MATEMATICHE COMPLEMENTARI II
Prof. M. Spera - UCSC, Brescia
Lezione **XII**

V2

☆ Il metodo di esaustione in Euclide. Volume di alcuni solidi

Illustriamo il metodo dimostrando

$\boxed{\text{Euclide XII.2}}$

"I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri"

$$\frac{C}{C'} = \frac{Q}{Q'}$$

$$C = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$

approssimazioni di π: tra le altre, quella della frazione continua corrispondente

$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113} \dots$

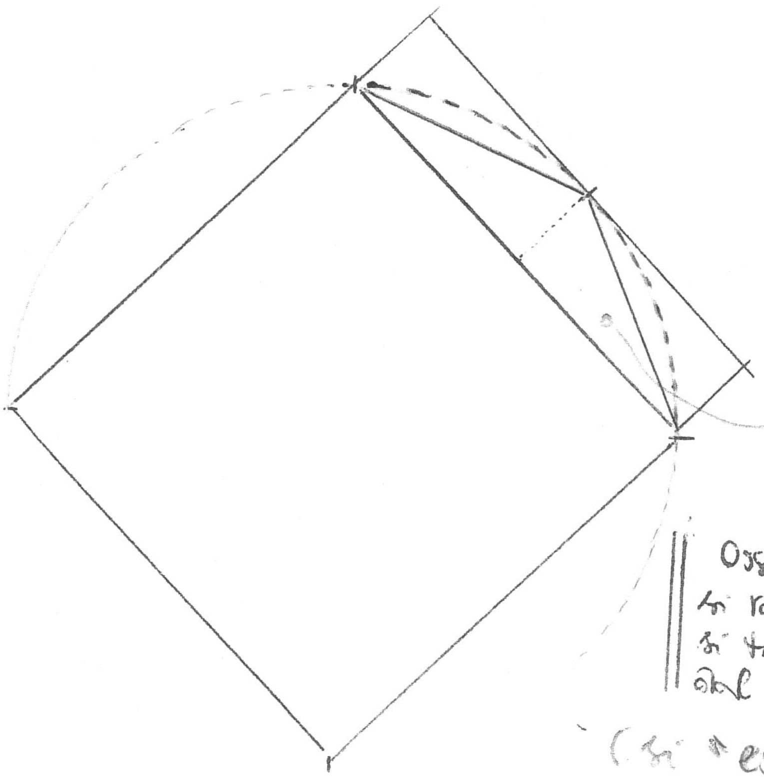
Archimede

0, 2, 4, 6.. cifre decimali esatte, risp.

Il teorema è vero per i poligoni regolari inscritti (o circoscritti) (XII.1).

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{Q}{Q'}$$

sia $n = 2^l$



il triangolo maggiore della metà del segmento circolare residuo, e ciò è vero ad ogni passo.

Ossia: ogni volta che si raddoppia il numero dei lati si toglie, da ciò che rimane dal cerchio, più della metà.

(si "esaurisce" il cerchio)

Da ciò segue facilmente (attraverso Euclide X.1) che, per l sufficientemente grande

$$C_1 - P_{2^l} < \varepsilon$$

grandezza arbitraria (in part. piccola)

La dimostrazione prosegue allora nel seguente modo:

Si ha

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{C}{S}$$

quarta grandezza (V.18)

e si mostra che $S \gtrless C'$ conducono ad una contraddizione.

$\boxed{S < C'}$ Sia $\{P'_n\}$ $(n = 2^l)$ la successione dei 2^l-agoni regolari inscritti in C'. $\exists\, n_0$ tale che, per $n > n_0$

$$C' - P'_n < C' - S$$

$$\Rightarrow \boxed{P'_n > S}$$

$P'_n \quad S \quad P'_n \quad C'$

Ma è altresì:

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{Q}{Q'} = \frac{C}{S} \Rightarrow \frac{P_n}{C_1} = \frac{P'_n}{S}$$

XII.1

$$\Rightarrow \boxed{P'_n < S} \quad (\text{poiché } P_n < C)$$

contraddizione.

Sia allora $\boxed{C' < S}$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{C'}{R} = \frac{S}{C_1} \Rightarrow \frac{C'}{S} = \frac{R}{C_1} \Rightarrow \underbrace{R}_{S} < \underbrace{C_1}_{C'}$$

<u>vecchi</u>: $S \quad C'$

Si ripete allora, mutatis mutandis, la dimostrazione precedente relativa alle grandezze <u>non affette da apici</u>, giungendo nuovamente ad una contraddizione.

Pertanto $\boxed{C' = S}$ e l'assunto è provato.

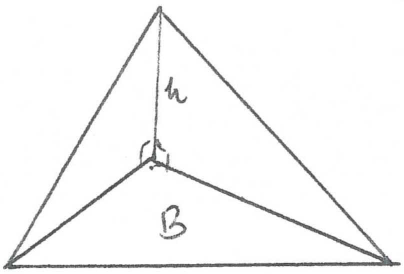
vogliamo ora giungere alla determinazione del "volume" di una piramide: una piramide è $\frac{1}{3}$ di un prisma avente la stessa base e altezza (Euclide XII.7)

☆ Come si arriva a XII.7? (volume della piramide)

Occorre dimostrare prima che

$\boxed{XII.5,6}$ Piramidi di uguale altezza stanno fra loro come le rispettive basi

[ci limitiamo a trattare il caso illustrato in figura: base triangolare, piede del vertice coincidente con uno dei vertici del triangolo. Si passa poi facilmente al caso generale]



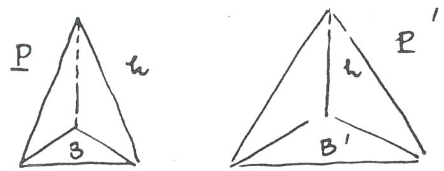
Si assume allora che $\frac{B}{B'} = \frac{P}{W}$ (piramide) e si dimostra che $P' = W$

Per fare questo si procede tramite esaustione, sulla falsariga di XII.2: si inscrivono opportunamente prismi nelle piramidi fino ad "esaurirle", e si utilizza il fatto che il teorema è vero per i prismi (prismi di uguale altezza stanno fra loro come le basi) ciò è descritto in XII.3

Euclide XII

◊ PIRAMIDI E CONI

- Piramidi aventi uguali altezze stanno fra loro come le basi XII.5;6

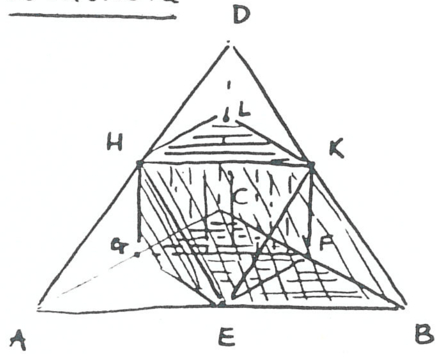


XII-5

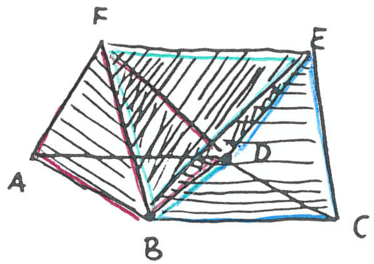
si assume $\frac{B}{B'} = \frac{P}{W}$ e si prova che $W = P'$

riconducendosi all'analogo risultato per i prismi

★ via esaustione



XII.3



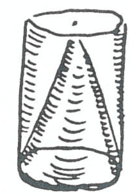
$$\underbrace{ABC.D}_{\text{piramide}} = \underbrace{AGE.H + HKL.D}_{\text{piramidi uguali}} + \underbrace{HKBEGF + HLKFCG}_{\text{prismi uguali}}$$

infatti: $\begin{cases} GECHKL > HKL.D \text{ e} \\ GFBEHK > EFB.K = AGE.H \end{cases}$ $\qquad > \frac{1}{2}$ piramide

† Algoritmo: vol(prismi) $= \frac{Bh}{4}$;

iterando vol(pir) $= Bh\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{1}{3}Bh$

- un cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza XII.10



sia $Cil > 3\,Co$

$Cil - 3\,Co = D$

si inscrivano Prismi nel cilindro e sia

$$Cil - Pri < D = Cil - 3\,Co$$

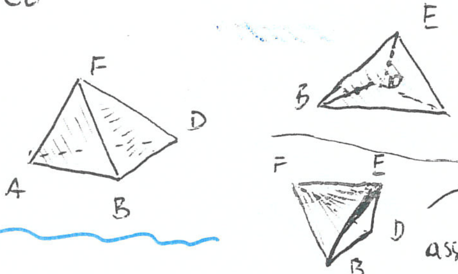
$$\Rightarrow \quad Pri > 3\,Co$$

ma $Pri = 3\,Pir < 3\,Co$

se invece $Cil < 3\,Co$, circoscrivendo prismi al cilindro si arriva a $Cil > 3\,Co$, nuova contraddizione. Dunque effettivamente è $Cil = 3\,Co$

XII.7 per basi triangolari

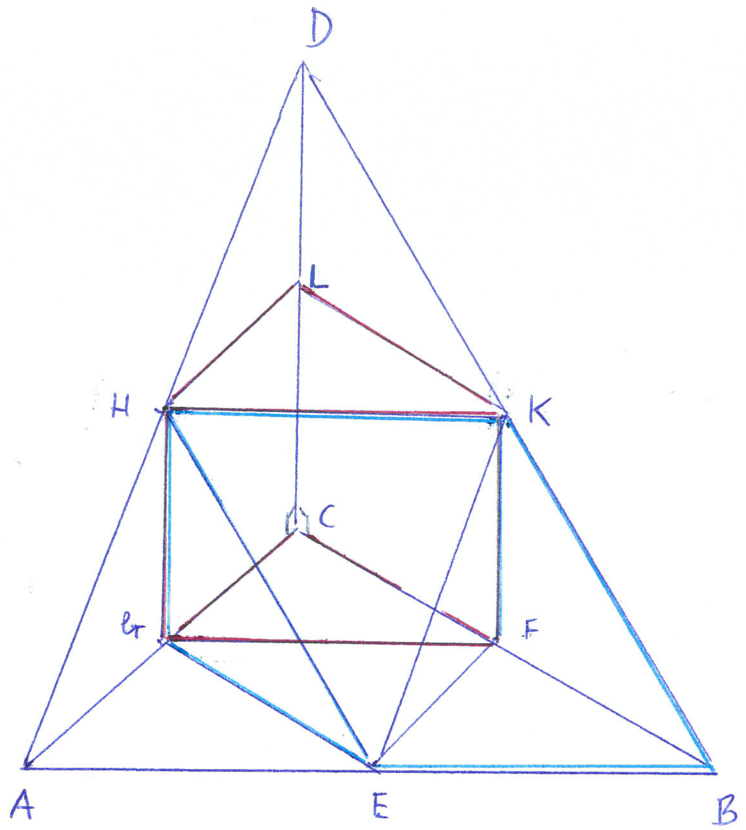
un prisma è tre volte una piramide di ugual base e altezza



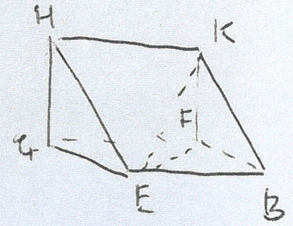
uguali volume; assieme danno prism

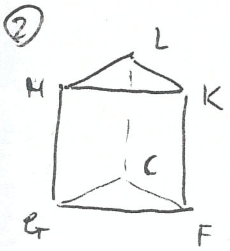
ATTENZIONE: esistono solidi di ugual volume non scomponibili in parti congruenti (Dehn)

Contrariamente al caso piano. È quindi impossibile fare a meno del metodo di esaustione.


D
L
H
K
C
G
F
A
E
B

Dettagli su XII.3

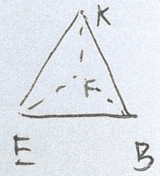
① 

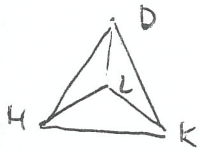
$+$ ② 

$> \frac{1}{2}$ piramide

$\vee$ $\vee$

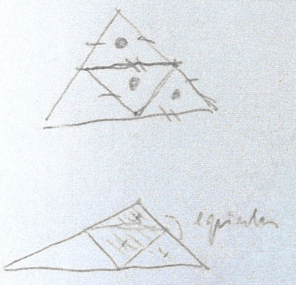
infatti:

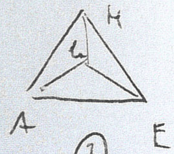




④

$\shortparallel$



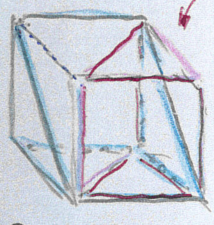


③

⚠ il prisma "retrostante" spostato

è pari ① = ②

lo stesso parallelepipedo tagliato a metà in due modi



① + ② + ③ + ④ = piramide

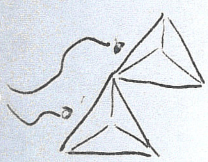
① + ② > ③ + ④

$\Rightarrow$ ① + ② $> \frac{1}{2}$ piramide

$$\mathrm{Vol}(① + ②) = Bh \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} Bh$$

Si itera ...

Si inscrivono prismi



$$\mathrm{Vol}(\text{nuovi prismi}) = \frac{Bh}{4}\Big(\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{4}}\Big) = \frac{Bh}{4^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Vol}(\mathrm{Pir}) = Bh\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) = \frac{1}{3} Bh$$

$|x| < 1$

formalmente:

$1 + x + x^2 + \dots = y$

$y - 1 = x + x^2 + \dots = x(1 + x + \dots) = xy$

$\Rightarrow y - 1 = xy \qquad y(1-x) = 1$

$y = \frac{1}{1-x}$

in modo rigoroso:

$1 + x + \dots x^N = \frac{x^N - 1}{x - 1} = \frac{x^N}{x-1} + \frac{1}{1-x}$

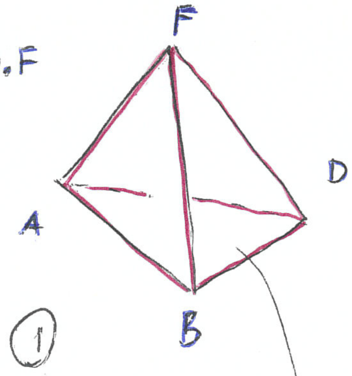
$\frac{x^N}{x-1} \xrightarrow{N \to \infty} 0$

$\Rightarrow 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$

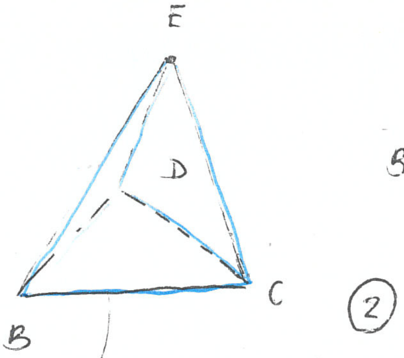
"un prisma è tre volte una piramide di uguale base e altezza"

ulteriori dettagli:

ABD.F



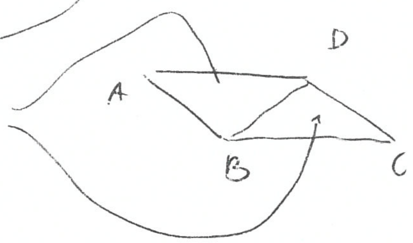
=

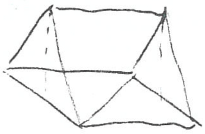


BDC.E

basi uguali (metà di uno stesso parallelogramma)

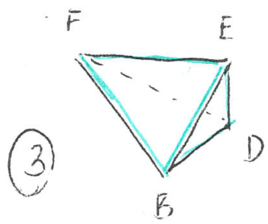
e uguale altezza



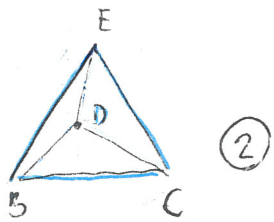


⚠ È necessario il risultato precedente!

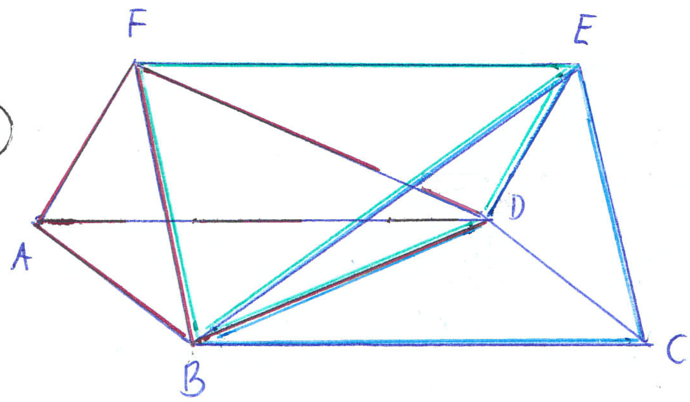
è pure FEB.D = BEC.D (vertice)



=

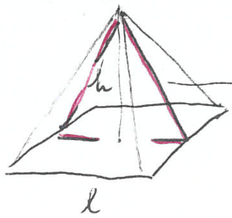


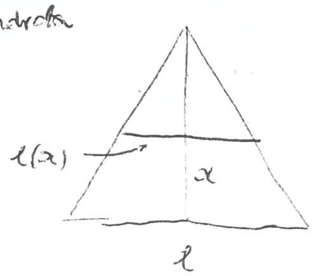
$\Rightarrow$ ① = ② = ③



volume della piramide tramite il teorema di Fubini (- Cavalieri)

poniamoci nel caso standard
piramide retta, a base quadrata



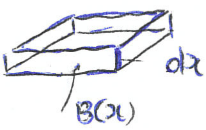


$$l(x) = \left(1 - \frac{x}{h}\right) l \qquad \text{(Talete)}$$

$$B(x) = l^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \qquad B(0) = B = l^2$$

area del quadrato a "quota" x

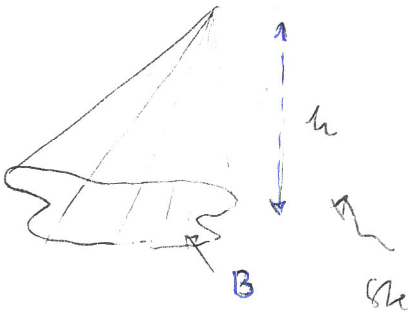
$$\boxed{V = \int_0^h B(x)\,dx} = l^2 \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx$$



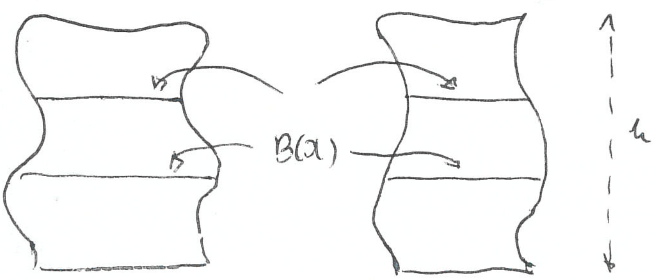
$$= l^2 \left. \frac{\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3 (-h)}{3} \right|_0^h$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} l^2 h}$$

tale formula è generale



stessa formula: $V = \frac{1}{3} B h$



stesso volume

("Principio di Cavalieri")

già presente nel "Metodo" di Archimede (ritrovato alla fine del XIX secolo

Teorema di Fubini (principio di Cavalieri generalizzato)

Sia f continua in Q (rettangolo chiuso)

Allora f è integrabile$^{(+)}$ e vale la formula di riduzione

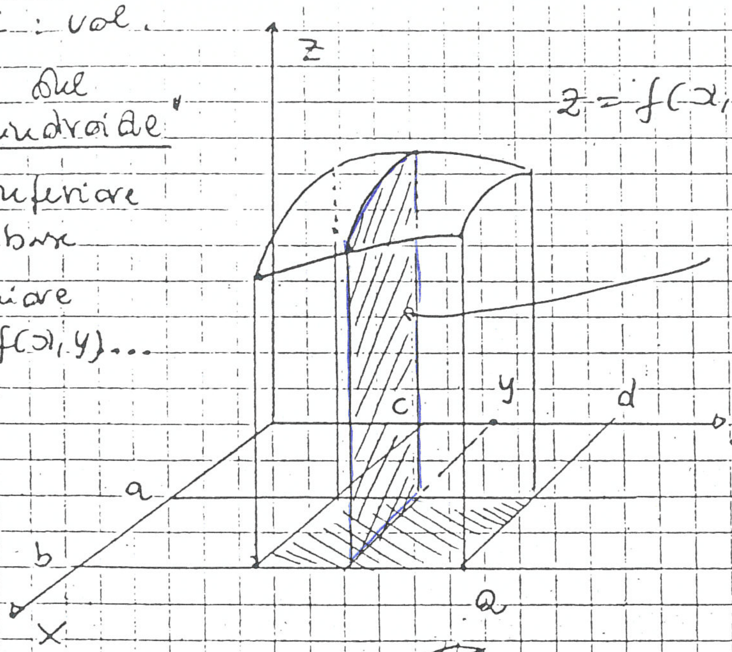
(+) alla Riemann o Lebesgue

$$\boxed{\iint_Q f = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right)}$$

$$\boxed{\left(= \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) \right)}$$

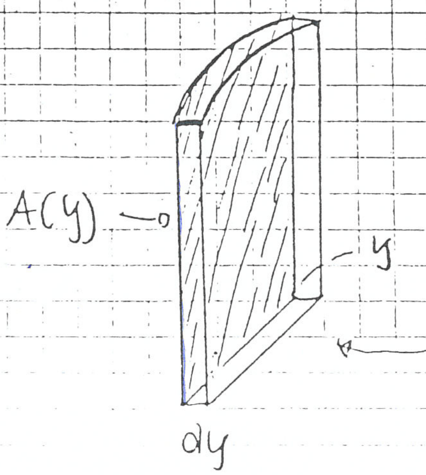
Intuitivamente: (poniamo $f \geq 0$)

$\iint_Q f$: vol. del "cilindroide" base inferiore Q; base superiore $z = f(x,y)$...



$\int_a^b f(x,y)\, dx =: A(y)$

= area del trapezoide ottenuto sezionando il cilindroide con il piano $Y = y$



"volume = Σ volumi elementari"

$$\iint_Q f = \int_c^d A(y)\, dy$$