Note del corso di

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro SPERA UCSC Brescia

V2

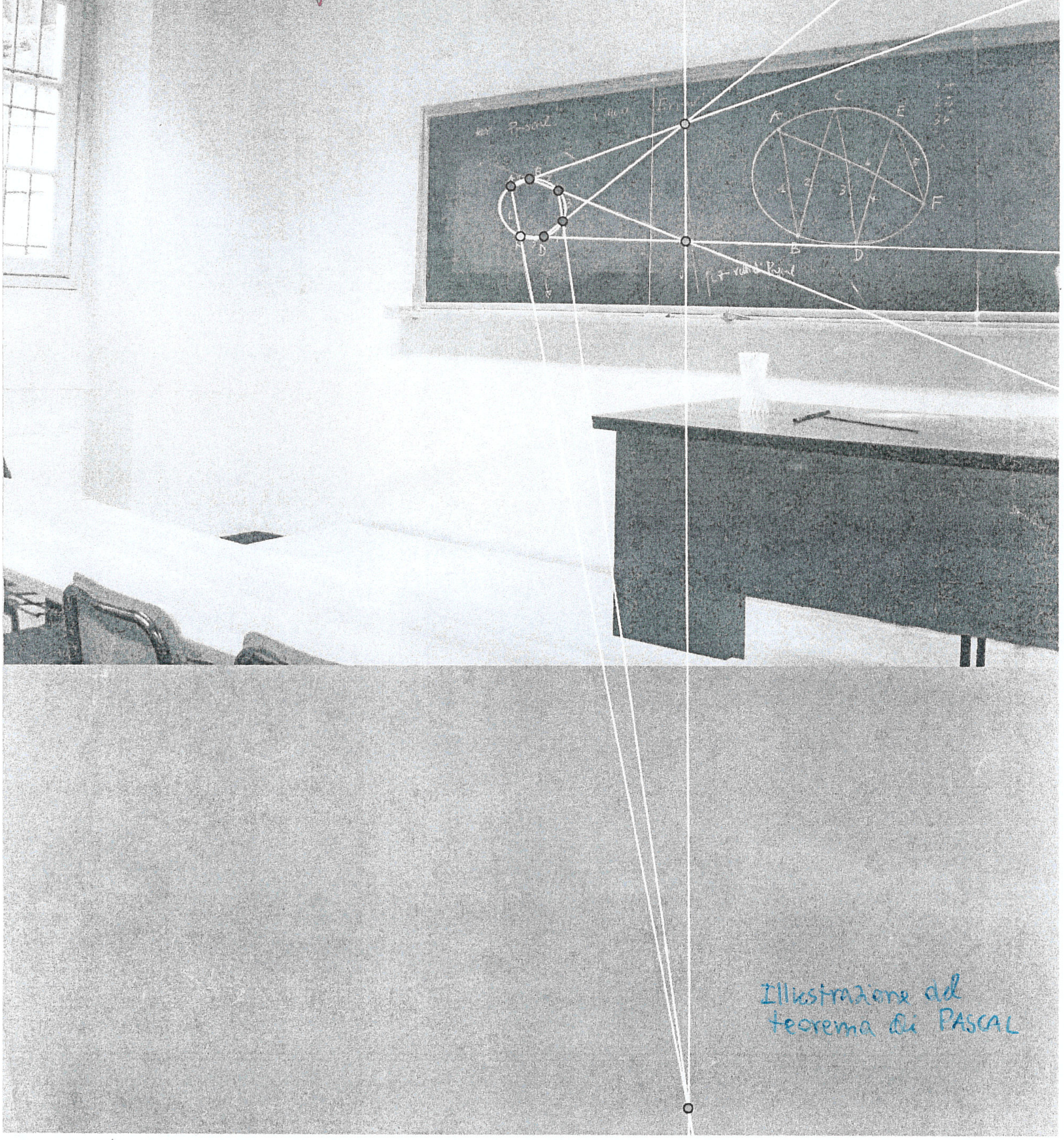


Illustrazione del teorema di PASCAL

- Gli "Elementi" di Euclide. Teoremi di Saccheri-Legendre
- Geometria proiettiva. Modello di Beltrami-Klein del piano iperbolico
- I "Grundlagen der Geometrie" di Hilbert

V2

- La scienza ellenistica
- I cinque postulati di Euclide
- Analisi e sintesi

Lezione I

Considerazioni introduttive

L'importanza dell'opera di Euclide non è in alcun modo sovrastimabile. Essa inaugura la grande stagione della scienza ellenistica (si può a ragione parlare di "rivoluzione scientifica" ellenistica (L. Russo)), caratterizzata dal passaggio dalla "filosofia della natura" (presocratici) alla "scienza della natura" (come avvenne di fatto dal Rinascimento in poi), [con uno slittamento dall'idealismo platonico al nominalismo] imperniata sulla geometria. Schematicamente, i caratteri principali della scienza ellenistica sono i seguenti

- Geometria come sistema ipotetico-deduttivo (si astrae dalle operazioni del disegno), agganciato comunque all'intuizione. Si opera una distinzione tra assiomi (teoremi presupposti) e postulati (costruzioni presupposte)

- Nasce il concetto di modello teorico, con regole di corrispondenza con la realtà non univoche (i.e. uno stesso modello può descrivere ambiti di esperienza diversi)
- Nasce la tecnologia scientifica, ovvero la progettazione di macchine (cf. Archimede)

all'interno di una teoria (uno strumento scientifico è essenzialmente un "teorema in atto")

In un modello teorico i concetti sono "segni" delle cose, non le cose stesse (+) v. box

(cf. la concezione della matematica di Cartesio:

"Dovrebbe esistere una scienza generale che spieghi tutto quello che si può conoscere sull'ordine e sulla misura, considerate indipendentemente da ogni applicazione ad un particolare soggetto ... e invero questa scienza ha un nome proprio, consacrato da un lungo uso, vale a dire matematica"

Nella filosofia ellenistica (cf. Crisippo) si distingue tra

- "portatore del nome" ex: Euclide stesso
- "significante" elemento grafico, fonema...
- "significato" "Euclide" come oggetto di discorso

* una teoria verte sui significati

(+) In realtà, l'atteggiamento di un ricercatore scientifico è di fatto "platonico": gli oggetti di scienza sono percepiti come esistenti in sé.

- Il rigore, oltre ad essere importante in sé stesso, è garanzia di comunicabilità [non è estraneo ad altre culture, cf. l'"upapatti" indiana]

- La matematica ellenistica è sia pura sia applicata; in ogni caso è improntata al costruttivismo
- Euclide stesso è autore, tra le altre, di opere come l'Ottica e i Fenomeni (elementi di astronomia). L'Ottica costituisce di fatto il primo trattato conosciuto di fisica matematica

Gli assiomi della geometria euclidea nel piano

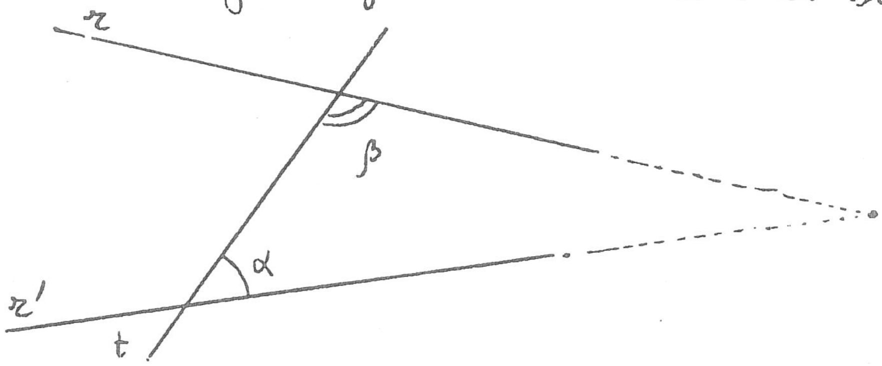
I. "Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad un altro punto."

II. "E che una retta terminata [segmento] si possa prolungare continuamente in linea retta."

III. "E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza [raggio]."

IV. "E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro."

V. "E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui gli angoli sono minori di due retti."



- Commenti

1. Agli assiomi dati andrebbero aggiunti altri "nascosti", come quelli relativi all'ordine e alla continuità, che vengono utilizzati implicitamente.

   Un sistema di assiomi completo e più preciso è stato fornito da Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 1899) come vedremo in seguito.

2. È però chiaro che gli assiomi di Euclide abbiano una grande evidenza intuitiva (tranne l'ultimo, e sono noti gli sforzi protrattisi per secoli vòlti a dedurlo dagli altri,(+) il fallimento dei quali ha portato alla nascita delle cosiddette <u>geometrie non euclidee</u>) e idealizzino le operazioni del disegno. (+) È stato di fatto rimpiazzato da postulati equivalenti, come vedremo

3. In geometria euclidea, come apparirà chiaro dagli esempi seguenti, i teoremi sono espressi essenzialmente sotto forma di problemi di <u>costruzione</u>.
L'effettiva costruzione di una figura, accompagnata dalla giustificazione razionale (a partire dagli assiomi, o da teoremi precedenti, che comunque a questi risalgono) è detta <u>sintesi</u>.
L'<u>analisi</u>, per contro, è il procedimento, di enorme valore euristico, di assumere <u>già costruita</u> la figura e di dedurne da ciò delle proprietà che poi ne consentano l'effettiva costruzione. Nei classici trattati greci è spesso assente, ma il suo ruolo insostituibile traspare comunque.
Questa distinzione getta luce sull'origine dei termini <u>geometria sintetica</u> (riferito appunto alla geometria classica) e <u>geometria analitica</u> (ovvero, tramite l'uso delle "coordinate").

In termini moderni, lo studio algebrico consente di <u>ripristinare la sintesi</u> classica.

4. La matematica moderna ha carattere <u>ipotetico-deduttivo</u>
In una data teoria, gli assiomi descrivono <u>implicitamente</u> i suoi <u>concetti primitivi</u> (non necessariamente agganciati all'intuizione) e stabiliscono le "regole del gioco":

un teorema della teoria è una qualsiasi asserzione che possa essere dedotta logicamente dagli assiomi.

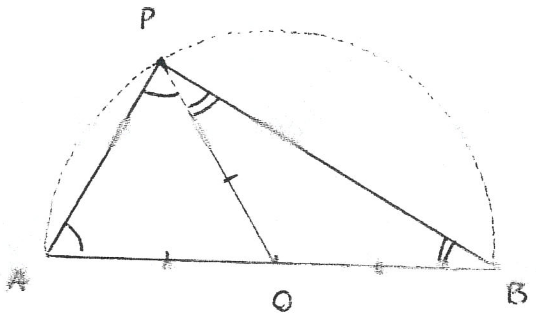
Non ha senso parlare di "verità" degli assiomi in senso assoluto, ma solo di consistenza di questi (raggiunta esibendo un modello in un'altra teoria, in cui gli assiomi divengano affermazioni vere.

5. L'intuizione gioca comunque un ruolo fondamentale nella creazione matematica: non è un caso che Hilbert abbia anche scritto il bellissimo "Anschauliche Geometrie" (geometria intuitiva), quasi a ricordarci che in ogni caso la matematica non si riduce ad un vuoto formalismo senza "contenuti".

* Alcuni problemi di costruzione

* Ogni angolo che insista su una semicirconferenza è retto

Con riferimento alla figura accanto, da $\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OB}$ segue subito



$\hat{A} = A\hat{P}O$, $\hat{B} = O\hat{P}B$. Ma, da $\hat{A} + \hat{P} + \hat{B} = 2$ retti (*)

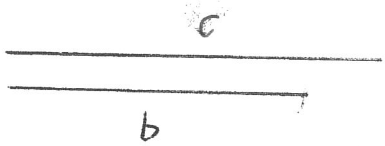
segue che $2\hat{P} = 2$ retti, cioè $\hat{P}$ è retto □

(*) Dimostrarlo

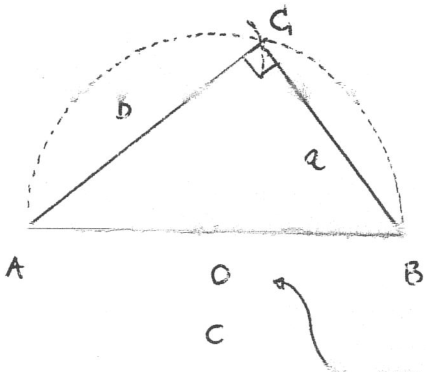
Possiamo ora risolvere facilmente il seguente

Problema: costruire un triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un cateto

Soluzione:



ipotenusa
cateto



come si costruisce O?

Sia $\overline{AB} = c$. Si consideri la circonferenza di diametro $\overline{AB}$, sia O il suo centro. Si costruisca la circonferenza di centro A e raggio b: essa incontra la prima in due punti (in figura se ne mostra solo uno, C). ABC è un triangolo rettangolo, in base al teorema precedente.

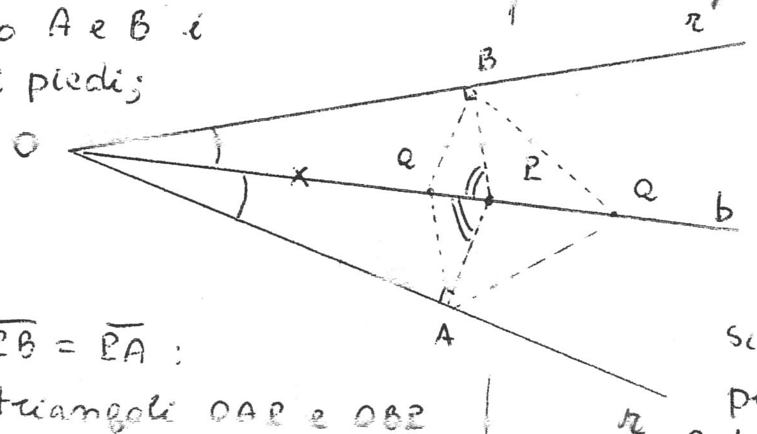
Quali assiomi sono stati utilizzati nel corso di questa dimostrazione?

- Costruzione della bisettrice di un angolo dato

Procediamo in due passi:

- Analisi Immaginiamola già costruita (Si veda la figura)

Se da P su b tracciamo le perpendicolari a r e r' (*) e siano A e B i rispettivi piedi;



si ha $\overline{PB} = \overline{PA}$: infatti i triangoli OAP e OBP hanno in comune il lato OP e $P\hat{O}B = P\hat{O}A$ e $O\hat{B}P = O\hat{A}P$ è retto, e pertanto risultano congruenti in base al 2° criterio di uguaglianza dei triangoli, da cui appunto $\overline{PB} = \overline{PA}$ e anche $\overline{OB} = \overline{OA}$;

si osservi pure che $\overline{QB} = \overline{QA}$ per qualsiasi $Q \in b$.

Pertanto b, se esiste (nel senso che è possibile costruirla), è il luogo dei punti equidistanti da r e r'.

(*) Se ne fornisca una costruzione, per esercizio