◊ CARATTERI DELL'OPERA DI ARCHIMEDE

287 - 212 a.C.

◊ **RIGORE** euclideo ; estremo , impeccabile

◊ **INTUIZIONE** argomentazioni euristiche spregiudicate e coraggiose precedono il principio di Cavalieri . Basate sulla teoria della leva . Sono tenute distinte da argomentazioni rigorose

prop. 14 del "Metodo"

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots \frac{a_n}{b_n} = \dots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots}{b_1 + b_2 + \dots}$$

estensione esplicitamente infinitaria della proprietà del comporre

◊ **AMPIEZZA**

- analisi matematica
- geometria differenziale
- analisi numerica
- fisica matematica

- Chiara coscienza epistemologica (cf. l'elogio di DEMOCRITO)

- **ASPETTI TECNICI**
  - postulato di Archimede
  - metodo di esaustione
  - sol. di problemi di inserzione (neusis) (non ris. in genere con riga e compasso)

esempi di confronto di infinitesimi di ordine diverso

- **STILE DEI LAVORI** ($\neq$ "METODO")

elevato , non elementare (cf. Euclide) ; rimanda talvolta a opere contemporanee (cf. i moderni articoli scientifici) . Lemmi all'inizio , senza motivazione . Quindi i risultati sicuri.

Il "mistero" di Archimede svelato dal metodo

Opere di Archimede

- I Sulla sfera e il cilindro (2)
  De Sphaera et Cylindro
  περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α' β'

- II Misura del cerchio
  Dimensio circuli
  κύκλου μέτρησις

- III Sui conoidi e sferoidi
  De Conoidibus et Sphaeroidibus
  περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων

- IV Sulle spirali (De lineis spiralibus)
  περὶ ἑλίκων

- V, VI Sull'equilibrio dei piani (De planorum equilibriis sive de centris gravitatis planorum, I, II
  Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α' β'

- VII Arenario (Arenarius) Ψαμμίτης

- VIII Quadratura della parabola (Quadratura parabolae
  Τετραγωνισμὸς παραβολῆς

- IX Sui galleggianti (De corporibus fluitantibus) (2)
  Ὀχουμένων α' β'

- X Stomachion (Loculus Archimedius)
  Στομάχιον

- XI Metodo sui teoremi meccanici ad Eratostene
  περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος

- XII Lemmi (Liber assumptorum)

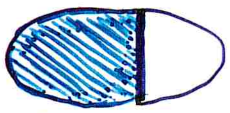
- XIII Problema dei buoi (problema bovinum)
  Πρόβλεμα βοεικόν

◇ IL POSTULATO DI EUDOSSO - ARCHIMEDE IN ARCHIMEDE

1. (QP, Spirali) Date due aree disuguali, l'eccesso di cui la maggiore supera la minore può, aggiunto a se stesso, superare ogni area assegnata

2. (S.C.) Tra linee disuguali, superficie disuguali e solidi disuguali, il maggiore superi il minore di una quantità tale che, se addizionata a se stessa, possa superare ogni assegnata grandezza del tipo di quelle confrontate tra loro

☆ Archimede tratta grandezze "eudossiane": bandisce gli infinitesimi attuali che potrebbero emergere da considerazioni euristiche



☆ Osservazione storica (W. Knorr)
La versione degli Elementi usata da Archimede potrebbe essere diversa dalla nostra.
Inoltre egli potrebbe riferirsi anche a opere pre-euclidee (sp. della tradizione astronomica
*Fidia, Conone, Aristarco

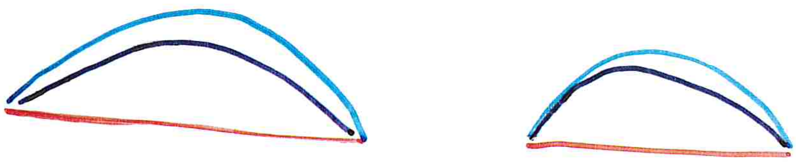
* padre di A.

◇ COMMENTI SUI "LAMBANOMENA"
(sfera e cilindro)

- La minima parte fra tutte le linee aventi gli stessi estremi è la linea retta

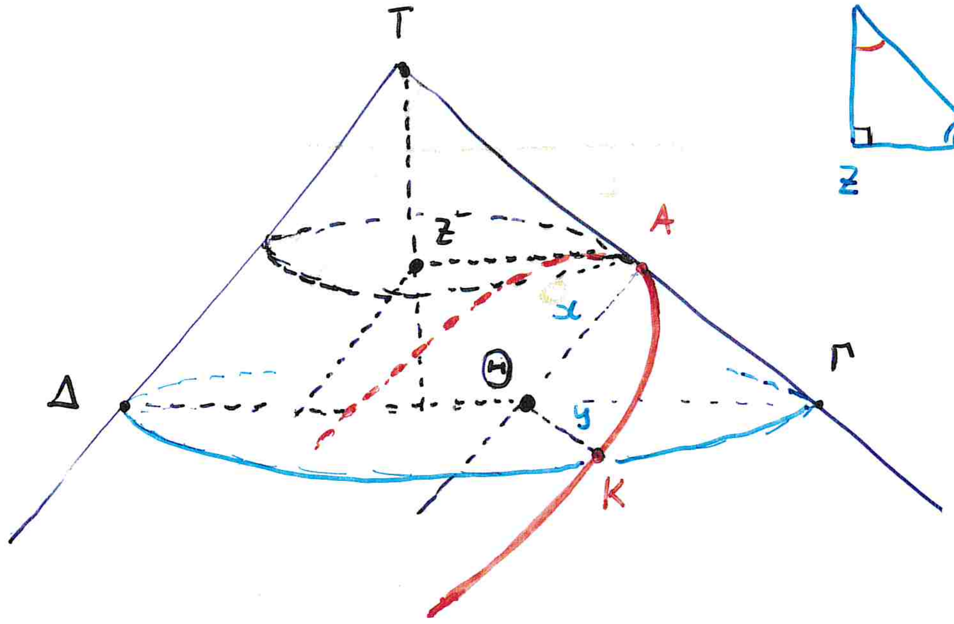
- Di tutte le linee che, giacendo in uno stesso piano, hanno gli stessi estremi due sono disuguali quando, essendo entrambe concave nella stessa direzione o una di esse è interamente compresa dall'altra linea e dalla retta che congiunge gli estremi, oppure è in parte compresa e in parte coincidente con l'altra; e che la linea inclusa è la minore

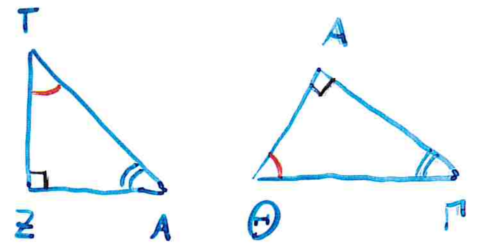
- analog. per le superficie..



◇ LA PARABOLA (alla MENECMO) * teoria pre-apolloniana
IV sec a.C.

sezione di un cono rettangolo





$$\Theta K^2 = \Delta\Theta \cdot \Theta\Gamma$$ (2° teor. Euclide)

$$= 2 \cdot AZ \cdot \Theta\Gamma$$ (*)

ma $$\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A} = \frac{TA}{AZ}$$ (similitudine)

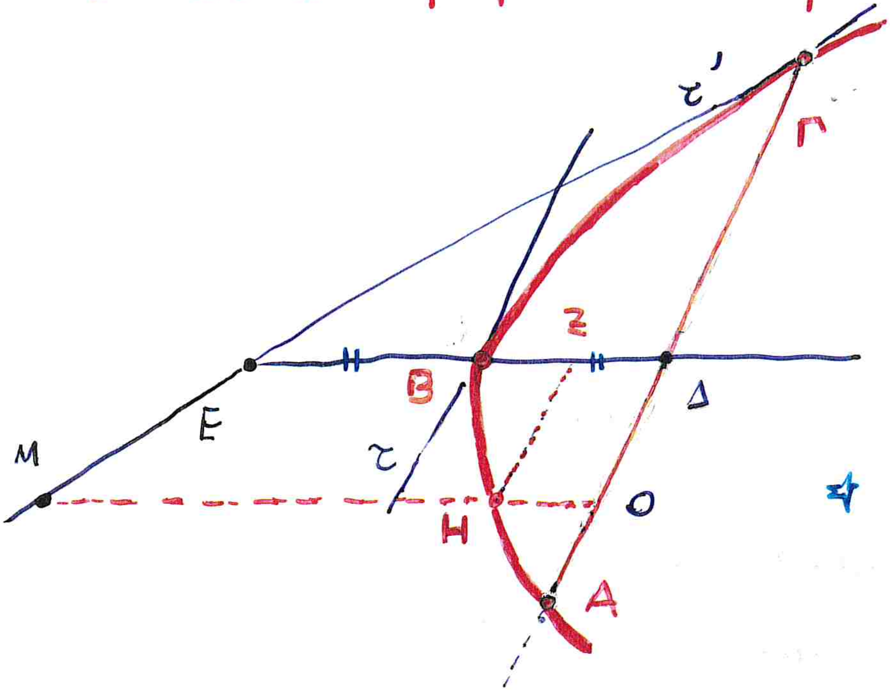
$$AZ = \frac{TA \cdot \Theta A}{\Theta\Gamma} \Rightarrow$$ (da *)

$$\left[\ \underbrace{\Theta K^2}_{y^2} = \underbrace{2 \cdot TA}_{p} \cdot \underbrace{\Theta A}_{x}\ \right]$$

$$\boxed{y^2 = px}$$

$p \equiv N$ "doppio della linea fino all'asse"

• ulteriori proprietà della parabola



B vertice

EΔ diametro

∢ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ≡ segmento parabolico

1 • Se AΓ // τ (tangente in B)

è $\boxed{A\Delta = \Delta\Gamma}$

2 • Se AΓ // τ , considerata τ' (tg in Γ)

è EB = ΔB

3 • $$\boxed{\frac{B\Delta}{BZ} = \frac{A\Delta^2}{HZ^2}}$$ "caratteristica" in coniugazione (*) obliqua

4 • (QP prop.5) $$\boxed{\frac{MO}{OH} = \frac{A\Gamma}{AO}}$$

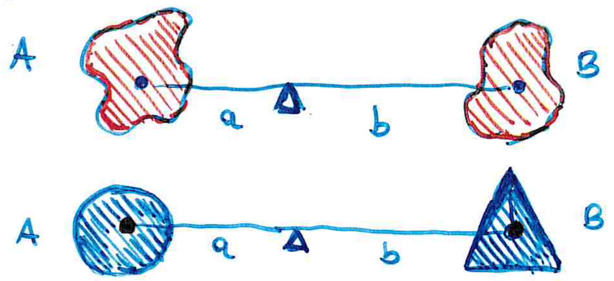
(*) pto di vista AFFINE

◇ SULL'EQUILIBRIO DEI PIANI (I)

◇ APPROCCIO ASSIOMATICO

il concetto di BARICENTRO risulta implicitamente definito dai postulati (cf. Dijksterhuis, L. Russo)

☆ **POSTULATO VI** L'equilibrio di due figure A e B dipende solo dai loro pesi e dalle distanze dei loro baricentri dal fulcro



Da ciò segue la legge della leva

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a} \qquad (Bb = Aa)$$

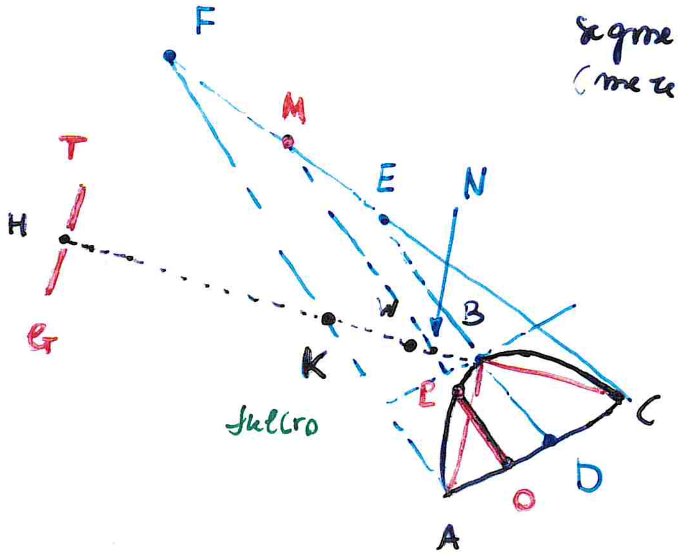
☆ Di fatto, la legge della leva è spesso usata per det. il baricentro in molti casi concreti

◇ AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO I :

LA "DIMOSTRAZIONE" MECCANICA (Metodo)

✧ idea di base: legge della leva + "Principio di Cavalieri"

("indivisibili" come segmenti pesanti (mere finzioni mentali)



$TG = OP$

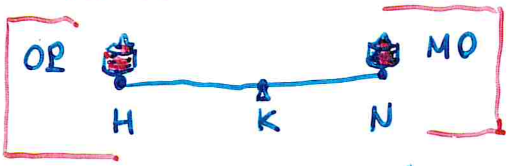
$$\underbrace{\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO}}_{\text{pr. 4}} \;\; \underbrace{= \frac{CK}{KN}}_{\text{Talete}} \;\; \underbrace{= \frac{HK}{KN}}_{\text{costr.}}$$

Ma $\underbrace{EB = BD}_{\text{pr. 2}}$

$\Rightarrow$ $MN = NO$, $FK = KA$ $\Rightarrow$ KC mediana di $\overset{\triangle}{ACF}$

✧ int. meccanica di $\left[\frac{MO}{OP} = \frac{HK}{KN}\right]$

$MO \cdot KN = OP \cdot HK$

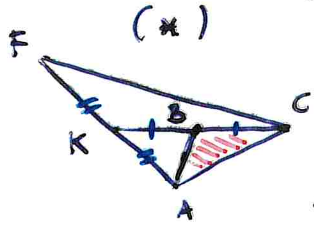


Ciò vale $\forall P$ $\Rightarrow$

☆ $\left[\overset{\frown}{ABC}\right.$, posto in H, bilancia $\overset{\triangle}{AFC}$ posto dov'è ("Cavalieri") $\left.\right]$

Ma il peso di $\overset{\triangle}{AFC}$ è concentrato nel baricentro W, cosicché

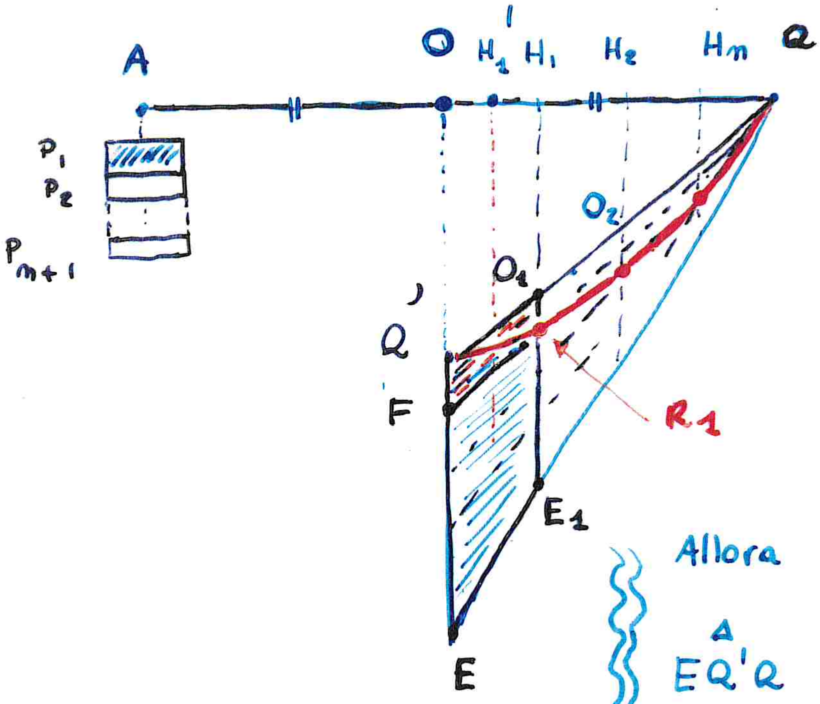
$$\underbrace{\frac{\overset{\frown}{ABC}}{\overset{\triangle}{AFC}} = \frac{WK}{KH}}_{\text{legge della leva}} \underbrace{=\frac{WK}{KC}}_{\text{costr.}} \underbrace{= \frac{1}{3}}_{\text{prop. baricentro}}$$



Ma è chiaro che[(*)] $\overset{\triangle}{AFC} = 4\,\overset{\triangle}{ABC}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overset{\frown}{ABC} = \frac{4}{3}\,\overset{\triangle}{ABC}}$

◇ AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO II

LA DIMOSTRAZIONE MECCANICO-GEOMETRICA



AO = OQ

Sia (EO_1) bilanciato trapezio da P_1 in A etc..

Allora $\sum_{i=1}^{n+1} P_i$ in A bilancia $\overset{\triangle}{EQ'Q}$ sospeso nel pto di OQ sopra il baricentro

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} P_i = \frac{1}{3}\, \overset{\triangle}{EQQ'}$$

Ora

$$\underbrace{\frac{AO}{OH_1}}_{\text{costruz.}} = \underbrace{\frac{QO}{OH_1} = \frac{QQ'}{Q'O_1}}_{\text{Talete}} = \underbrace{\frac{E_1O_1}{O_1R_1}}_{\bigstar\ \text{pr. 4}} = \frac{(EO_1)}{(FO_1)}$$

ma $\underbrace{\frac{AO}{OH_1'}}_{\text{per ipotesi}} = \frac{(EO_1)}{P_1} \Rightarrow (FO_1) > P_1$ etc

Analogamente: $\frac{AO}{OH_1} = \frac{(E_1O_2)}{(R_1O_2)} \Rightarrow P_2 > (R_1O_2)$

$$(F_1O_2) > P_2 > (R_1O_2)$$

Proseguendo è

$$(F_2O_3) > R_3 > (R_2O_3)$$

$$\vdots$$

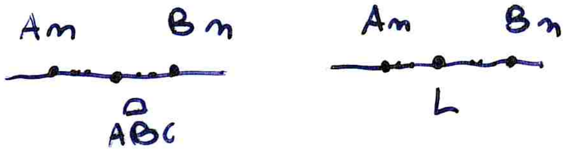
$$\overset{\triangle}{E_nO_nQ} > R_{n+1} > \overset{\triangle}{R_nO_nQ}$$

$\Rightarrow$ sommando m. a m.

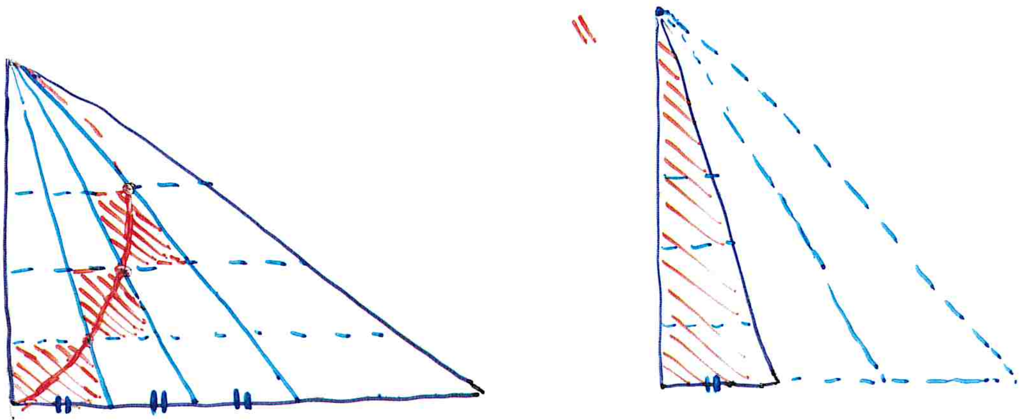
$$\overbrace{(R_1O_2) + \ldots (R_nO_nQ)}^{A_n}$$

$$< \underbrace{\Sigma R_i}_{\frac{1}{3}\,E\hat{Q}R' \equiv L} < \underbrace{(FO_1) + \ldots (E_nO_nQ)}_{B_n}$$

* Basta ora mostrare che $\lim_{n \to \infty} (B_n - A_n) = 0$



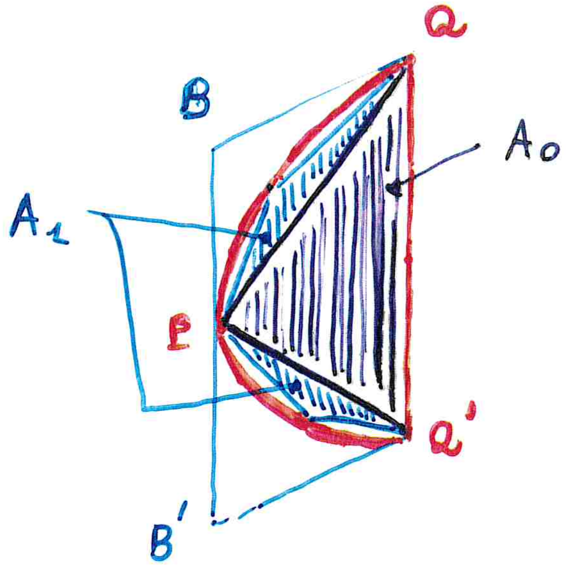
Ma ciò è chiaro... $B_n - A_n$ =



(*) Idea importante (cf. Luca Valerio, sviluppi moderni...)

◇ AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO III

LA DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA



Fatti basilari: ◆ $P\overset{\triangle}{Q}Q' > \frac{1}{2}\, P\overset{\frown}{Q}Q' = \frac{1}{2} S$

◆ $A_1 = \frac{1}{4} A_0$ e in generale

◆ $A_n = \frac{1}{4} A_{n-1}$

area aggiunta

★ $\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{4}{3} \right]$

si ha poi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k + \frac{1}{3} A_n = \frac{4}{3} A_0$ (★)

Si afferma che $\boxed{S = \frac{4}{3} A_0}$

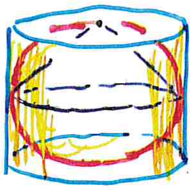
Sia p.a. $S > \frac{4}{3} A_0$ $\qquad S = \frac{4}{3} A_0 + E \qquad E > 0$

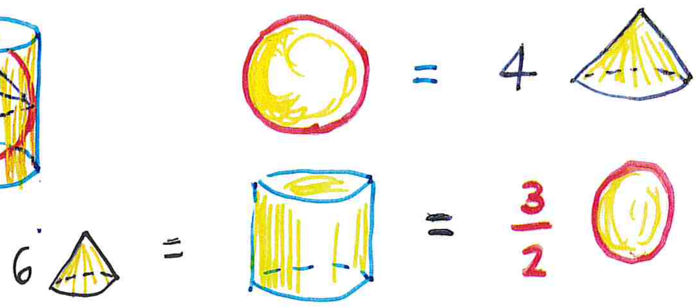
$$= \sum_{k=0}^{n} A_k + \varepsilon_n$$

Ma $\varepsilon_n \to 0$ (cf. Lemma di Euclide) $\Rightarrow$ se n è t.c. $\varepsilon_n < E$, si ha $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k > \frac{4}{3} A_0$ contro la (★)

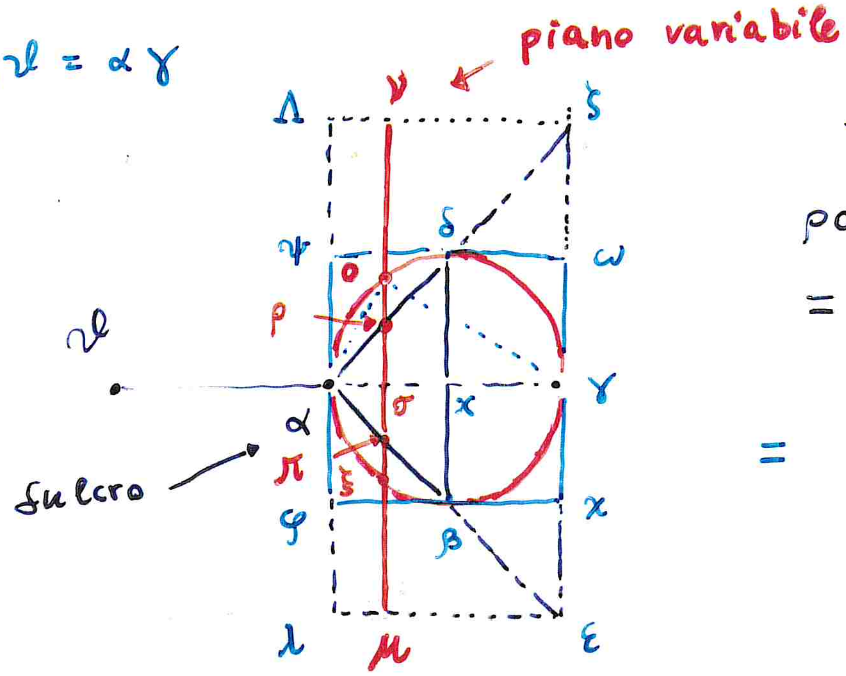
Se poi $S < \frac{4}{3} A_0$ $\qquad S = \frac{4}{3} A_0 - e$, per n suff. grande è $\frac{1}{3} A_n < e$ $\Rightarrow$ da (★) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k > S$, assurda.

VOLUME DELLA SFERA

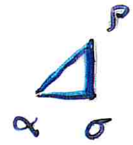




$\alpha\vartheta = \alpha\gamma$



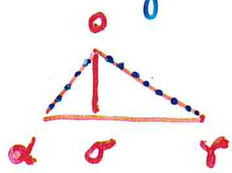
$\rho\sigma = \alpha\sigma$



$\rho\sigma^2 + o\sigma^2 = \alpha\sigma^2 + o\sigma^2$

$= \alpha o^2$

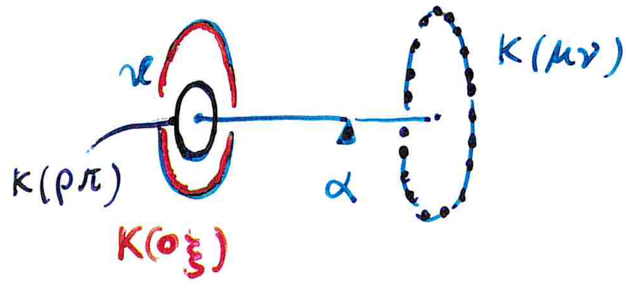
$= \alpha\sigma \cdot \alpha\gamma$ (I° Euclide)



e $[\alpha\gamma = \nu\sigma = \omega\chi]$

$$\frac{\nu\sigma^2}{\rho\sigma^2 + o\sigma^2} = \frac{\alpha\gamma^2}{\alpha\sigma \cdot \alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\sigma} = \frac{\alpha\vartheta}{\alpha\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega\chi^2}{\rho\sigma^2 + o\sigma^2} = \frac{\alpha\vartheta}{\alpha\sigma}$$



★ il cilindro $_{\lambda\Lambda\xi\varepsilon}$, posto dov'è, bilancia la sfera + il cono $_{\alpha\xi\varepsilon}$ "ricostruiti" in ϑ $\Rightarrow$ (pr. baricentri)

$$\frac{sf + cono}{cil} = \frac{\alpha\chi}{\alpha\vartheta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad cil = 2\,(sf + cono)$$

$$cil = 3\, cono_{\alpha\varepsilon\xi} = 2\, sf + 2\, cono_{\alpha\varepsilon\xi}$$

$cono_{\alpha\varepsilon\xi} = 2\, sf$

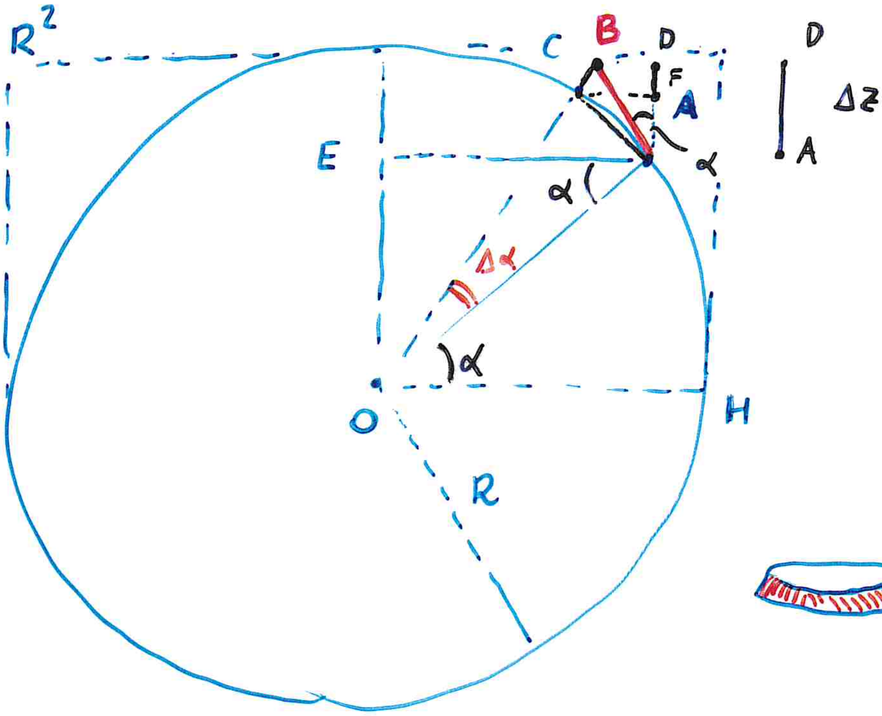
$= 8\, cono_{\alpha\beta\delta}$ $\Rightarrow$ ★ $\boxed{sf = 4\, cono_{\alpha\beta\delta}}$

vol(sfera) $= \frac{4}{3}\pi R^3$

III-12

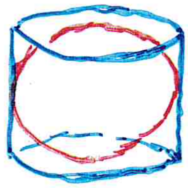
◇ AREA DELLA SUPERFICIE SFERICA

$A = 4\pi R^2$



La dimostrazione originale di Archimede è diretta

$$\left[\, EA \cdot BA = OA \cdot DA = OH \cdot DA \,\right]$$



$2\pi R \cdot 2R$
$= 4\pi R^2$

$$\left[\, R\cos\alpha \; \frac{\Delta z}{\cos\alpha} = R \cdot \Delta z \,\right]$$

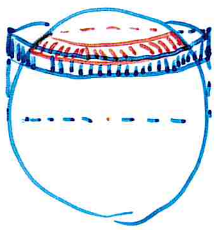
↱ $BC = \sigma(BA) = \sigma(AC) = \sigma(\widehat{AC})$

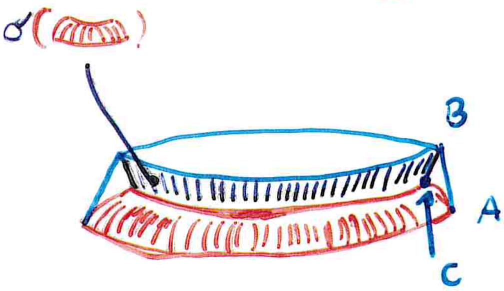
provato da Archimede (!)
nel trattato sulle spirali

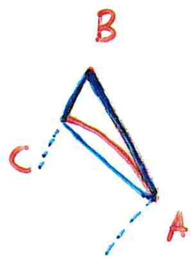
$A =$ sup. lat. cil. circoscritto

$= 2\pi R \cdot 2R$

$= 4\pi R^2$

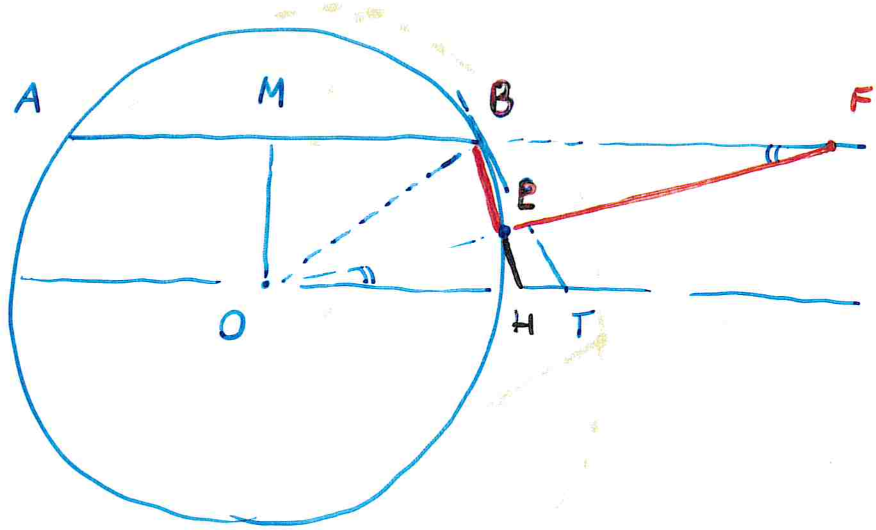






◇ UN PROBLEMA DI INSERZIONE (neusis)
νεῦσις
"inclinatio"

(Spirali Prop. 7)



Sia $\frac{D}{E} > \frac{BM}{MO}$. Si tracci OPF t. c

$= \frac{OB}{BT}$ $\qquad \frac{FP}{PB} = \frac{D}{E}$

Costruzione : Sia PH t. c. $\boxed{\frac{D}{E} = \frac{OB}{PH}}$

es. della 4ª prop.

lo si ponga tra il cerchio e OT, e diretto verso B

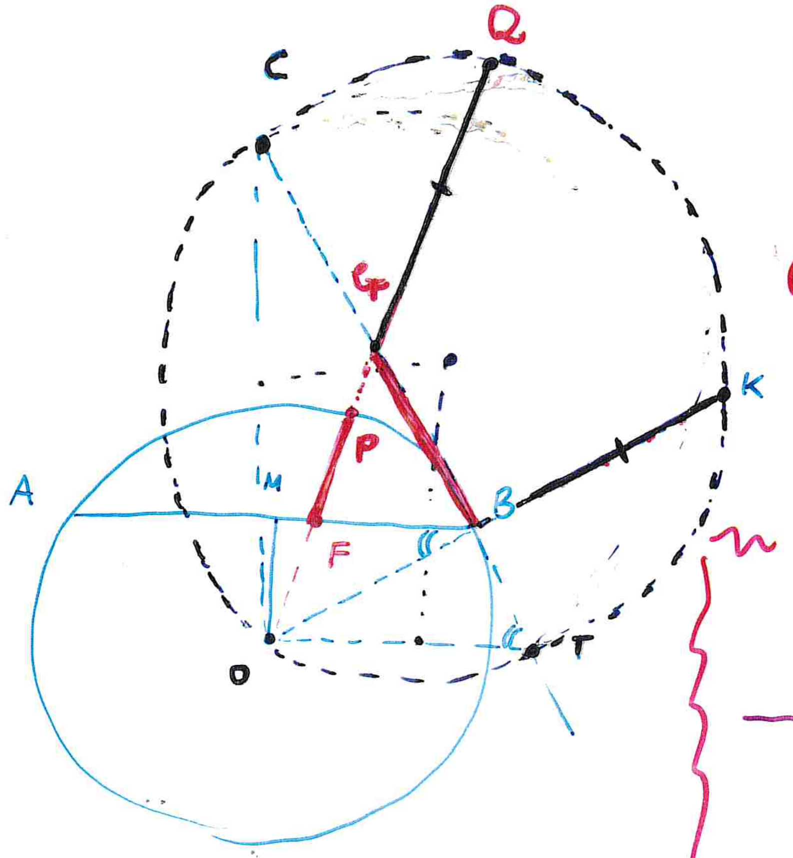
Si ha : $\underbrace{\frac{FP}{PB} = \frac{OP}{PH}}_{\text{similitudine}} = \frac{OB}{PH} = \frac{D}{E}$

◆ Spirali Prop. 8

◇ ANCORA UNA "NEUSIS"

Sia $\frac{D}{E} < \frac{BM}{MO}$

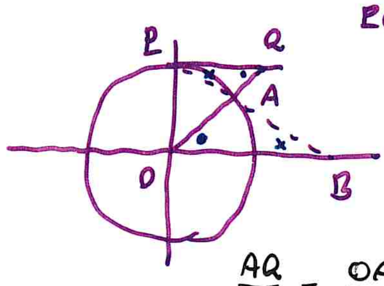
traccia OG t.c. $\frac{FP}{BG} = \frac{D}{E}$



(★) $\boxed{PF = \sigma(BG)}$

G. Russo (!)

$\frac{AQ}{PQ} \to 0$ se $A \to P$



$\frac{AQ}{PQ} = \frac{OA}{OB}$

(triangoli simili ...)

da cui l'asserto

$$\frac{BM}{MO} = \frac{OB}{BT} > \frac{D}{E} = \frac{OB}{BC} \Rightarrow BC > BT$$

↑ si sceglie → cerchio per O, C, T

§§ Si inserisca ora $QG = BK$ diretto verso O

OQ risolve il problema

Dim $\underbrace{CG \cdot GT = OG \cdot QG}_{\text{corde}} = OG \cdot BK$

Ma $\underbrace{\frac{OF}{OG} = \frac{BT}{GT}}_{\text{Talete}} \Rightarrow OF \cdot GT = OG \cdot BT \Rightarrow \frac{CG \cdot \cancel{GT}}{OF \cdot \cancel{GT}} = \frac{\cancel{OG} \cdot BK}{\cancel{OG} \cdot BT}$

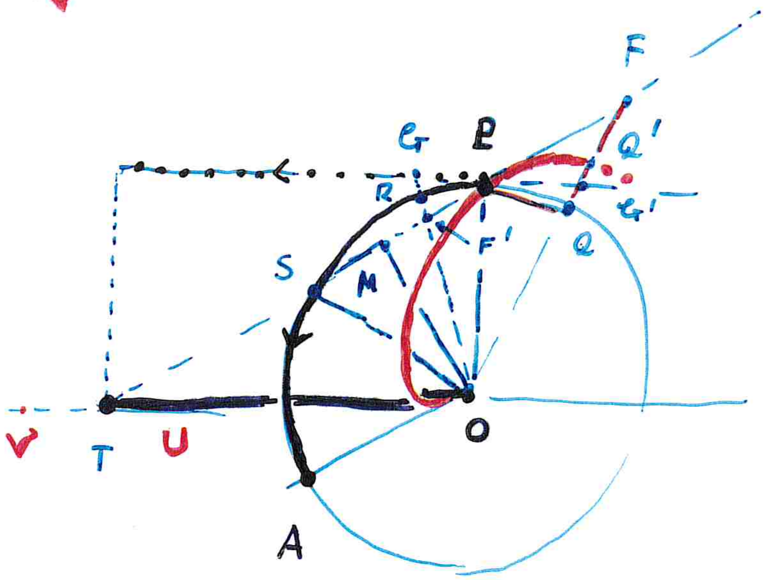
$\frac{OP}{OF} = \frac{BC}{CG} \Rightarrow \frac{PF}{OP} = \frac{BG}{BC}$

$= \frac{BC}{OB}$ (corde)

$= \frac{BC}{OP}$

★ $\left[\frac{PF}{BG} = \frac{OP}{BC} = \frac{OB}{BC} = \frac{D}{E} \right]$

◇ SPIRALI PROP. 20



$\widehat{ASP} = OT$

rettificazione della circonferenza tramite la spirale

1. p.a. $OT > \widehat{ASP}$

sia OU t.c. $OT > OU > \widehat{ASP}$

$\frac{PO}{OU} > \frac{PO}{OT} = \frac{\frac{1}{2} PS}{OM}$ In base alla prop. 7 sia OQF t.c.

$\frac{FQ}{PQ} = \frac{PO}{OU} = \frac{QO}{OU}$ (*) neusis

$\Rightarrow \frac{FQ}{QO} = \frac{PQ}{OU} < \frac{\widehat{PQ}}{\widehat{ASP}} \Rightarrow \frac{FO}{QO} < \frac{\widehat{ASQ}}{\widehat{ASP}} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{OQ'}{QO}$

prop. spirale $\rho \propto \theta$

$\Rightarrow FO < OQ'$: assurdo

2. p.a. $OT < \widehat{ASP}$

sia OV : $OT < OV < \widehat{ASP}$ $\frac{PO}{OV} < \frac{PO}{OT} = \frac{\frac{1}{2} PS}{OM}$

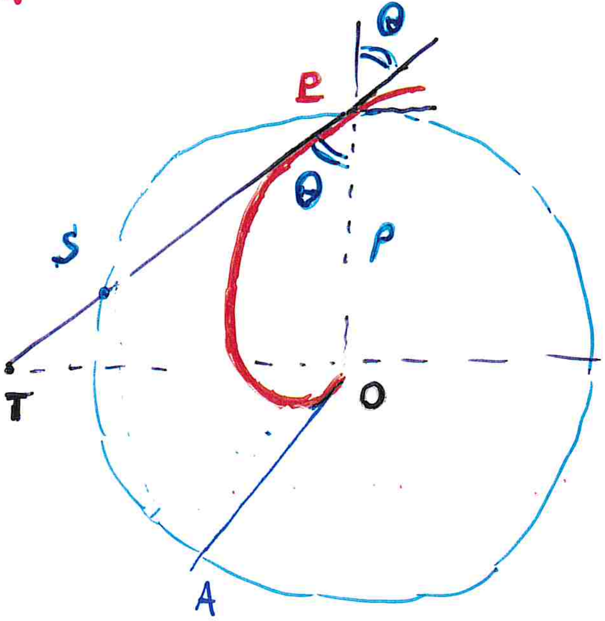
sia F' t.c. $\frac{F'R}{GP} = \frac{PO}{OV} = \frac{RO}{OV}$ * neusis

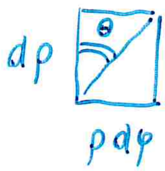
$\frac{F'R}{RO} = \frac{GP}{OV} > \frac{\widehat{PR}}{\widehat{ASP}} \Rightarrow \frac{F'O}{RO} < \frac{\widehat{ASR}}{\widehat{ASP}} = \frac{OR'}{OP} = \frac{OR'}{OR}$

$\Rightarrow F'O < OQ'$: assurdo

◇ DIMOSTRAZIONE MODERNA

$\rho = a\varphi$ spirale (in coordinate polari)





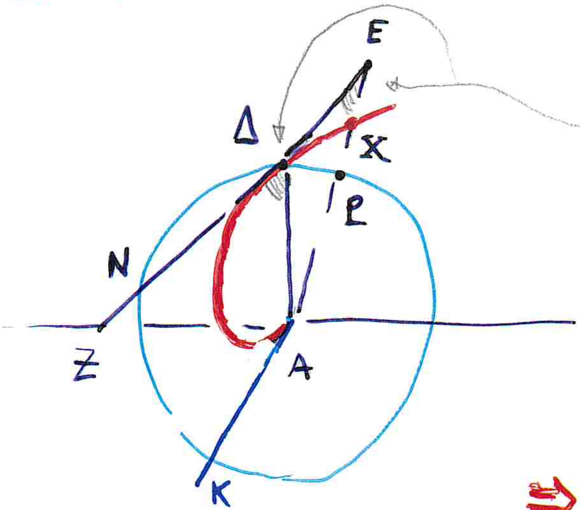
$\cancel{\dfrac{a\varphi\, d\varphi}{a\, d\varphi}}$

$\parallel$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho\, d\varphi}{d\rho} = \varphi$$

$$\left[\ \overline{OT} = \rho \operatorname{tg}\theta = \rho\varphi = \widehat{ASP}\ \right]$$

◇ EURISTICA ARCHIMEDEA (?) (Dijksterhuis)



$A\hat{\Delta}N \sim A\hat{E}\Delta$ (se $X \to \Delta$)

$$\frac{AX}{A\Delta} = \frac{\widehat{PK}}{\widehat{\Delta K}}$$

$$\frac{PX}{A\Delta} = \frac{\widehat{P\Delta}}{\widehat{\Delta K}}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{A\Delta} \sim \frac{\widehat{P\Delta}}{\widehat{\Delta K}}$$

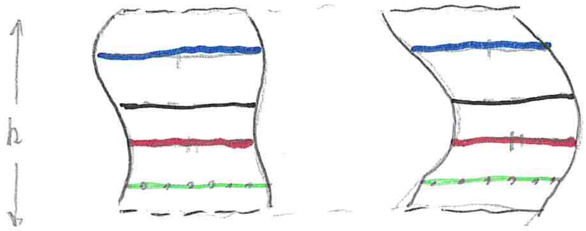
$$\Rightarrow \boxed{\frac{PE}{P\Delta} \sim \frac{A\Delta}{\widehat{\Delta K}}}$$

☆ ma se $X \to \Delta$ $\quad \Delta\hat{P}E \to \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{PE}{P\Delta} \to \frac{\Delta A}{AZ} = \frac{A\Delta}{\widehat{\Delta K}} \Rightarrow \boxed{AZ = \widehat{\Delta K}}$$

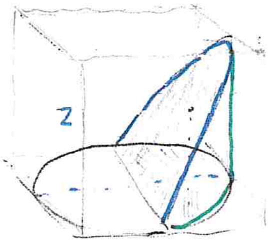
PRINCIPIO DI CAVALIERI $\rightsquigarrow$ TEOREMA DI FUBINI

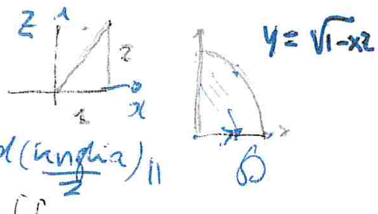
integrali iterati



VOLUMI UGUALI

VOLUME DELL'UNGHIA CILINDRICA





$\frac{vol(unghia)}{2}$

$$\iint_{\Omega} z\, dx\, dy$$

$$\int_0^1 2x\, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$\xi = x^2$
$d\xi = 2x\, dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-\xi}\, d\xi = -\frac{(1-\xi)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \qquad vol(unghia) = \frac{4}{3}$$

$$vol(parall) = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\frac{vol(unghia)}{vol(parall)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

$y=\sqrt{1-\xi}$ è la parabola considerata da Archimede!