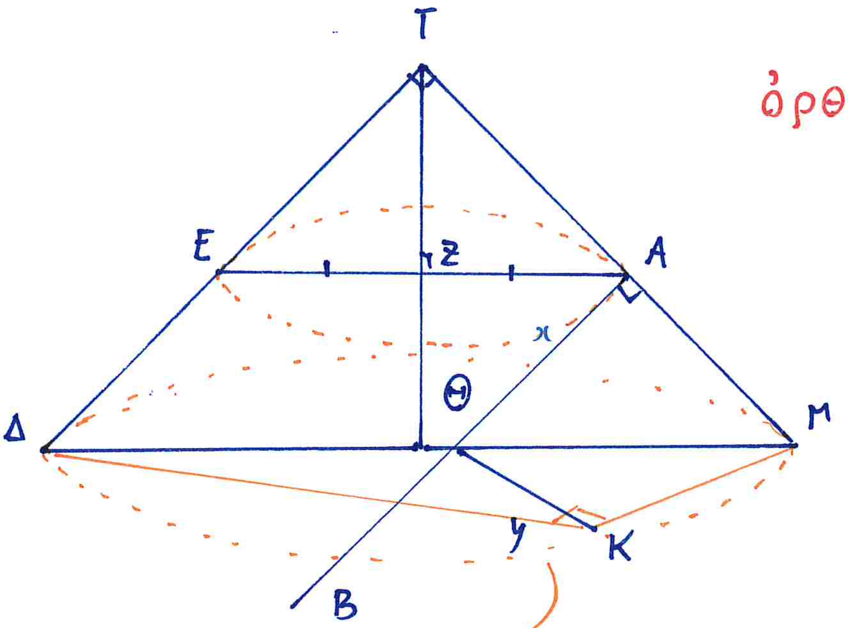
# ✝ Teoria pre-apolloniana delle coniche
## (Menecmo, Aristeo, Euclide (?), Archimede)

(cf. Dijksterhuis)




ὀρθογωνίου κώνου τομή

"orthotome"

(parabola)

↓ 2° teorema di Euclide

$$K\Theta^2 = \Gamma\Theta \cdot \Delta\Theta = \Gamma\Theta \cdot 2AZ$$

I triangoli $\Gamma\Theta A$ e $TAZ$ sono simili:

$$\frac{\Gamma\Theta}{\Theta A} = \frac{TA}{AZ} \Rightarrow \boxed{K\Theta^2 = 2TA \cdot \Theta A}$$

$$y^2 = p \cdot x$$

proprietà caratteristica

σύμπτωμα

"doppio della retta fino all'asse"

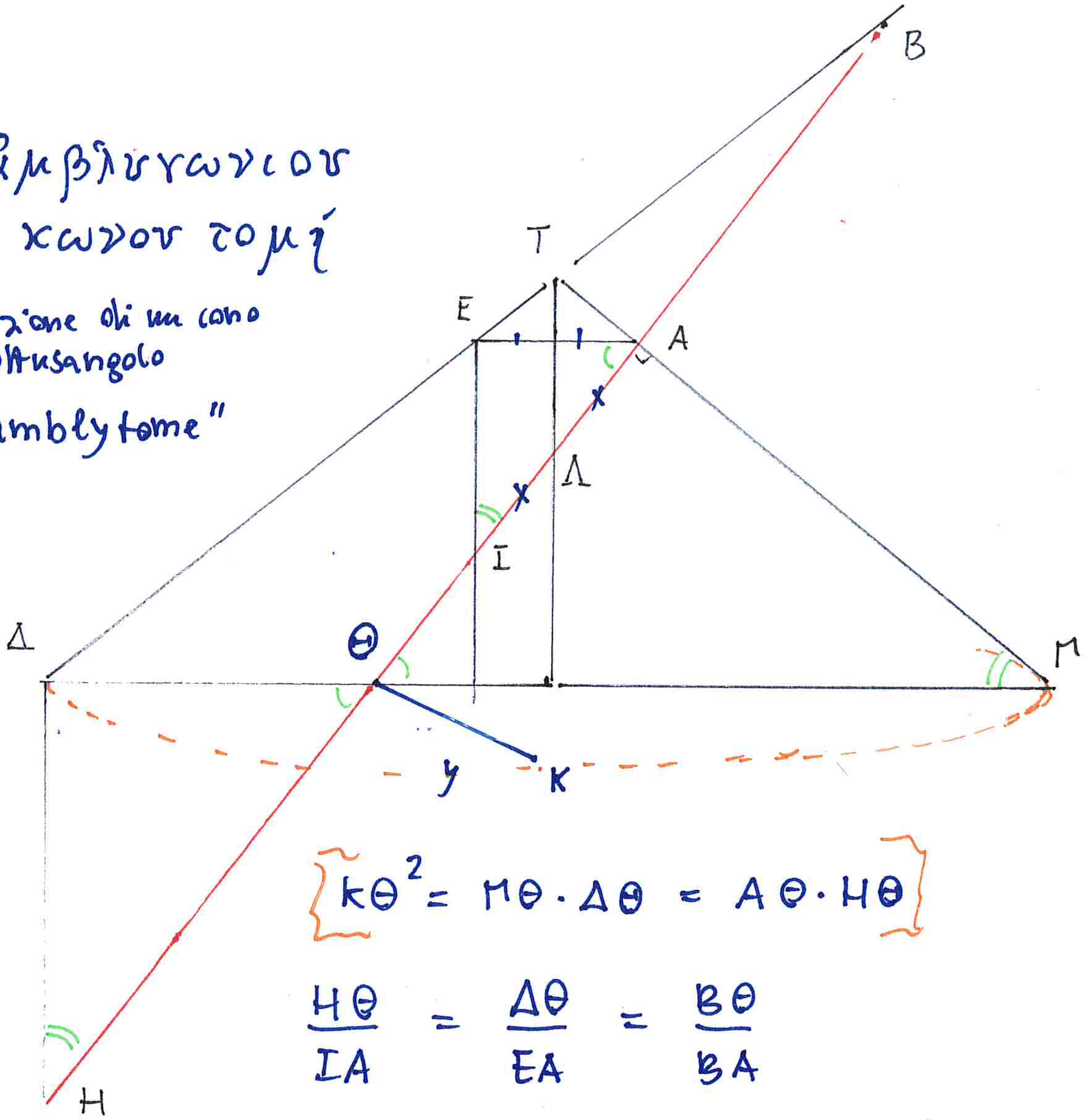
ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος

(Archimede)

ἀμβλυγωνίου κώνου τομή

sezione di un cono ottusangolo

"amblytome"




$$\boxed{K\Theta^2 = M\Theta \cdot \Delta\Theta = A\Theta \cdot H\Theta}$$

$$\frac{H\Theta}{IA} = \frac{\Delta\Theta}{EA} = \frac{B\Theta}{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{H\Theta}{B\Theta} = \frac{IA}{BA}$$

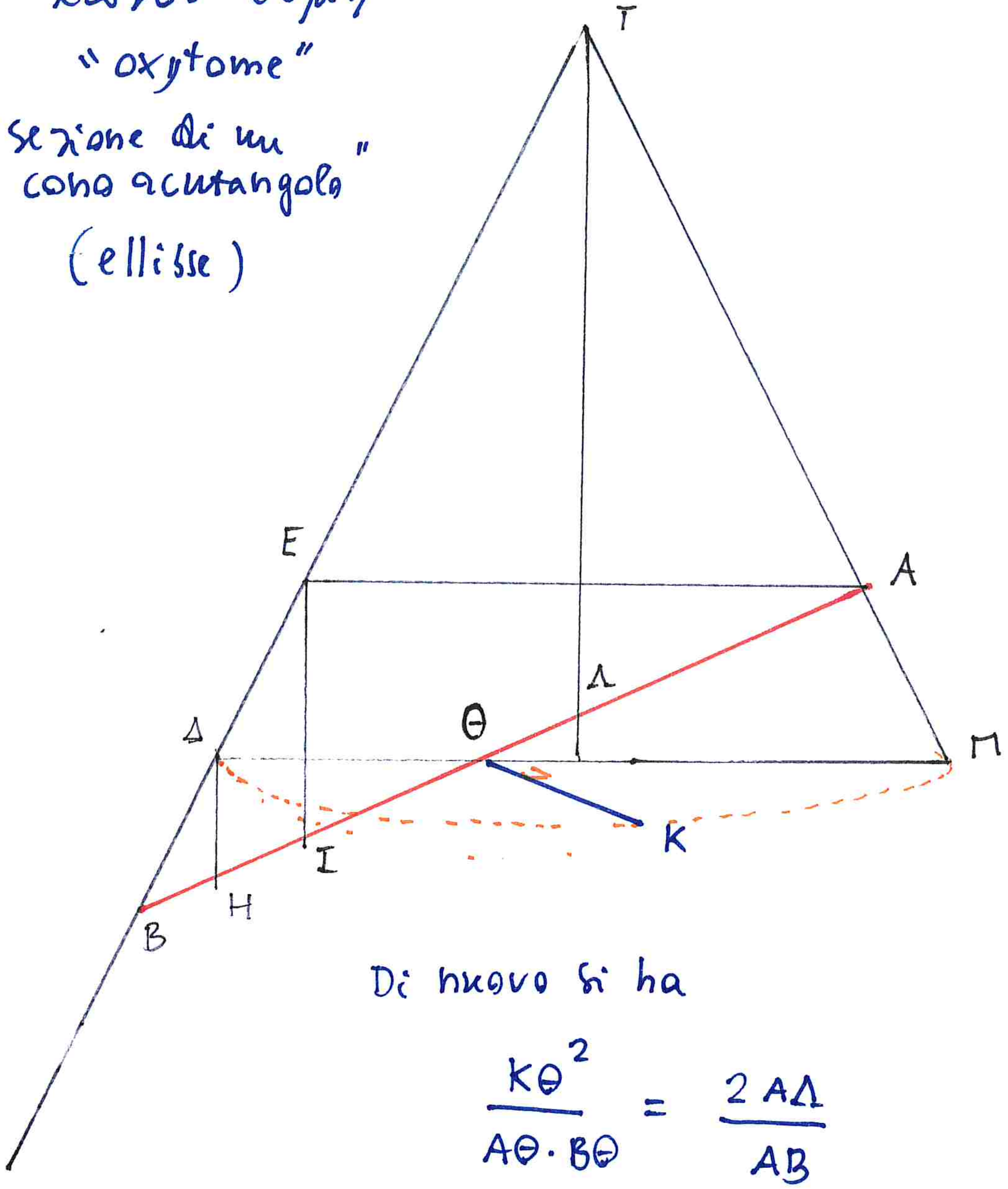
$$\frac{A\Theta \cdot H\Theta}{A\Theta \cdot B\Theta} = \frac{IA}{BA} = \frac{2A\Lambda}{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{K\Theta^2}{A\Theta \cdot B\Theta} = \frac{2A\Lambda}{BA}}$$

$K\Theta = y$
$A\Theta = x_1$
$B\Theta = x_2$
$2A\Lambda = p$
$AB = a$

$$\boxed{\frac{y^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{p}{a}}$$

ὀξυγωνίου
κώνου τομή
"oxytome"
"sezione di un
cono acutangolo"
(ellisse)




Di nuovo si ha

$$\frac{K\Theta^2}{A\Theta \cdot B\Theta} = \frac{2\,A\Delta}{AB}$$

(e $$\frac{y^2}{x_1 x_2} = \frac{p}{a}$$ )

* Apollonio

* Coniche (8 libri) ΚΩΝΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΑ

I – IV esistenti in greco Halley Heiberg

V – VII in arabo

VIII perduto (parzialmente ricostruito da E. Halley)

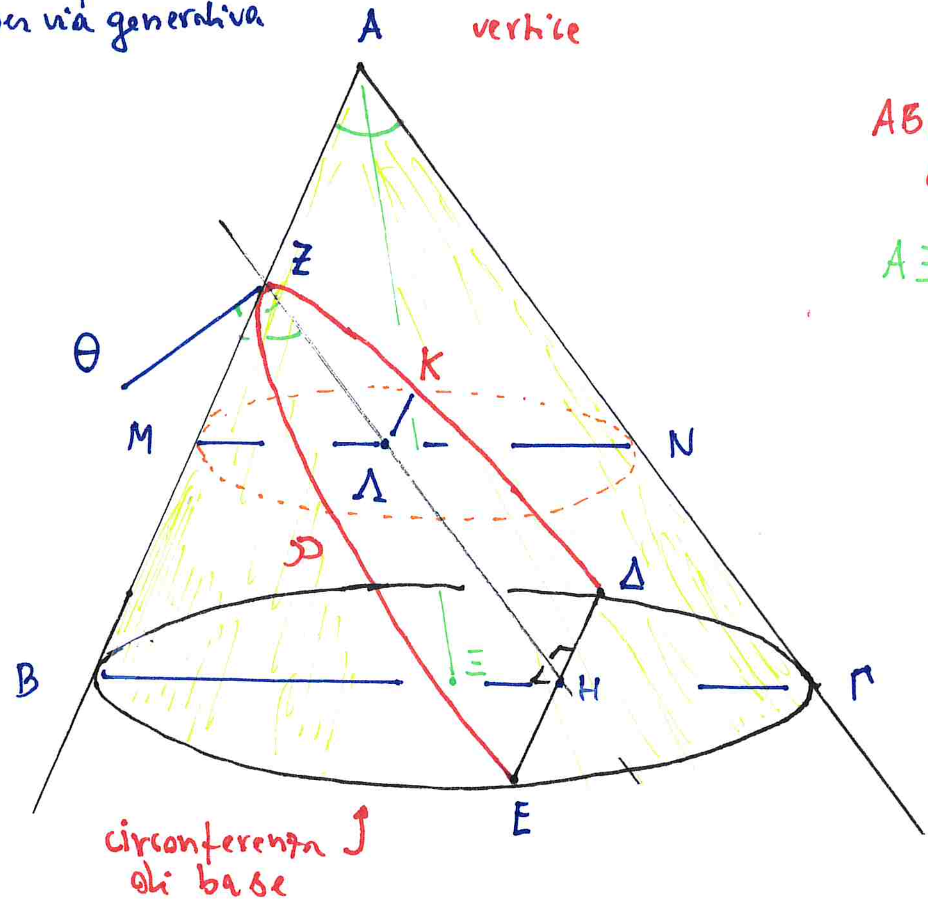
- Determinazione di un rapporto
  λόγου ἀποτομή
- Determinazione di un'area
  χωρίου ἀποτομή
- Sezioni determinate
  διωρισμένη τομή
- Sulle tangenti (ἐπαφαί)
- Luoghi piani
- Sulle inclinazioni νεύσεις

Equivalenza tra moto circolare uniforme eccentrico e moto epicicloidale

# Conica I.11 : costruzione della parabola

proprietà caratteristica — παραβολή

conìche: definite come sezioni di un cono (circolare) obliquo, ottenuto per via generativa




ΑΒΓ triangolo assiale

ΑΞ asse

$\mathcal{P}$ : ΔΖΕ     ΖΗ diametro della sezione (asse di $\mathcal{P}$) // ΑΓ

$\Theta Z \perp ZH$ e tale che

$$\boxed{\frac{B\Gamma^2}{BA \cdot A\Gamma} = \frac{Z\Theta}{ZA}}$$

Sia $K \in \mathcal{P}$ e sia $K\Lambda \parallel \Delta E$. Si ha

$$\boxed{K\Lambda^2 = \Theta Z \cdot Z\Lambda}$$

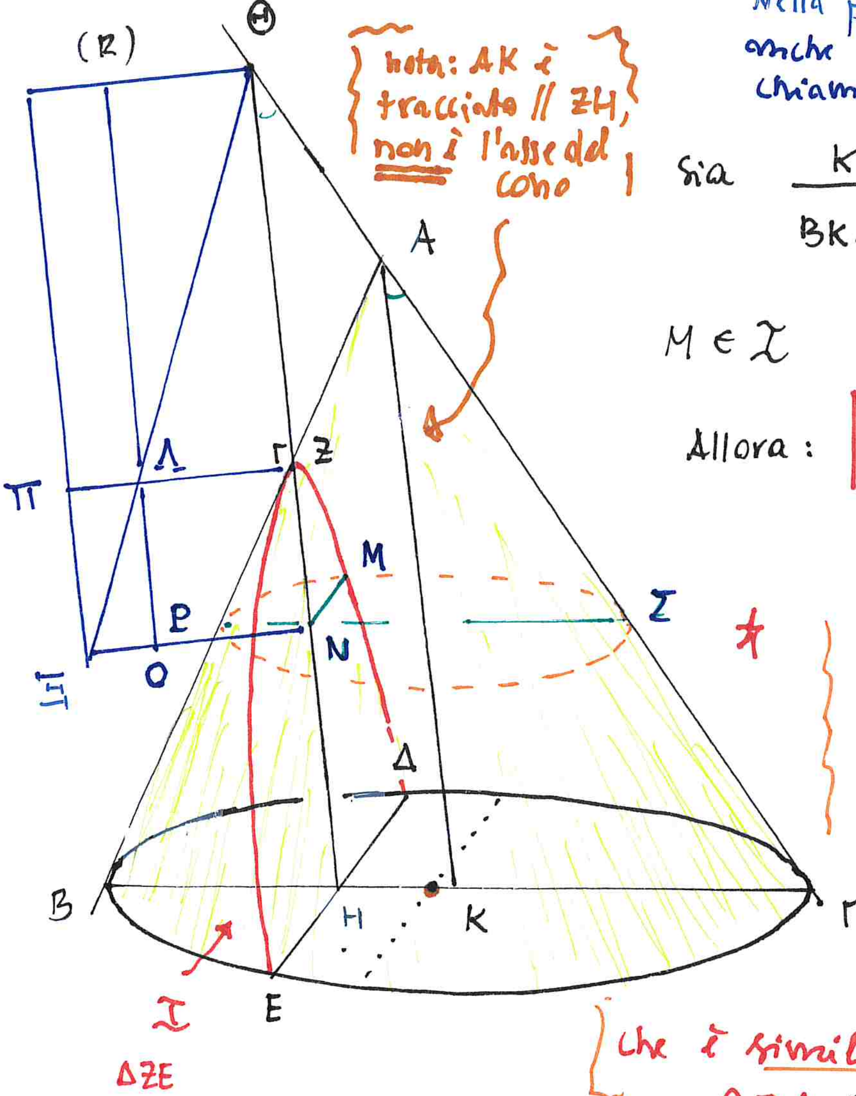
proprietà caratteristica

# Conica I.12 : costruzione dell'iperbole

proprietà caratteristica

ὑπερβολή

Nella prop. 14 viene identificato anche l'altro ramo, pure chiamato iperbole




nota: AK è tracciato // ZH, non è l'asse del cono

Sia $\dfrac{KA^2}{BK\cdot K\Gamma} = \dfrac{Z\Theta}{Z\Lambda}$

$M \in \Sigma$ proprietà caratteristica

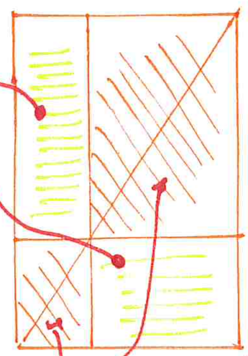
Allora: $\boxed{MN^2 = Z\Xi}$ ≡ Rettangolo $ZN\Xi\Pi$

applicato a $Z\Lambda$, di lunghezza $ZN$, ed eccedente per $\Lambda\Xi$ (rettangolo $\Pi\Lambda O\Xi$)

che è simile al rettangolo $\Theta Z\Lambda$ R

rettangoli di area uguale

Euclide I.43 "teorema dello gnomone"



rettangoli simili

può "potenza" $MN^2 = Z\Xi$

λέγω, ὅτι ἡ ΜΝ δύναται τὸ ΖΞ,

ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ,

applicato — rettangolo

πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ,

larghezza

ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΛΞ

eccedente — rettangolo

ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ

simile

Osservazione: se ZH diviene // AΓ, il rettangolo eccedente ΛΞ degenera e si ritrova la parabola

Infatti, tracciando $PNZ \parallel B\Gamma$, essendo $NM \parallel \Delta E$, il piano per $NM$ e $PZ$ è parallelo al piano di base, e nuovamente si ottiene un cerchio di diametro $PNZ$, cui $MN$ è perpendicolare.

Si ha allora $PN \cdot NZ = MN^2$ (Euclide)

Ora
$$\frac{AK^2}{BK \cdot K\Gamma} = \frac{Z\Theta}{Z\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{AK}{K\Gamma} \cdot \frac{AK}{BK} = \boxed{\frac{Z\Theta}{Z\Lambda}}$$
$$\frac{AK^2}{BK \cdot K\Gamma} = \frac{AK}{K\Gamma} \cdot \frac{AK}{BK}$$

Ma $\dfrac{AK}{K\Gamma} = \dfrac{\Theta H}{H\Gamma} = \dfrac{\Theta N}{NZ}$ e $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{ZH}{HB} = \dfrac{ZN}{NP}$

AK πρὸς KΓ
καὶ ΘH πρὸς HΓ

l'uguaglianza è chiara

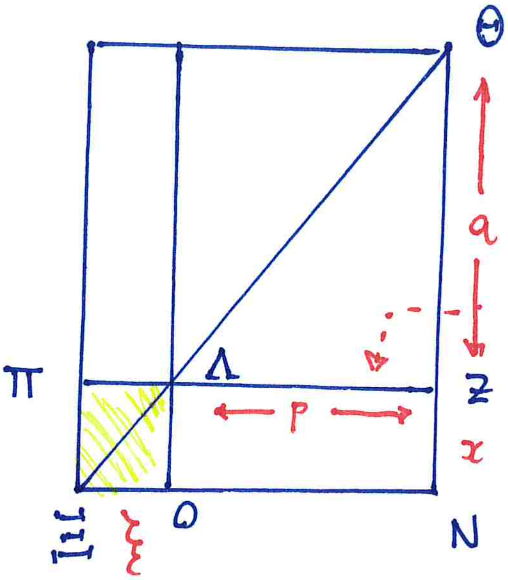
sicché
$$\boxed{\frac{\Theta Z}{Z\Lambda}} = \frac{\Theta N}{NZ} \cdot \frac{ZN}{NP} = \frac{\Theta N \cdot ZN}{NZ \cdot NP} = \frac{\Theta N}{N\Xi} = \frac{\Theta N \cdot NZ}{N\Xi \cdot NZ}$$

$$\Rightarrow \quad ZN \cdot NP = N\Xi \cdot NZ$$
$$ZN \cdot NP = MN^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{MN^2 = N\Xi \cdot NZ}$$ ⇝ rettangolo $\Xi Z$

$\Delta Z$ : parametro delle ordinate (a $ZH$ diametro) "ὀρθία"
"latus rectum"

$Z\Theta$ : lato trasverso "πλαγία"
(infinito nel caso della parabola)




lato trasverso "πλαγία"

"latus rectum" "ὀρθία"

Osservazione [il ragionamento, qui condotto in "coniugazione ortogonale", vale in realtà in "coniugazione obliqua", come mostrato dallo stesso Apollonio]

$$MN^2 = y^2 = \overbrace{(p+\xi)}^{\text{area del rettangolo } Z\Xi}\cdot x$$

Ma $\quad \dfrac{x}{\xi} = \dfrac{a}{p} \Rightarrow \xi = \dfrac{xp}{a}$

Quindi

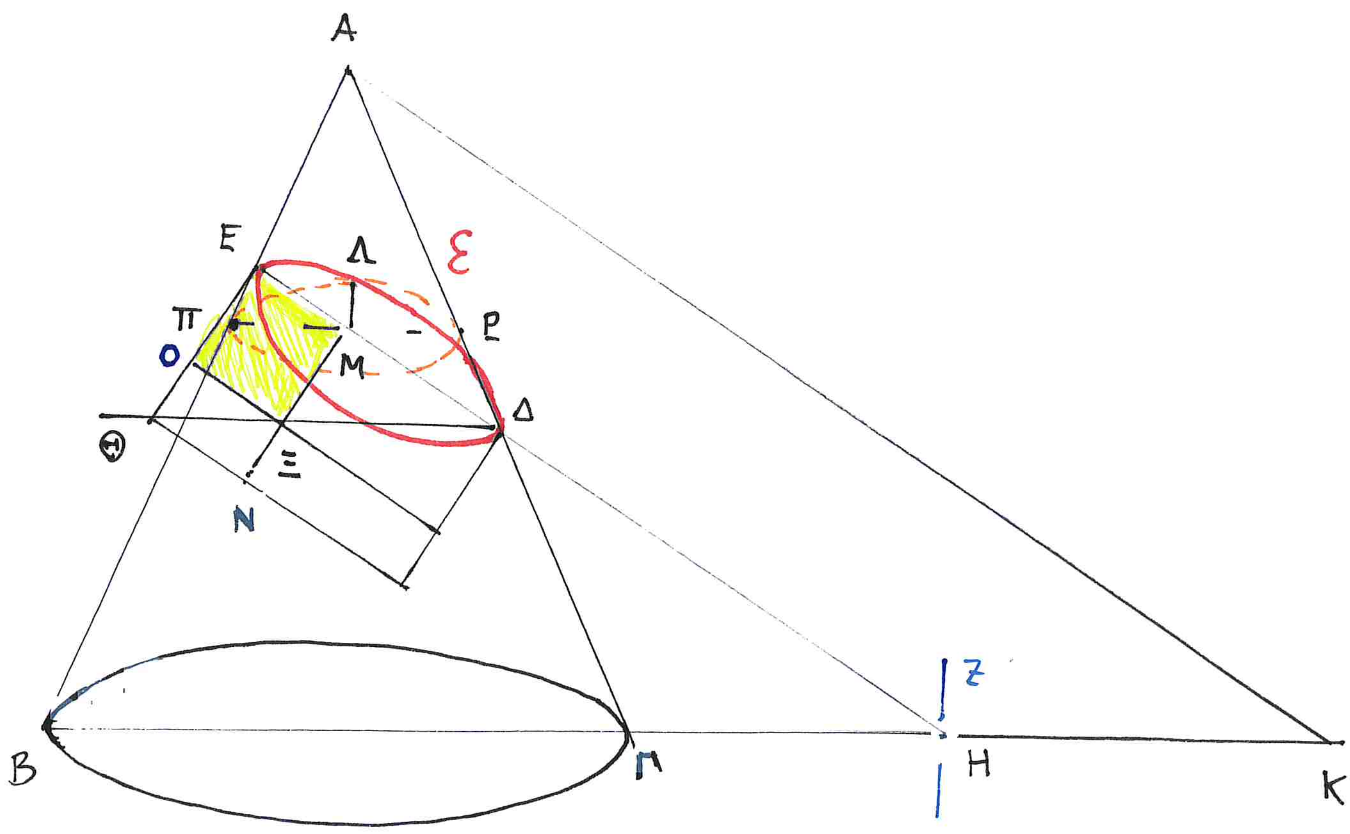
$$y^2 = \left(p + \frac{xp}{a}\right)x = px \underset{-}{+} \frac{px^2}{a}$$

per l'ellisse si avrà un rettangolo mancante

rettangolo eccedente $\Lambda\Xi$

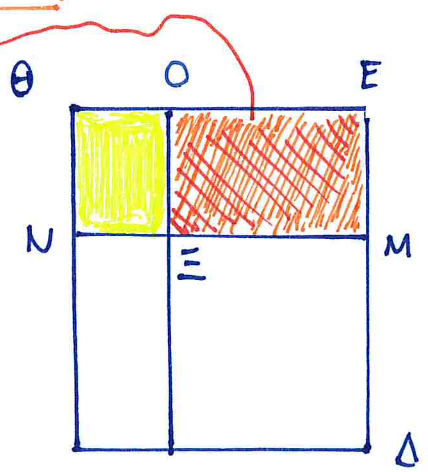
# Conica I.13: costruzione dell'ellisse

proprietà caratteristica ἔλλειψις



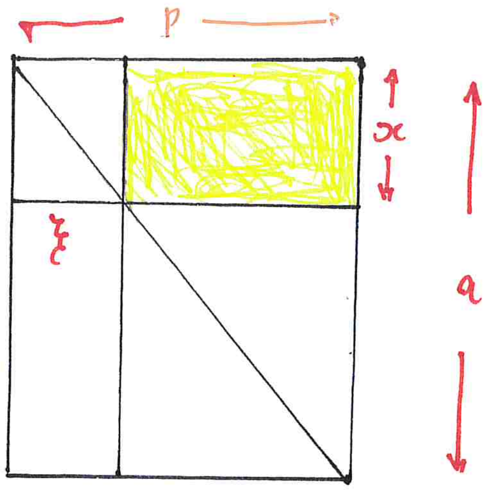

Sia EΘ tale che: $\boxed{\dfrac{AK^2}{BK\cdot K\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{E\Theta}}$ Λ ∈ ℰ

Si ha $\boxed{\Delta M^2 = \Xi M\cdot ME}$




il rettangolo EMΞΠ è ΘEMN (mancante) privato di ΘOΞN, simile al rettangolo ΘΔ

λέγω, ὅτι ἡ ΔΜ δύναταί τι χωρίον, ὃ παράκειται (applicato) παρὰ τὴν ΕΘ, πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ




$$\frac{\xi}{x} = \frac{p}{a} \qquad \xi = \frac{px}{a}$$

$$y^2 = x(p-\xi) = x\left(p - \frac{px}{a}\right)$$

$$= xp - \frac{px^2}{a}$$

La dimostrazione è simile al caso dell'iperbole:
intanto $\boxed{\Pi M \cdot MP = \Lambda M^2}$

Da $\dfrac{AK^2}{BK \cdot K\Gamma} = \dfrac{E\Delta}{E\Theta}$

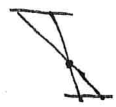
$$\| $$

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{AK}{K\Gamma}$$

Si ha poi

$$\frac{AK}{BK} = \frac{EH}{HB} = \frac{EM}{M\Pi}$$

$$\frac{AK}{K\Gamma} = \frac{\Delta H}{H\Gamma} = \frac{\Delta M}{MP}$$



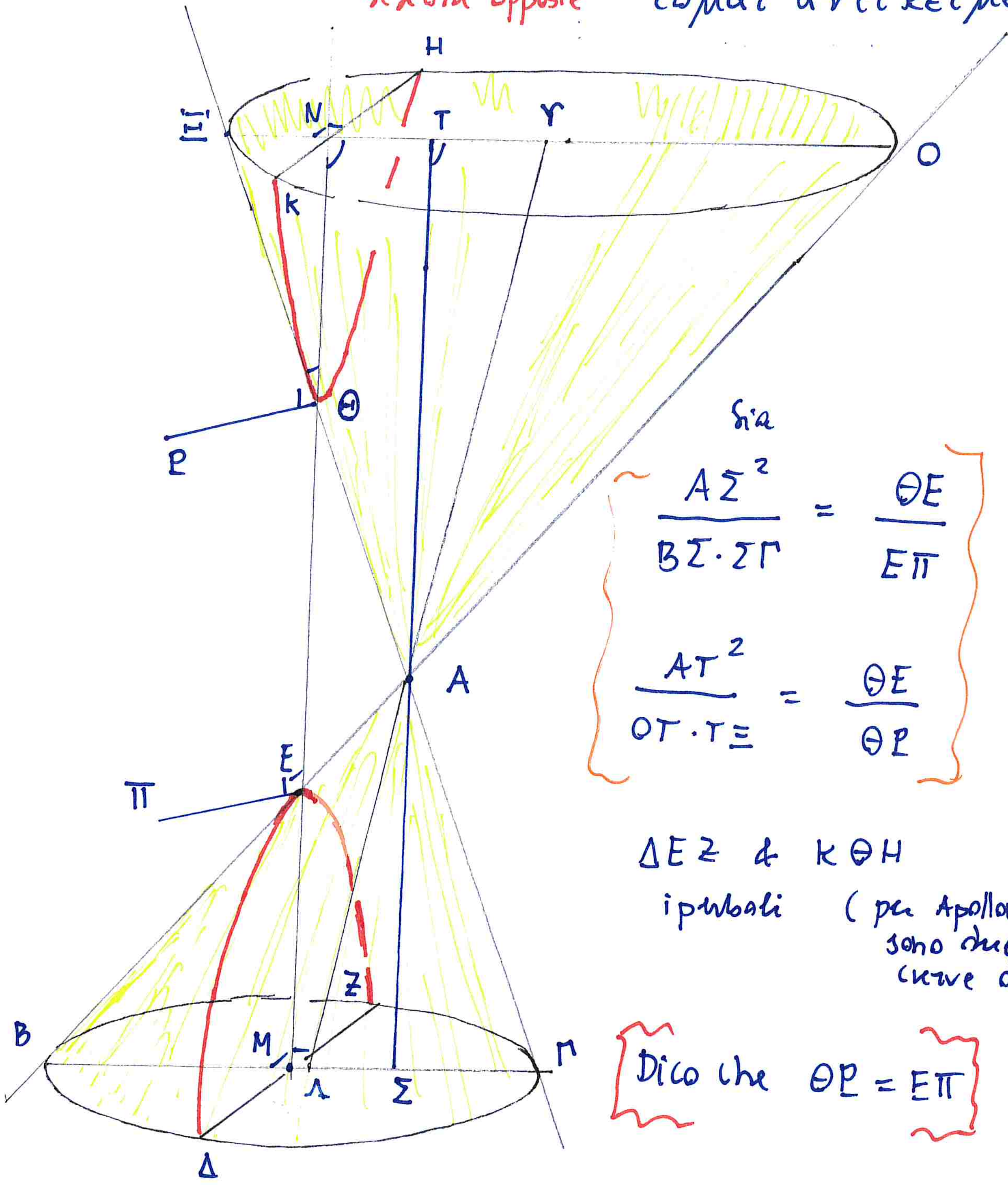
e

$$\frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{EM}{M\Pi} \cdot \frac{\Delta M}{MP} = \frac{EM \cdot \Delta M}{M\Pi \cdot MP} = \frac{\Delta M}{M\Xi}$$

Ma $\dfrac{\Delta M}{M\Xi} = \dfrac{\Delta M \cdot ME}{M\Xi \cdot ME} \implies \dfrac{EM \cdot \Delta M}{M\Pi \cdot MP} = \dfrac{\Delta M \cdot ME}{M\Xi\, ME}$

e $\underbrace{M\Pi \cdot MP}_{\Lambda M^2} = M\Xi \cdot ME \implies \boxed{\Lambda M^2 = \Xi M \cdot ME}$

Conica I.14   I due rami dell'iperbole [e loro congruenza]
"sezioni opposte"   τομαὶ ἀντικείμεναι




Sia

$$\left\{ \frac{A\Sigma^2}{B\Sigma\cdot\Sigma\Gamma} = \frac{\Theta E}{E\Pi} \qquad \frac{AT^2}{OT\cdot T\Xi} = \frac{\Theta E}{\Theta P} \right\}$$

ΔEZ & KΘH iperboli (per Apollonio sono due curve distinte)

Dico che $\Theta P = E\Pi$

Infatti: $\frac{A\Sigma}{\Sigma\Gamma} = \frac{AT}{T\Xi}$ , $\frac{A\Sigma}{\Sigma B} = \frac{AT}{TO}$ $\Rightarrow$

$\frac{A\Sigma}{\Sigma\Gamma}\cdot\frac{A\Sigma}{\Sigma B} = \frac{A\Sigma^2}{B\Sigma\cdot\Sigma\Gamma}$ , $\frac{AT}{T\Xi}\cdot\frac{AT}{TO} = \frac{AT^2}{\Xi T\cdot TO}$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{A\Sigma^2}{B\Sigma\cdot\Sigma\Gamma} = \frac{AT^2}{\Xi T\cdot TO} \right\}$$

Tuttavia

$$\frac{A\Sigma^2}{B\Sigma \cdot \Sigma M} = \frac{\Theta E}{E\Pi}$$

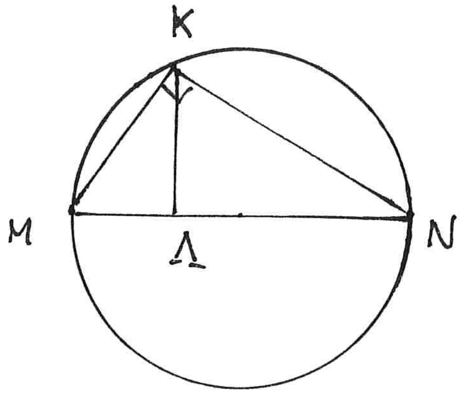
$$\frac{AT^2}{\Xi T \cdot TO} = \frac{\Theta E}{\Theta P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E\Pi = \Theta P}$$

I due rami hanno gli stessi parametri p e a
[dunque sono congruenti, in termini moderni]

Infatti, sia $MN$ per $\Lambda$ // $B\Gamma$. $K\Lambda // \Delta E$, sicché il piano per $K\Lambda$ ed $MN$ è // piano di base.

Il piano per $K\Lambda$ e $MN$ è un cerchio [trad. letterale!] di diametro $MN$ [poiché $M\Lambda \cdot \Lambda N = K\Lambda^2$ (2° Euclide)]

τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ




Da

$$\frac{B\Gamma^2}{BA \cdot A\Gamma} = \frac{\Theta Z}{ZA}$$ si trova successivamente

(Eucl. VI.4)

$$\frac{B\Gamma^2}{BA \cdot A\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{\Theta Z}{ZA}$$ . Ma $\left[\frac{B\Gamma}{\Gamma A} = \frac{MN}{NA} = \frac{M\Lambda}{\Lambda Z}\right]$

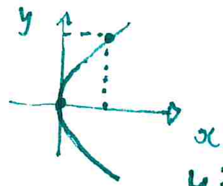
(Talete)

e $\left[\frac{B\Gamma}{BA} = \frac{MN}{MA} = \frac{\Lambda M}{MZ} = \frac{N\Lambda}{ZA}\right]$ . Pertanto

$$\frac{\Theta Z}{ZA} = \frac{M\Lambda}{\Lambda Z} \cdot \frac{N\Lambda}{ZA} = \frac{M\Lambda \cdot N\Lambda}{\Lambda Z \cdot ZA}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\Theta Z \cdot Z\Lambda}{ZA \cdot Z\Lambda}$$




$y^2 = p \cdot x$

$$\Theta Z \cdot Z\Lambda = M\Lambda \cdot \Lambda N = K\Lambda^2$$

ossia

$$\boxed{K\Lambda^2 = \Theta Z \cdot Z\Lambda}$$

"applicazione delle aree"
"παραβολὴ τῶν χωρίων"

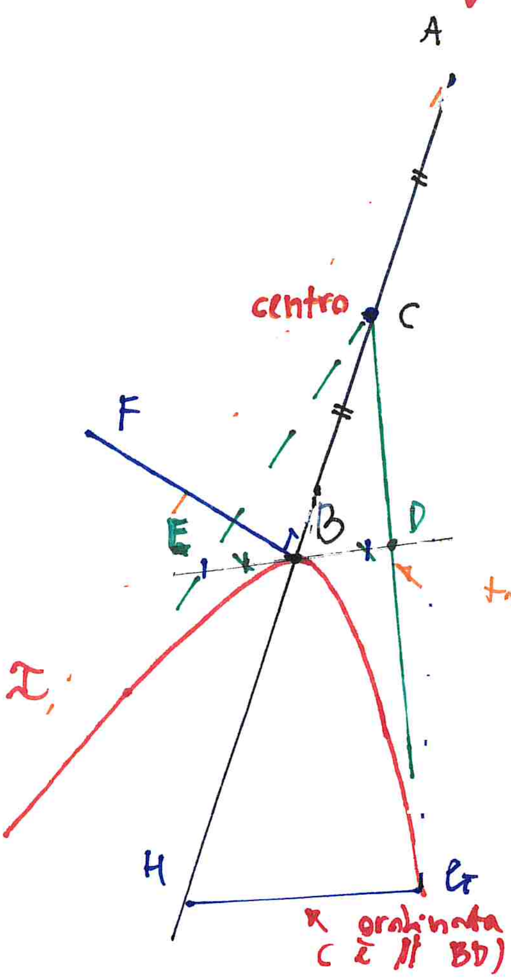
parametro delle ordinate
"ὀρθία" "latus rectum"

τεταγμένως κατηγμένη
$K\Lambda$: ordinata
$Z\Lambda$: ascissa
$ZH$: diametro
"ordinatim ducta"

# ✱ Gli asintoti dell'iperbole

## Conica II.1 e II.2

vertice della sezione opposta (l'altro ramo)




tangente a I nel vertice B

Sia D scelto in modo che

$$BD^2 = \frac{1}{4} AB \cdot BF$$
$$\parallel$$
$$BE^2$$

✱ La retta CD non incontra I (e così CE) [e così CE]

"ἀσύμπτωτος"
"incapace di incontrare"

[In II.2 si prova che nessun'altra retta tra AH e AD è un asintoto]

**Dim.** Per assurdo, CD incontri I in G. Sia GH // BD ("ordinatamente" condotta). Ora

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AB \cdot AB}{BF \cdot AB} \qquad CB^2 = \frac{1}{4} AB^2$$

$$BD^2 = \frac{1}{4} AB \cdot BF$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{CB^2}{DB^2} = \frac{CH^2}{HG^2} \quad ; \quad \frac{AB}{BF} \overset{(I.21)}{=} \frac{AH \cdot HB}{HG^2}$$

⚠ indipendentemente dal fatto che G si trovi su I o no

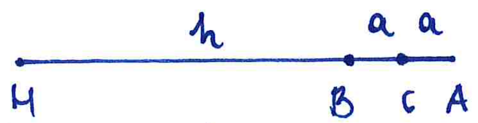
Pertanto

$$\frac{CH^2}{HG^2} = \frac{AH \cdot HB}{HG^2}$$

$$\Rightarrow \quad CH^2 = AH \cdot HB$$

ma ciò è assurdo (Eucl. II.6)

forma moderna ↓




$$(a+h)^2 \overset{?}{=} (2a+h) \cdot h$$

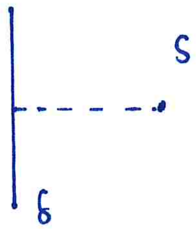
$$a^2 + \cancel{h^2} + \cancel{2ah} \overset{?}{=} \cancel{2ah} + \cancel{h^2} \qquad \text{NO!}$$

## ★ Proprietà fuoco – direttrice

(G. Pappo)

v. Heath vol II

$\mathcal{C}$ conica: luogo dei punti $P$ tali che



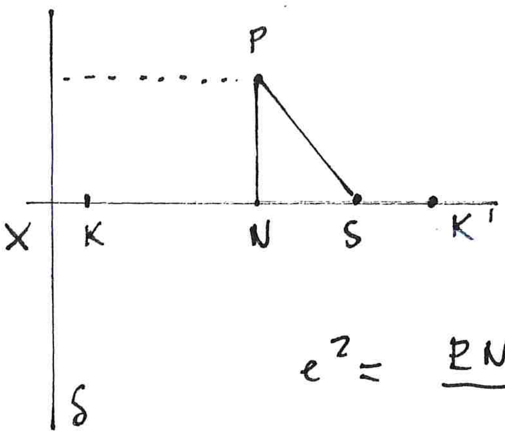

$$\frac{d(P,S)}{d(P,\delta)} = e \quad \text{costante (eccentricità)}$$

nota a Euclide?

$S$: fuoco  $\delta$: direttrice

[In forma moderna: $S$ fuoco: le tangenti a $\mathcal{C}$ spiccate da $S$ sono rette isotrope, ovvero hanno per direzione (in $\mathbb{P}^2$) i punti ciclici – per questi ultimi passano tutte e sole le circonferenze. $\delta$ direttrice: polare di $S$

$\boxed{e<1}$




Sia $\dfrac{SP}{NX} = e$, $\quad SP = d(P,S)$, $\quad NX = d(P,\delta)$

$$e^2 = \frac{PN^2+NS^2}{NX^2}$$

Sia $K$ su $SX$ tale che $e^2 = \dfrac{SN^2}{NK^2}$

e $K'$ t.c. $NK = NK'$

$$(\xi+h)^2-\xi^2 = (\xi+h-\xi)(2\xi+h) = h\cdot(2\xi+h)$$


Si ha: $$e^2 = \frac{PN^2+NS^2}{NX^2} = \frac{SN^2}{NK^2} = \frac{PN^2}{NX^2-NK^2} = \frac{PN^2}{XK\cdot XK'}$$

Siano $A, A'$ le posizioni di $N$ quando $K, K' = X$

Si trova allora

$$\frac{SA}{AX} = \frac{SW}{NK} = \frac{e}{1} = \frac{SW}{NK'} = \frac{SA'}{A'X}$$

e

$$\frac{AX}{SA} = \frac{A'X}{SA'} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{SX}{SA} = \frac{SK}{SW} = \frac{1+e}{e} = \frac{SX-SK}{SA-SW} = \frac{XK}{AN}$$

$SX = XA + AS$

$SA = AN + NS$

$SK = SW + NK$

Similmente

$$\frac{1-e}{e} = \frac{XK'}{A'W}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{XK \cdot XK'}{AN \cdot A'N} = \frac{1-e^2}{e^2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{PW^2}{AN \cdot A'N} = 1-e^2}$$

conica a centro

Derivazione moderna: e.g. Dandelin (v. Hilbert Cohn-Vossen)