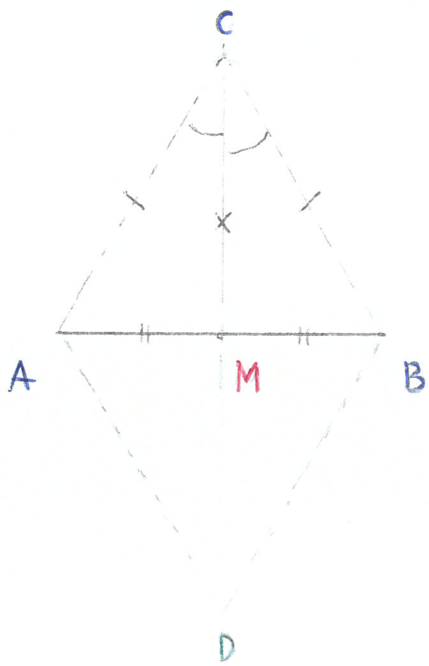
V2

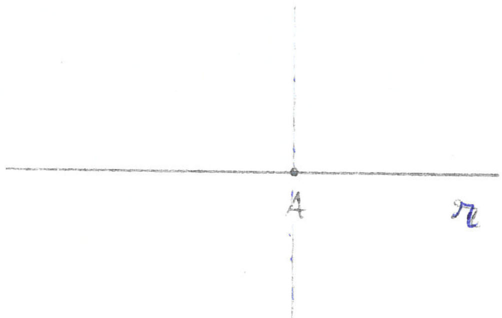
I.10 "Bisecare un segmento"

Costruito su AB il triangolo equilatero ABC, si biseca $\hat{C}$ (I.9)

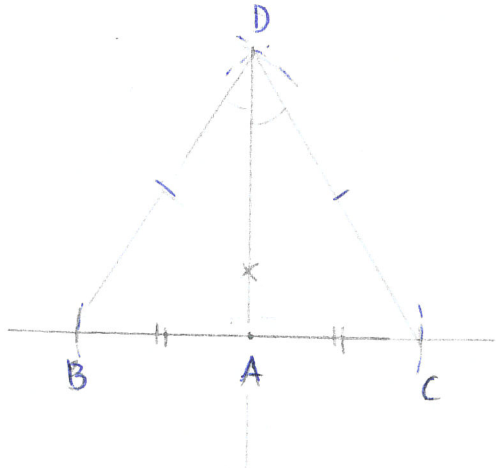


CD interseca AB in M, che è il pto medio cercato, come subito segue da I.4 applicato ad ACM e BCM

I.11



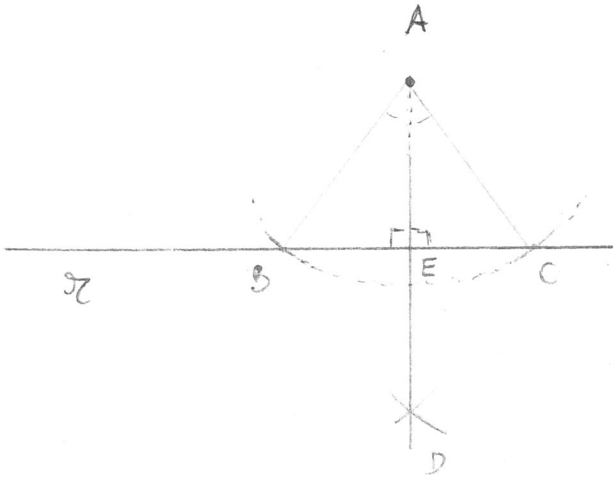
"Innalzare da A la perpendicolare ad una retta data"



Costruito il triangolo equilatero BCD e tracciata AD, questa è la perpendicolare richiesta: infatti per I.8: ABD e ACD sono congruenti ("3° criterio") sicché $B\hat{D}A = A\hat{D}C$ (AD biseca $B\hat{D}C$) e $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ i.e. la trasversale AD forma con la retta data BC angoli uguali, dunque retti (per definizione).

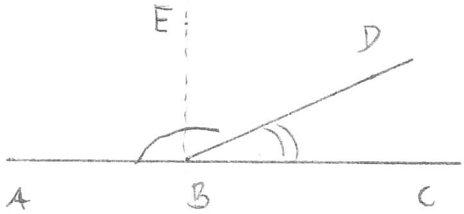
I. 12

"Abbassare la perpendicolare ad una retta da un punto esterno ad essa"



Centrando in A con raggio opportuno si determinano su r i pti B e C (⚠), quindi si biseca $B\hat{A}C$ e si conclude facilmente che $B\hat{E}A = A\hat{E}C =$ retto.

I. 13



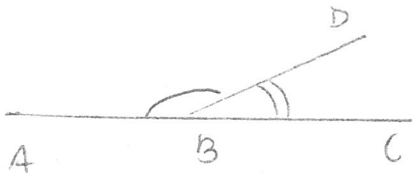
"La somma di due angoli adiacenti vale due retti"

⚠ L'angolo piatto non è considerato un angolo

Tracciata BE perpendicolare ad AC in B

è $A\hat{B}D + C\hat{B}D = A\hat{B}E + C\hat{B}E = 2$ retti

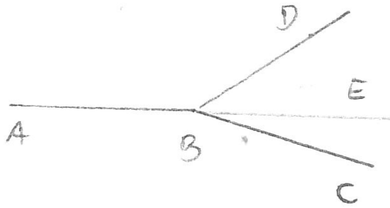
I. 14



(viceversa),

se $B\hat{A}D + C\hat{B}D = \pi$

A, B e C sono allineati ("per diritto fra loro")!



p.a. non lo siano e sia AE il prol. di AB

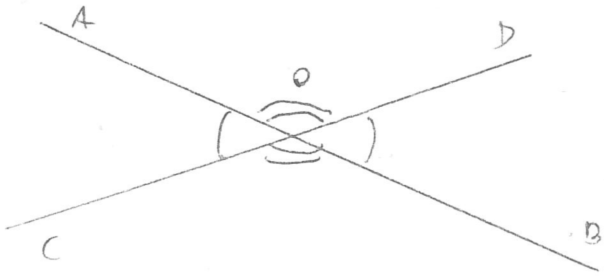
Allora $A\hat{B}D + E\hat{D}D = \pi$

$= A\hat{B}D + C\hat{B}D$

$\Rightarrow D\hat{B}C = E\hat{B}C$ che è assurdo

$\boxed{\text{I.15}}$

"Angoli opposti al vertice sono uguali"



$$\hat{AOC} + \hat{AOD} = \pi = \hat{AOD} + \hat{DOB}$$

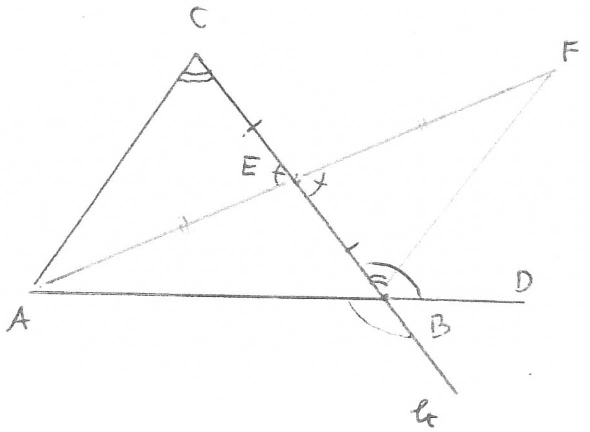
$\Rightarrow$ $$\hat{AOC} = \hat{DOB}$$

similmente $\hat{AOD} = \hat{COB}$

I.16 Teorema dell'angolo esterno

importantissimo nell'economia degli Elementi

In un triangolo un angolo **esterno** (i.e. un angolo formato da un lato e dal **prolungamento** di un altro lato) è **maggiore** di ciascuno degli angoli (interni) del triangolo **non adiacenti** ad esso.



Con riferimento alla figura, vogliamo dimostrare che

$D\hat{B}C > \hat{A}$ $(B\hat{A}C)$

$D\hat{B}C > \hat{C}$ $(A\hat{C}B)$

Bisechiamo CB, e sia E il punto medio di CB.

Prolunghiamo AE in F, in modo che $AE = EF$.

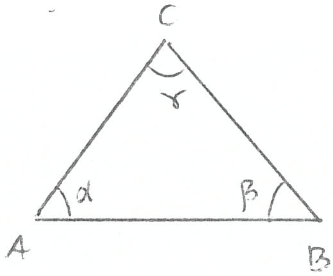
I triangoli AEC e BEF sono congruenti per il I criterio ($A\hat{E}C = B\hat{E}F$ perché opposti al vertice, $CE = EB$ e $AE = EF$ per costruzione)

e pertanto $A\hat{C}E = E\hat{B}F < E\hat{B}D$ (angolo esterno)

Passando all'angolo $A\hat{B}G = C\hat{B}D$ e ragionando come prima, concludiamo che $B\hat{A}C < C\hat{B}D$ e con ciò la dimostrazione.

La costruzione testè discussa viene utilizzata da Hilbert per dimostrare il primo teorema di Saccheri-Legendre, come vedremo in seguito.

$\boxed{\text{I.17}}$

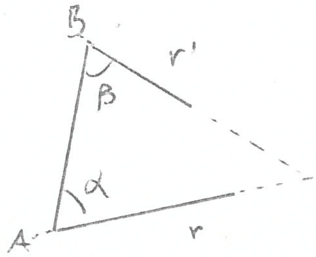


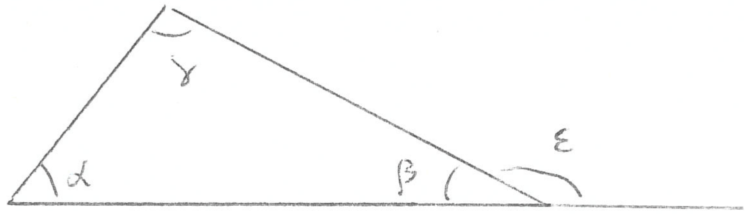
La somma di due angoli interni di un triangolo non eccede 2 retti

($\alpha + \beta < \pi$ ecc.)

Si noti che l'inversa di I.17 è il V postulato

(Se $\alpha + \beta < \pi$ r e r' si incontrano e si forma un triangolo)





Con riferimento alla figura, da $\alpha < \varepsilon$, $\gamma < \varepsilon$ (I.16)

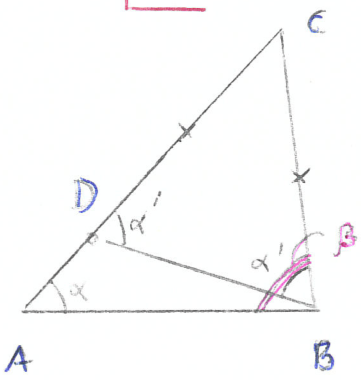
$\beta + \varepsilon = \pi$, si ricava subito

$$\alpha + \beta < \varepsilon + \beta = \pi \quad \text{i.e.} \quad \alpha + \beta < \pi$$

(analogamente per le altre due coppie di angoli interni)

I.18

"A lato maggiore è opposto angolo maggiore"



Sia $BC < AC$ per fissare le idee. Si determini D in modo che $DC = CB$

$$\alpha' = C\hat{D}B > CAB = \alpha \quad (I.16)$$

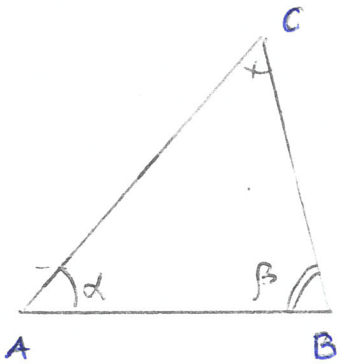
$$\| $$

$$D\hat{B}C < A\hat{B}C = \beta$$

Pertanto $\beta > \alpha$.

I.19

"Ad angolo maggiore è opposto lato maggiore" (è l'inversa della precedente)



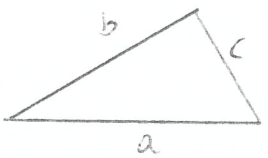
Sia $\beta > \alpha$.

P.a. sia $CB > AC$ ciò non è possibile per I.18. Se poi $CB = AC$ si avrebbe $\alpha = \beta$ per I.5. Dunque $CB < AC$ (tricotomia)

I.20 "Disuguaglianza triangolare"

"In un triangolo ogni lato è minore della somma (la lunghezza) degli altri due e maggiore della loro differenza"

Nota: la seconda asserzione segue dalla prima (cf. gli assiomi di spazio metrico)



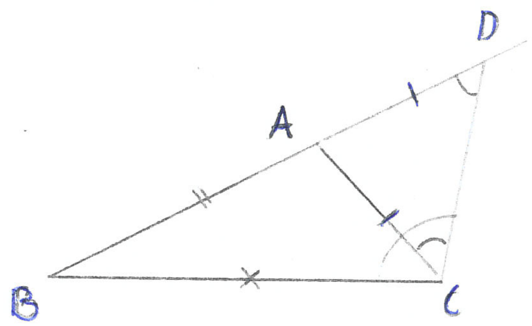
se $a < b + c$ ecc.

è, se $c < a$, $a - c < b$

se $a < c$ $a - c < 0 < b$ (lavoriamo in $\mathbb{R}$)

e se $a = c$ è $b > 0$ (vera).

dunque $|a - c| < b$ ecc.

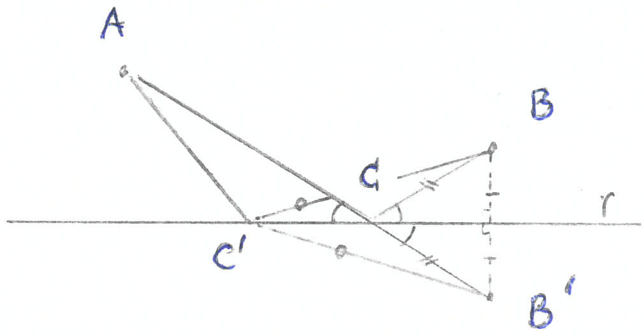


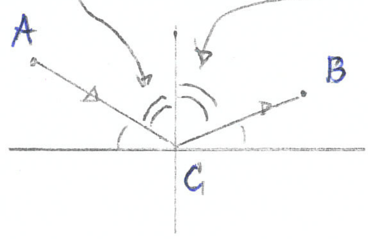
Sia D sul prolungamento di BA (dalla parte di A) tale che $AD = AC$.

Nel triangolo BCD, è chiaramente $B\hat{D}C = A\hat{C}D < B\hat{C}D$

$\Rightarrow$ $BC < BD = AB + AD$ (I.19)

Commento a I. 20 ★ Principio di Fermat (cammino minimo) applicato alla riflessione della luce





Sia B' il simmetrico di B rispetto ad r (simmetria assiale) e C l'intersezione di r e AB'.

Il percorso A C B è quello minimo fra tutti quelli tra A e B passando per r. Ciò segue immediatamente da I. 20 applicato ad AB'C' e da BC' = B'C' e BC = B'C. Dalla costruzione segue facilmente l'uguaglianza degli angoli di incidenza e di riflessione.