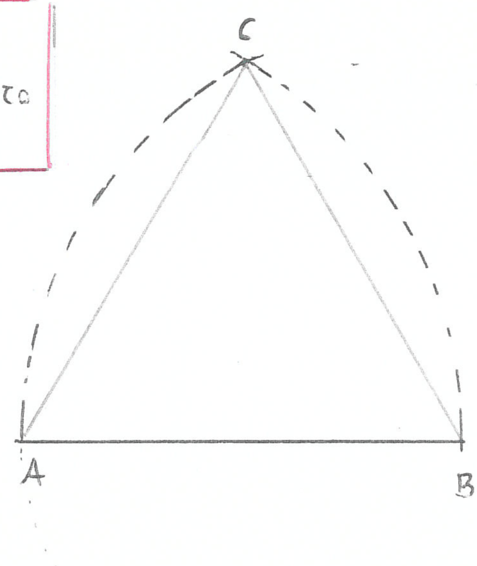
Il I° libro di Euclide

• Teoremi 1 — 9

I.1 Costruire un triangolo equilatero dato il lato

★ Tale costruzione è cruciale nell'economia degli Elementi



È la costruzione ben nota: centrando in A e B con raggi[o] le circonferenze otte[nute] si incontrano in C (e nel suo simmetrico rispetto ad AB)

ABC è ovviamente equilatero

⚠ Si tratta essenzialmente di un **nuovo postulato**: non si può concludere che C (ed il suo simmetrico) esistano

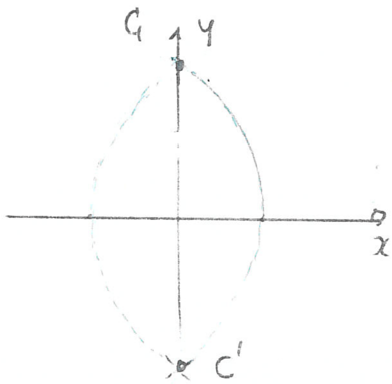
Ad esempio, operando nel piano cartesiano $\mathbb{Q}^2$, consideriamo le circonferenze $\mathcal{C}_1: (x+\frac{1}{2})^2+y^2=1$, $\mathcal{C}_2: (x-\frac{1}{2})^2+y^2=1$

Determiniamo $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$: si trova successivamente $(x+\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2=$

$=(x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2})=0$ $\quad \{a^2-b^2=(a+b)(a-b)\}$

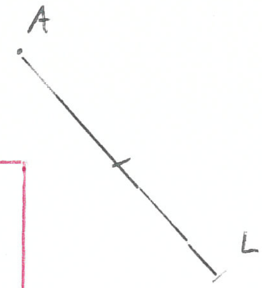
$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y^2+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow y^2=\frac{3}{4},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{C, C'\}$, $C: (0, +\frac{\sqrt{3}}{2})$ $C' = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$



Ma C, C' non hanno coordinate entrambe razionali.

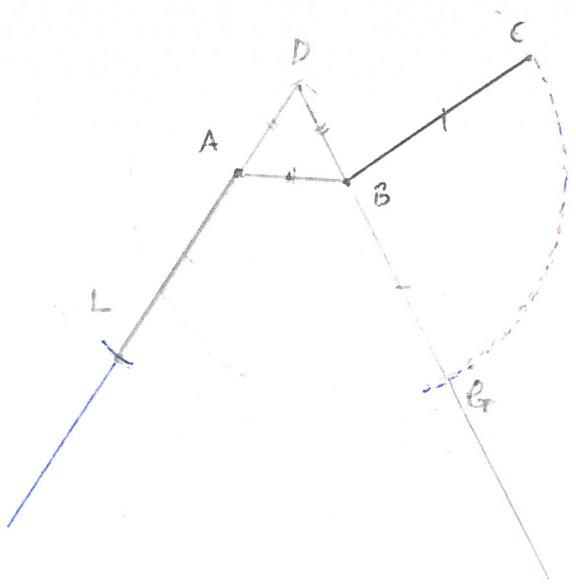
I.2 "trasporto del segmento" (1)



Dato BC, costruire AL = BC in A, fissato

⚠ Si usa un compasso a punte mobili

★ sintesi:



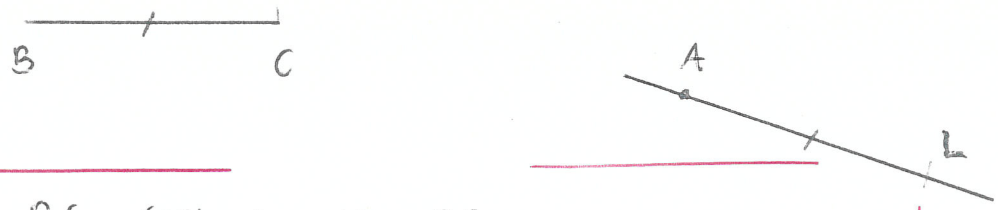
costruzione

- Si traccia la circonferenza di centro B e raggio BC.
- su AB si costruisce il triangolo equilatero ABD.
- Si prolunga DB fino ad incontrare la circonferenza precedente in G.
- Si costruisce la circonferenza di centro D e raggio DG
- Si prolunga DA fino ad incontrare quest'ultima in L
- AL è il segmento cercato

giustificazione

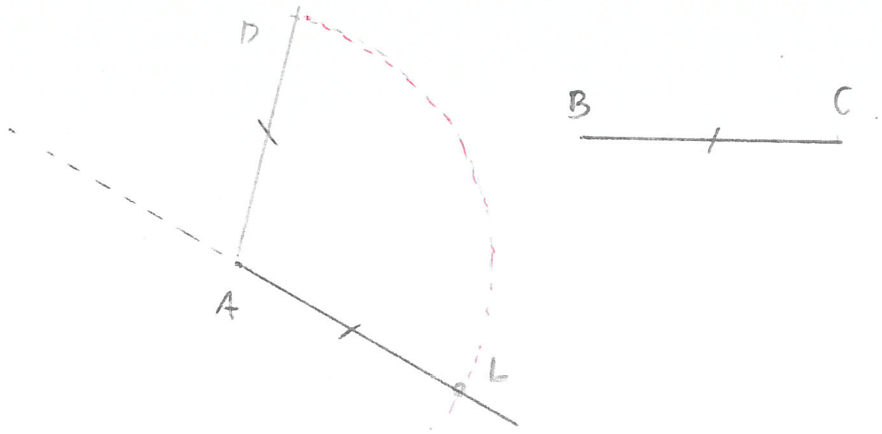
AL = BC poiché AD = DB (costruzione) e DL = DG (costruzione), e differenze di segmenti uguali sono uguali
congruenti congruenti

I.3 "trasporto di un segmento" (2)



Data BC, costruire $AL = BC$ su una retta data, da una parte di A prefissata.

Si costruisce $AD = BC$ in A (tramite I.2), quindi si considera la circonferenza di centro A e raggio AD, che incontra la retta data in due punti.

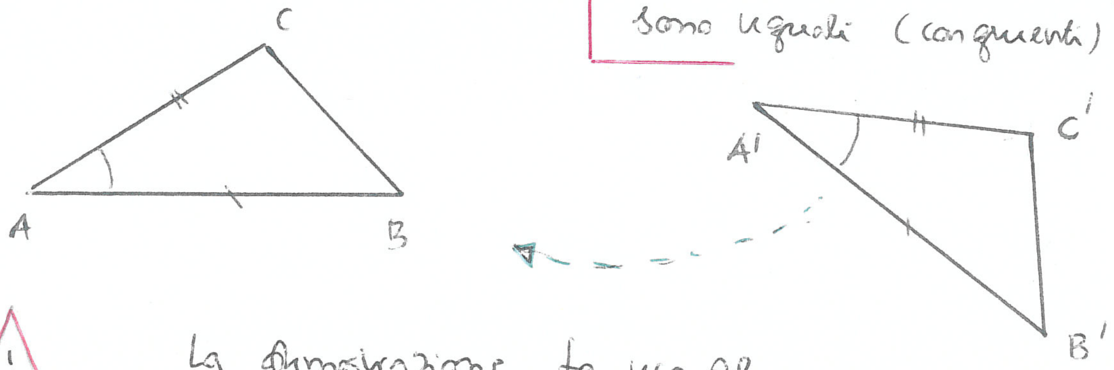


Conseguenza: col compasso "antico" (e riga) e col compasso "moderno" (a punte fisse) (e riga) si effettuano le stesse costruzioni

* I.3 risolve il problema del trasporto del segmento

I.4 "I° criterio di uguaglianza (congruenza) dei triangoli"

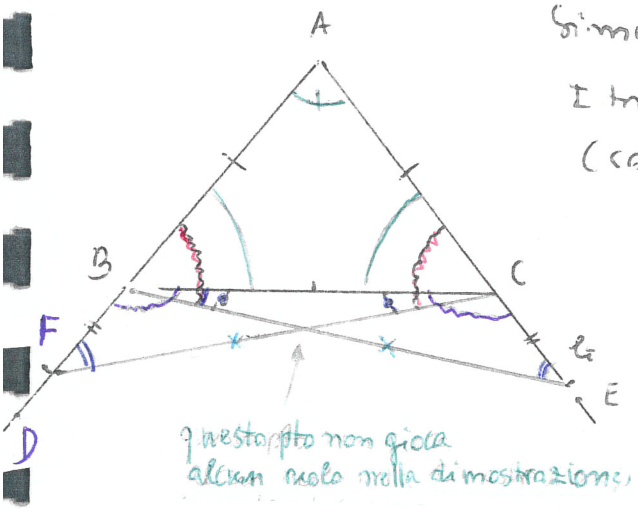
> triangoli aventi uguali (congruenti) due lati e l'angolo compreso sono uguali (congruenti)



⚠ La dimostrazione fa uso del concetto di *movimento*: si porta $A'B'C'$ a coincidere con ABC; di fatto, è un nuovo postulato

I.5 "Pons asinorum": in un triangolo isoscele gli angoli alla base e sotto la base sono uguali

⚠ L'angolo piatto non è considerato un angolo da Euclide (né da Hilbert)



Sia ABC isoscele ($AB = AC$; base: BC)

Siano F, G su AD, AE tali che $BF = CG$

I triangoli AFC e ABG sono uguali (congruenti) (I° criterio) $\Rightarrow$

$B\hat{F}C = B\hat{G}C$ e $BG = FC$

$\Rightarrow$ BFC e BGC sono congruenti (I.4)

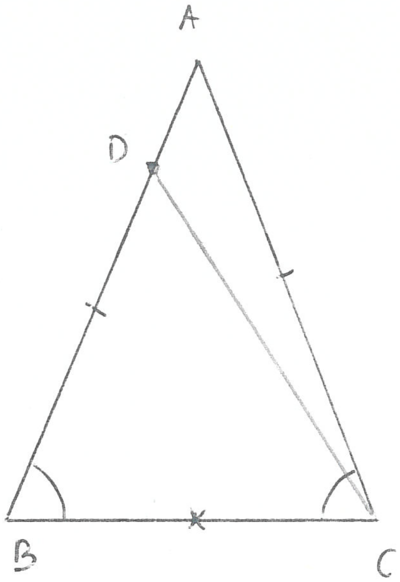
$\Rightarrow$ $\boxed{E\hat{B}C = B\hat{C}G}$ gli angoli sotto la base sono uguali

E' pure $G\hat{B}C = B\hat{C}F$. Ma poichè $G\hat{B}A = F\hat{C}A$ è pure $\boxed{A\hat{B}C = A\hat{C}B}$ (per differenza). □

	ipotesi	tesi	
	$I \to T$		diretta
logicamente equivalenti	$T \to I$		inversa
	$-I \to -T$		contraria
	$-T \to -I$		contronominale

I. 6 Se in un triangolo gli angoli alla base sono uguali, allora è isoscele

È l'inversa di I.5, ed è la prima proposizione degli Elementi dimostrata per assurdo (v. schema; si nega la tesi, e si giunge alla negazione dell'ipotesi, o comunque ad una contraddizione)



$$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$$

Per assurdo, sia $AB \neq AC$ (nego la tesi) e, per fissare le idee, risulti $AC < AB$

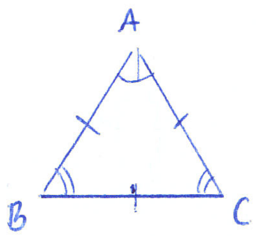
Sia D su AB tale che $BD = AC$

I triangoli DBC e BCA sono uguali (I.4) [BC in comune, $AC = BD$ (costruzione) e $\hat{B} = \hat{C}$ per ipotesi]

ma ciò è assurdo (D dovrebbe allora coincidere con A)

★ Commento La dimostrazione di Pappo (III sec. d.C) procede così:

cf. Hilbert



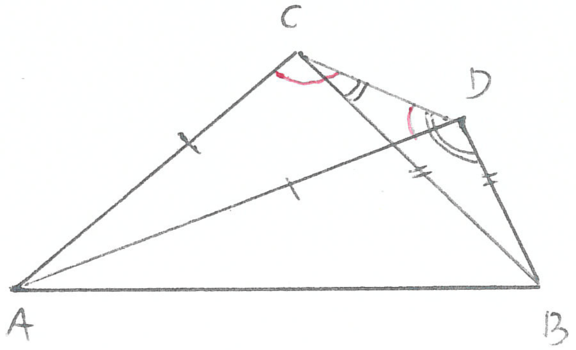
ABC è congruente ad ACB (per I.4)

$\Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B$

I.7 [È "quasi" il III° criterio]

Non è possibile, dato ABC, costruire, dalla stessa parte di AB, un triangolo ABD con i lati uguali a quelli di ABC (con i lati rispettivamente uguali uscenti dagli stessi vertici)

★ In altre parole, la figura sottostante è una figura impossibile.



Infatti, se $AC = AD$, allora $A\hat{C}D = C\hat{D}A$ (I.5)

e

$B\hat{C}D = C\hat{D}B$

Ma $A\hat{C}D > B\hat{C}D = C\hat{D}B$

$$\underset{C\hat{D}A}{\overset{\|}{A\hat{C}D}} > B\hat{C}D = \underset{C\hat{D}A}{\overset{\vee}{C\hat{D}B}}$$

ovvero $C\hat{D}A > C\hat{D}A$, assurdo

I.8 "III° criterio di uguaglianza dei triangoli"

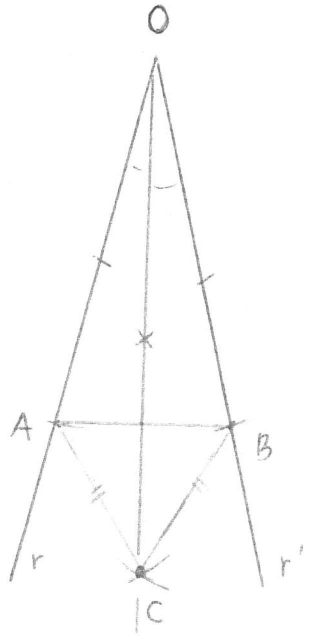
Due triangoli aventi ordinatamente uguali i tre lati sono congruenti

Se non lo fossero, si potrebbe costruire una "figura impossibile", vietata da I.7.

I.9

Bisecare un angolo dato.

È essenzialmente la costruzione già discussa:



Presi A e B con OA = OB e costruito il triangolo equilatero ABC (I.1), i triangoli AOC e OCB risultano congruenti (I.8) sicché $A\hat{O}C = C\hat{O}B$ come richiesto