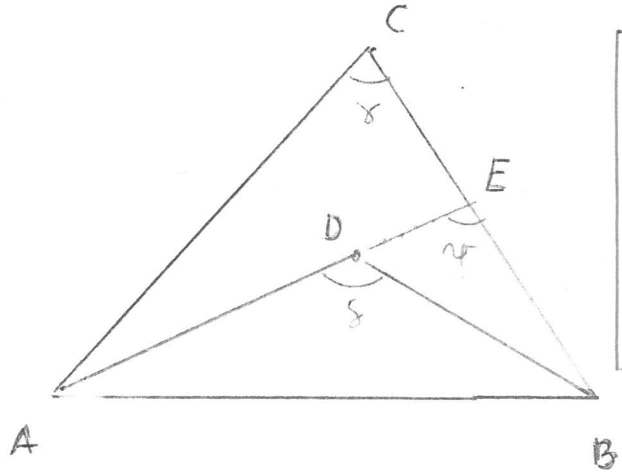
I.21



Con riferimento alla figura

① $\delta > \gamma$

② $AD + DB < AC + CB$

$AC + CE > AE = AD + DE$ (I.20 applicato ad ACE)

$EB + DE > DB$ (I.20 applicato ad EDB)

Pertanto

$$\underbrace{AC + CE + EB}_{CB} + DE > AD + DB + DE$$

$$\Rightarrow \quad AC + CB > AD + DB \quad \text{i.e. } ②$$

① Segue dall'applicazione ripetuta di I.16:

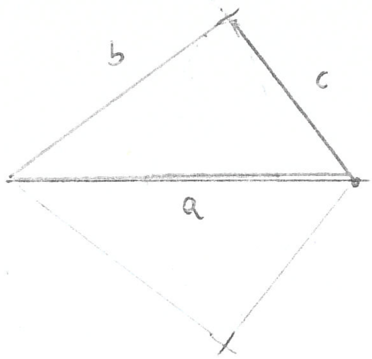
$$\delta > \psi > \gamma \quad \Rightarrow \quad \delta > \gamma$$

I.22 Costruire un triangolo dati i tre lati

(soddisfacenti a priori le disuguaglianze triangolari

Se, per fissare le idee $a > b > c$ e $a < b+c$

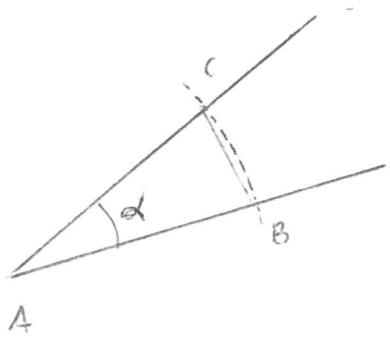
Negli estremi di a si centri con raggio b e c, rispettivamente. Le intersezioni delle relative circonferenze danno luogo, assieme agli estremi di a, a due triangoli con i lati cercati. La disuguaglianza triangolare è cruciale nell'assicurare l'esistenza delle intersezioni.

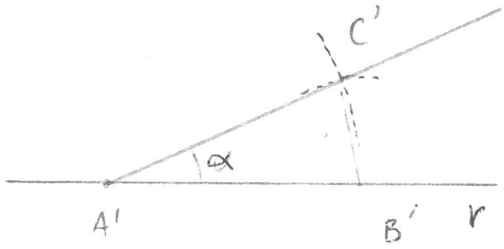


I.23 "Trasporto dell'angolo"

Dato un angolo, determinare un angolo ad esso uguale di dato vertice e lato assegnato, da una parte di questo

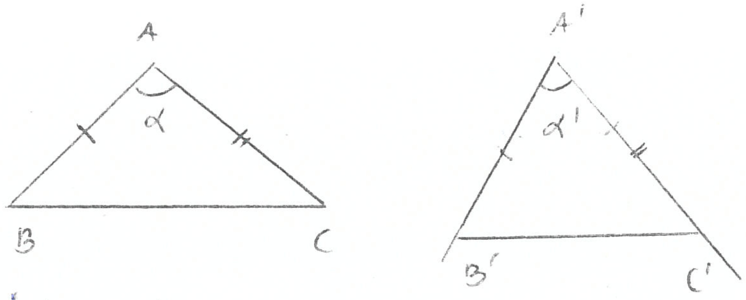
Basta costruire a partire dall'angolo dato un triangolo qualsiasi e ricostruirlo; in particolare si può operare la costruzione seguente:





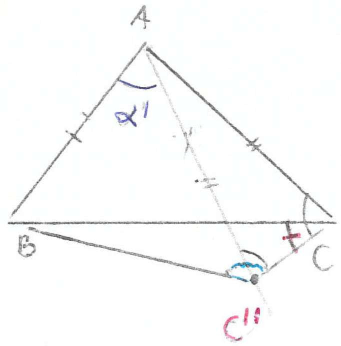
Con centro in A e raggio arbitrario AB si determina C.
Si costruisce A'B'C' congruente al triangolo (isoscele) ABC tramite I.22. La A'C' forma con la r un angolo uguale al dato.

I. 24



In due triangoli con due lati rispettivamente uguali, ad angolo compreso maggiore corrisponde lato maggiore:

$\alpha > \alpha' \Rightarrow BC > B'C'$



Costruito infatti il triangolo ABC'' congruente ad $A''B'C'$ (con $B\hat{A}C'' = B'\hat{A}'C' = \alpha'$) si ha che $A\hat{C}''C = A\hat{C}C''$ (I.5)

Considerato il triangolo BCC'', si ha che $B\hat{C}C'$, opposto a $BC'' = B'C'$, è certamente minore di $B\hat{C}''C$, opposto a BC. Pertanto $BC > B'C'$

I. 25

Nella situazione di I.24, a lato maggiore corrisponde angolo maggiore (è l'inversa di I.24).

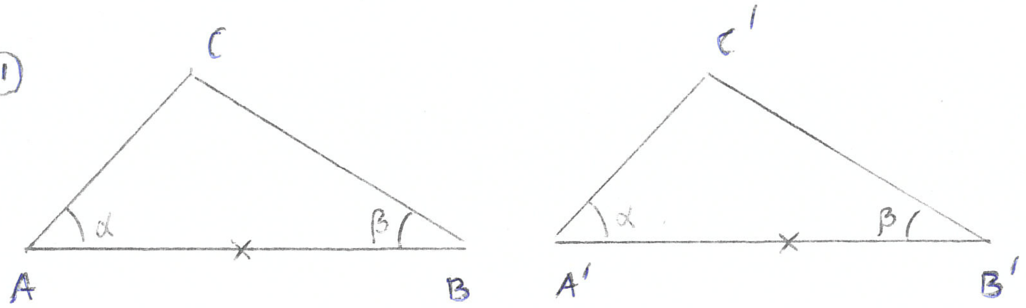
$BC > B'C' \Rightarrow \alpha > \alpha'$

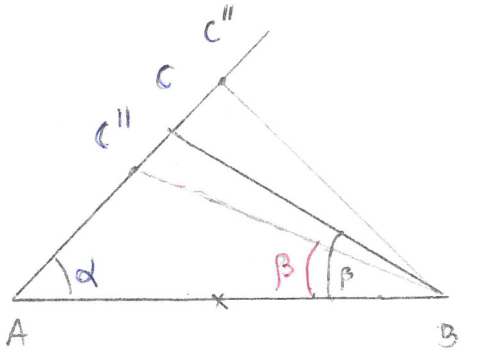
Se fosse $\alpha < \alpha'$, avrei $BC < B'C'$ per I.24, assurda. Se poi $\alpha = \alpha'$, si avrebbe $BC = B'C'$ (I.5), parimenti assurda. Dunque, per tricotomia, deve essere $\alpha > \alpha'$.

I. 26 "2° criterio di uguaglianza (congruenza) dei triangoli"

Due triangoli aventi uguali rispettivamente un lato e i due angoli adiacenti ①, oppure un angolo adiacente e l'altro opposto ②, sono uguali. [In breve: un lato e due angoli egualmente posti rispetto ad esso]

①

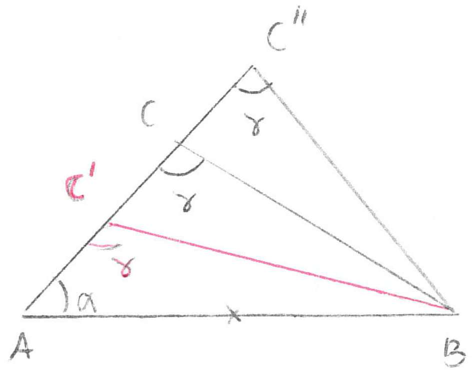




Sovrapponendo A'B'C' ad ABC, se C'' non coincidesse con C si avrebbe un assurdo: $A\hat{B}C'' \lessgtr A\hat{B}C$

ovvero $\beta \gtrless \beta$

②



Se C'' non coincidesse con C, sarebbe contraddetto il teorema dell'angolo esterno:

$A\hat{C}B \gtrless A\hat{C}''B$

$\gamma \gtrless \gamma$