ALCUNI ASPETTI DELLA MATEMATICA ANTICA

Prof. Mauro Spera

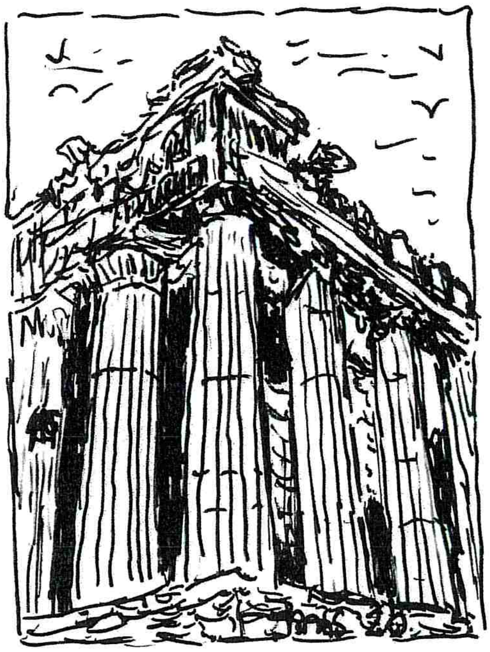
"Minicorso Viganò"

I. La matematica ellenistica: uno sguardo d'insieme sulla metodologia. Euclide

II. Le coniche (Apollonio e predecessori)

III. Archimede

Lo scopo del corso, oltre a quello di esaminare metodi generali e aspetti specifici della matematica greca antica traendo ispirazione da ricerche recenti (Russo, Acerbi, Netz), è anche quello di attirare l'attenzione degli studenti sull'immenso patrimonio culturale costituito dalla Biblioteca di Storia della Scienza "Carlo Viganò"



a.a. 2020/21

matematica ellenica

matematica ellenistica

~600 a.C — ~450 a.C — 300 a.C. — 1872

TALETE — **PITAGORA** — **PARMENIDE** — **ZENONE** — **DEMOCRITO** — **TEETETO** — **EUDOSSO** — **EUCLIDE** — **DEDEKIND**

PITAGORA
- Il numero come essenza materiale
- crisi degli irrazionali

PARMENIDE
- geometria "razionale"

ZENONE
- Dimostr. per assurdo
- paradossi della continuità
- serie geometrica

DEMOCRITO
- grandezze "non archimedee"
- problematicità dell'infinitesimo
- volume della Piramide e del cono

TEETETO / EUDOSSO
- antiferesi (frazioni continue)
- logistica?

EUCLIDE — ELEMENTI
- Teoria delle proporzioni
- algoritmo euclideo
- metodo di esaustione

DEDEKIND
- sezioni di Dedekind
- lemma di esaustione
- esempi: sviluppi decimali, criterio di integrabilità etc.
- numeri reali

- nascita del concetto di rapporto e sua problematicità
- il rapporto non è universalmente definibile
- rapporto come algoritmo
- assiomatizzazione del concetto di rapporto (continuità)

RIVOLUZIONE SCIENTIFICA ELLENISTICA
- geometria come sistema ipotetico-deduttivo
- concetto di modello teorico
- tecnologia scientifica
- filosofia della natura / scienza della natura • nominalismo

---

crisi e rivoluzioni

snodi concettuali

risultati tecnici algoritmi

ILLUMINISMO IONICO
la natura è intelligibile
distinzione tra soggetto e oggetto

RAZIONALISMO METAFISICO
verità: razionalità al di là e contro i sensi

RAZIONALISMO CRITICO
scienza: epinione vera accompagnata da ragione

PLATONISMO
fiducia nella matematica
dottrina delle idee: loro realtà
• essenzialismo
scienza: salvare i fenomeni

Arnol'd: "un emisfero del cervello vede, l'altro calcola. La geometria consiste nel loro uso contemporaneo"

LA RIVOLUZIONE SCIENTIFICA ELLENISTICA

- primo ellenismo (periodo aureo)
- conquista romana
- secondo ellenismo (periodo imperiale)

~300 ac — ~125 a.c. — ~140 d.c. — 415 dc

DIOFANTO
IPAZIA

EUCLIDE ARCHIMEDE (287-212 ac)
ARISTARCO
ERATOSTENE APOLLONIO (250-190 a.c.)
CONONE IPPARCO
CTESIBIO SELEUCO

TOLOMEO
ERONE PAPPO
TEONE

- Alessandria, Rodi
- Opere pubbliche
- esplorazioni

PERIODO AUREO caratteri generali

- modello teorico
- i concetti sono segni delle cose (costruzioni culturali) non la realtà di queste (nominalismo vs essenzialismo
- il rigore importante di per sé, ma anche garanzia di comunicabilità
- matematica applicata, oltre che pura
- "costruttivismo" della matematica ellenistica (riga e compasso ecc.)

PERIODO IMPERIALE

Si offusca il concetto di modello teorico, rimane quello di algoritmo (da usare senza "capire"); ritorno all'essenzialismo

scarsa originalità

PERIODO AUREO altri aspetti

- Teodosio, Menelao geometria "intrinseca" ("non euclidea
- Crisippo logica simbolica
- Filone di Bisanzio balistica; metodo sperimentale "caos"
- altre scienze
- tecnologia scientifica

* Euclide

• Elementi

I   Triangoli
    parallelismo
    (V postulato usato da I.29)
    teoria dell'estensione
    (nel piano)

II   "algebra geometrica"

III   circonferenze

IV   poligoni reg.

V   teoria delle proporzioni

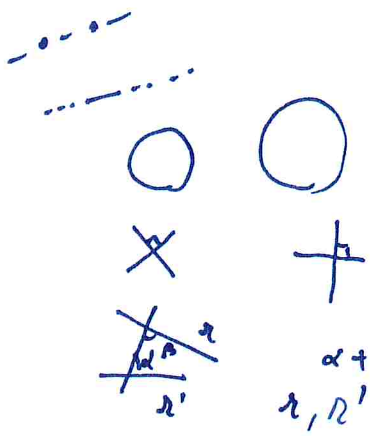
VI   similitudine

VII   aritmetica
VIII   (alg. di Euclide, T.F.Ar)
IX
X

XI   geometria dello spazio
XII   piramidi, coni   metodo di esaustione
XIII   solidi platonici

I cinque postulati

I
II
III
IV
(V)



$\alpha + \beta < \pi \Rightarrow$
r, r' si intersecano

equivalente a Playfair

idealizzano
le operazioni
del disegno

l'ultimo è problematico

• Data
• Ottica, catottrica
• Fenomeni
(Coniche?)

* assioma:
  teorema assunto come
  vero

* postulato:
  costruzione assunta
  come possibile

  v. anche Byrne

Nella matematica attuale
non si fa distinzione tra
assiomi e postulati

Struttura generale di una proposizione

v. Acerbi
Netz

teorema o problema

Proclo
1. Enunciato (πρότασις - protasis)
2. Esposizione (ἔκθεσις - exthesis)
3. Determinazione (διορισμός - diorismos)

4. Costruzione (κατασκευή - kataskeuē)

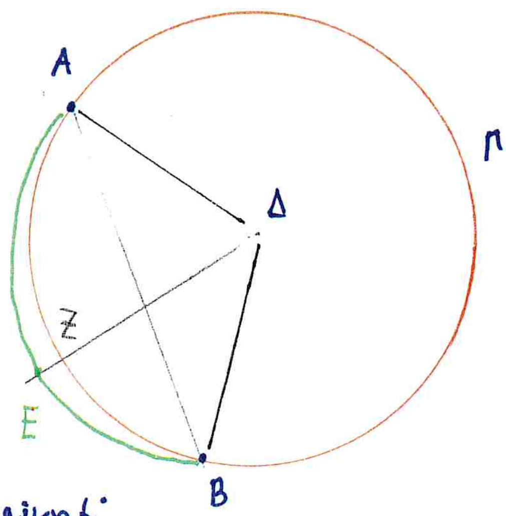
[5. anafora] "riferimento"

Proclo
6. Dimostrazione (ἀπόδειξις - apodeixis)
7. Conclusione (συμπέρασμα - sumperasma)

Esempio: Elementi III.2

" Il segmento AB "corda" è interno al cerchio "

Qualora sulla circonferenza di un cerchio siano presi due punti come càpita, la retta congiunta ai punti cadrà all'interno del cerchio [È un teorema]



Ἐὰν κύκλου (cerchio) ἐπὶ τῆς περιφερείας (circonferenza) ληφθῇ (presi) δύο τυχόντα (come capita) σημεῖα (punti), ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη (congiunti) εὐθεῖα (retta) ἐντὸς (dentro) πεσεῖται (cade) τοῦ κύκλου

Testo greco (Heiberg)

Per assurdo, il segmento AEB sia esterno al cerchio

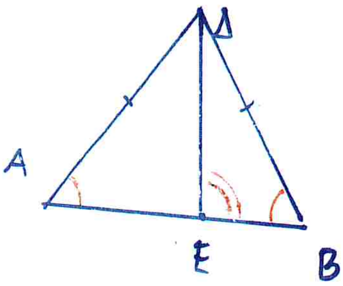
dimostrazione "moderna"

No infatti, se possibile cada all'esterno come AEB
[Ci si riferisca alla figura]

ora $\Delta A = \Delta B$, pertanto $\Delta \hat{A} E = \Delta \hat{B} E$ (I.5)

E $\Delta \hat{E} B > \Delta \hat{A} E$ (I.16)

teorema dell'angolo esterno



$\Rightarrow \quad \Delta \hat{E} B > \Delta \hat{B} E$

e (I.18) $\Delta B > \Delta E$

Ma $\Delta Z = \Delta B > \Delta E$ ma $\Delta Z < \Delta E$: assurdo

Similmente si dimostra che E non può trovarsi sulla circonferenza

1. Enunciato

v. Acerbi per il testo originale e la traduzione (letterale)

2. Esposizione : Sia un cerchio ABΓ, e sulla sua circonferenza siano presi due punti come capita, A, B

3. Determinazione : dico che la retta congiunta da A fino a B cadrà all'interno del cerchio

4. Costruzione : No infatti, ma se possibile cada all'esterno come AEB, e sia preso il centro del cerchio ABΓ, e sia Δ, e siano congiunte ΔA, ΔB e sia condotta oltre una ⟨retta⟩ ΔZE

5. Anafora : Poiché dunque ΔA è uguale a ΔB, anche l'angolo ΔAE è quindi uguale a ΔBE; e poiché risulta prolungato avanti un solo lato AEB di un triangolo ΔAE, l'angolo ΔEB è quindi maggiore di ΔAE

6. Dimostrazione: E ΔAE è uguale a ΔBE:
ΔEB è quindi maggiore di ΔBE.
E sotto l'angolo maggiore si tende il lato maggiore: ΔB è quindi maggiore di ΔE. E ΔB è uguale a ΔZ. ΔZ è quindi maggiore di ΔE, la minore della maggiore; il che è impossibile. Non si darà quindi il caso che la retta congiunta da A a B cada all'esterno del cerchio. Del tutto similmente dimostreremo che neanche sulla circonferenza stessa: quindi all'interno

7. Conclusione ripete l'enunciato

(R. Netz)

Riformulazione:

non viene introdotta l'anafora (seguendo Proclo)

- protasis: $C(x) \to P(x)$
- ekthesis: $C(a)$
- diorismos $P(a)$ ("dico che")
- kataskenē & apodeixis: $C(b) \dots C(n)$, $P(b) \dots P(a)$
  (nesso necessario tra $C(a)$ e $P(a)$)
- sumperasma: $C(x) \to P(x)$ "quindi"

* l'ekthesis + diorismos dimostra il sumperasma

Così viene gestito il problema della generalità di un'argomentazione nella matematica greca.

* Pappo (III sec d.C)

Trad: Acerbi

Analisi e sintesi

(Collectio VII.1)

"Analisi è invero un percorso da ciò che è cercato come concesso tramite i conseguenti successivi fino ad un qualcosa di concesso per sintesi: nell'analisi, infatti, supponendo come realizzato ciò che è cercato investighiamo ciò da cui questo consegue e di nuovo il preantecedente di quello, fino a che, procedendo così a ritroso, perveniamo a qualcosa di già noto o che ha ruolo di principio; e chiamiamo tale procedura analisi, come se fosse una soluzione all'indietro.

Nella sintesi invece, per converso, ciò che nell'analisi fu preso come ultimo lo assumeremo come già realizzato, e disponendo secondo natura come conseguenti quelli che lì ‹erano› preantecedenti e connettendoli tra loro, giungiamo al compimento della costruzione di ciò che è cercato: e questo chiamiamo sintesi.

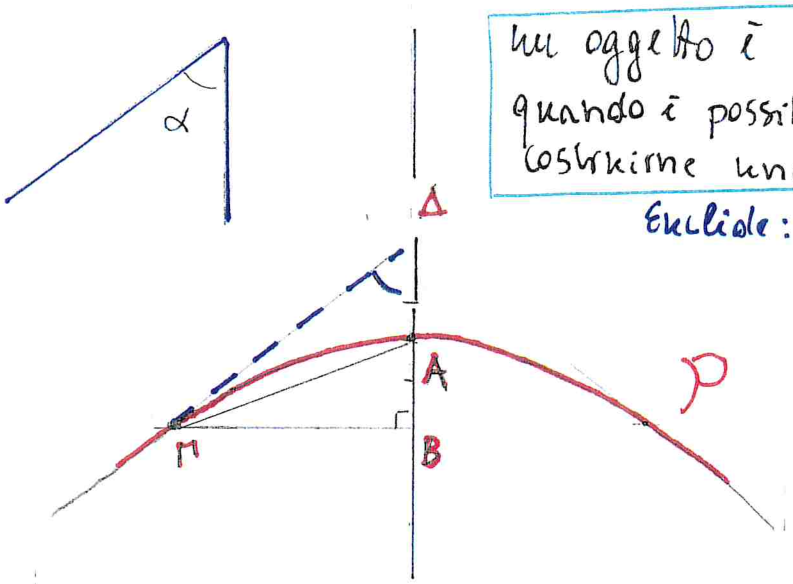
C'è un duplice genere di analisi:
quello che cerca il vero, che è chiamato teorematico
e quello che produce ciò che è stato proposto, che
è chiamato problematico.
Nel genere teorematico, supponendo ciò che
è cercato come sussistente e come vero,
procedendo poi tramite i conseguenti successivi
come veri e come sono per ipotesi fino a
qualcosa di concesso, qualora quel concesso
sia vero, sarà vero anche ciò che è cercato,
e la dimostrazione conversa dell'analisi,
mentre qualora ci imbattiamo in una falsità
riconosciuta, sarà falso anche ciò che è cercato.
Nel genere problematico invece, supponendo
ciò che è proposto come noto, procedendo poi
tramite i conseguenti successivi come veri
fino a qualcosa di concesso, qualora ciò che
è concesso sia possibile e producibile -
ciò che i matematici chiamano dato - sarà
possibile anche ciò che è proposto, e
di nuovo la dimostrazione conversa

dell'analisi, e qualora ci imbattiamo in un'impossibilità riconosciuta, sarà impossibile anche il problema

[E determinazione è la distinzione preliminare
διορισμός
del quando e come e quante volte è possibile il problema]

✦ **Conica II.50**
(problema)
caso della parabola

Cf. Conica e F. Acerbi



Un oggetto è dato quando è possibile costruirne uno uguale
Euclide: Data, def 1

Data 𝒫
Costruire ΔΓ tangente a 𝒫 in modo che
$\Gamma\hat{\Delta}B = \alpha$ (dato)
(AB : asse di 𝒫)

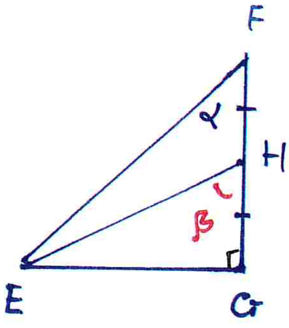
✦ **Analisi:** Si trovi ad essere: $B\Delta\Gamma$ è dato. Sia $B\Gamma \perp AB$

$\hat{B}$ è dato (è retto) $\Rightarrow$

$\frac{\Delta B}{B\Gamma}$ è dato. Ma $\frac{B\Delta}{BA}$ è dato

$\Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma}$ è dato

Pertanto $B\hat{A}\Gamma$ è dato ⇐ Ciò risulterà cruciale nella sintesi



Ma BA è in posizione, e A è in posizione
$\Rightarrow$ ΓA è in posizione. Ma 𝒫 è in posizione.
Pertanto Γ è dato. E ΓΔ è tangente sicché
ΓΔ è in posizione

✦ **Sintesi** Con riferimento alla figura, sia $E\hat{F}G = \alpha$
e sia $FH = HG$.
⟹ Su 𝒫 si costruisca $B\hat{A}\Gamma = E\hat{H}G \ (= \beta)$

(con $\hat{B}$ retto). Sia poi, sull'asse, $\Delta A = AB$.

☆ La retta ΔM è tangente a $\mathcal{P}$ in M (Conica I.35)

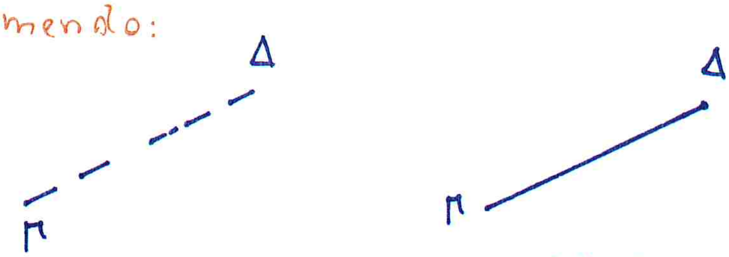
Dimostriamo che $M\hat{\Delta}B = E\hat{F}G$ $(=\alpha)$:

(2=) $\dfrac{FG}{GH} = \dfrac{\Delta B}{AB}$ e $\dfrac{HG}{GE} = \dfrac{AB}{BM}$. Pertanto

$$\frac{FG}{GE} = \frac{\Delta B}{BM}$$

Ma $\hat{G} = \hat{B} = \text{retto} \Rightarrow \hat{F} = \hat{\Delta}$

Riassumendo:



costruzione supposta possibile $\xrightarrow{\text{Analisi}}$ ΔM è in posizione

L'oggetto dato è potenzialmente costruibile (e si avrebbe esistenza e unicità)

L'argomento appare circolare: non lo è poiché i predicati di ΔM sono differenti.

La sintesi è necessaria ed è suggerita dall'analisi (costruzione + giustificazione)

↓ riferimento a Conica I.35