r}}\| dt$$

$$/ = \frac{d}{ds}$$

$$\|\dot{\underline{r}}'\| = 1$$

$$\underline{t} = \underline{r}' = \frac{\dot{\underline{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|} \quad \text{versore tangente}$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}''}{\|\underline{r}''\|} \quad \|\underline{r}''\| = \kappa \quad \text{curvatura}$$

• normale principale

$\kappa > 0$ : birregolarità

• versore binormale

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$$

formule di Frenet:

$$\begin{cases} \underline{t}' = \kappa \underline{n} \\ \underline{n}' = -\kappa \underline{t} - \tau \underline{b} \\ \underline{b}' = \tau \underline{n} \end{cases}$$

$\tau$ : torsione

• Formule generali per  $\kappa$  e  $\tau$

$$\kappa = \frac{\|\underline{r}' \times \underline{r}''\|}{\|\underline{r}'\|^3} = \frac{\left[ \|\underline{r}'\|^2 \|\underline{r}''\|^2 - \langle \underline{r}', \underline{r}'' \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\|\underline{r}'\|^3}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \quad \text{• raggio di curvatura}$$

curva piana:  $\kappa = \frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$   
con segno

$$\tau = \langle \underline{b}', \underline{n} \rangle = \frac{|\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}''''|}{\underbrace{\|\underline{r}''\|^2}_{\kappa^2}} = \frac{|\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}''''|}{\left( \|\underline{r}'\|^2 \|\underline{r}''\|^2 - \langle \underline{r}', \underline{r}'' \rangle^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}'''' \rangle}{\|\underline{r}' \times \underline{r}''\|^2}$$

• Sfera osculatrice

$$C = P + \rho \underline{n} + \frac{\rho'}{\tau} \underline{b} \quad \tau \neq 0$$

centro

$$R = \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{\rho'}{\tau} \right)^2}$$

raggio

★ SUPERFICIE

$\Gamma = \Gamma(x, y)$   
 $(x, y) \in \mathcal{R}$  regione

$\underline{N} = \frac{\underline{r}_x \times \underline{r}_y}{\|\underline{r}_x \times \underline{r}_y\|}$

$\underline{r}_x \times \underline{r}_y \neq \underline{0}$   
 (regolarità)

• forme fondamentali

I  $\begin{cases} E = \langle \underline{r}_x, \underline{r}_x \rangle \\ F = \langle \underline{r}_x, \underline{r}_y \rangle \\ G = \langle \underline{r}_y, \underline{r}_y \rangle \end{cases}$       II  $\begin{cases} e = \langle \underline{r}_{xx}, \underline{N} \rangle \\ f = \langle \underline{r}_{xy}, \underline{N} \rangle \\ g = \langle \underline{r}_{yy}, \underline{N} \rangle \end{cases}$

$\frac{\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_x \times \underline{r}_y \rangle}{\|\underline{r}_x \times \underline{r}_y\|}$

$\frac{\langle \underline{r}_{xx}, \underline{r}_x \times \underline{r}_y \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}$

$\frac{\langle \underline{w}, \underline{S} \rangle}{\|\underline{w}\|^2}$

II ( $\underline{w}$ )  
 $\frac{\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{w}\|^2}$

$= R_m$

$\frac{e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2}{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2}$

$\sqrt{EG - F^2}$   
 ecc.

$\underline{w} \in T_p \Sigma$   
 $\neq \underline{0}$

curvatura normale nella direzione determinata da  $\underline{w}$

$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$

• curvatura gaussiana  
 $= \kappa_1 \kappa_2$

$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2)$

• curv. principali

$d\underline{x} = \underline{r}_x \dot{u} + \underline{r}_y \dot{v}$

• curvatura media

$R_m = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta$

Eulero

• curvatura principali:  $\kappa_i^2 - 2H \kappa_i + K = 0$

• linee di curvatura (direzioni principali)

$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u} \dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$

• linee asintotiche (direzioni asintotiche)

$e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2 = 0$

★ Formule di Weingarten

$m_{\beta\beta}(\underline{S}) = \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial x^\beta} \cdot \underline{S}$

$\begin{pmatrix} \frac{eG - fF}{EG - F^2} & \frac{fG - gF}{EG - F^2} \\ -\frac{eF + fE}{EG - F^2} & \frac{gE - fF}{EG - F^2} \end{pmatrix}$

★ operatore di forma

$F = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & +\frac{f}{F} \\ +\frac{f}{G} & \frac{g}{G} \end{pmatrix}$

• Simboli di Christoffel

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

$i, j, k = 1, 2$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right)$$

elementi della matrice inversa di  $(g_{ij})$

\* convenzione di Einstein

[qui si somma su  $h = 1, 2$ ]

• equazione del trasporto parallelo

$$\dot{w}^i + \Gamma_{kh}^i w^k w^h = 0 \quad i=1, 2$$

• equazione delle geodetiche

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{kh}^i \dot{x}^k \dot{x}^h = 0 \quad i=1, 2$$

• Equazioni di Lagrange

nel nostro caso

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$\Rightarrow$  eq. geodetica

se  $\bullet = / = \frac{d}{ds}$

$$g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1 \quad \text{"conservazione dell'energia"}$$

se  $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$  ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cost}$  (integrale primo)

• Formula ricci per la curvatura

se  $F=0$   $K = - \frac{1}{2\sqrt{E_G}} \left[ \left( \frac{E_v}{\sqrt{E_G}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{E_G}} \right)_u \right]$