◇ LA TEORIA DELLE PROPORZIONI

di Eudosso, incorporata negli Elementi (libro V)

◇ GRANDEZZA — proprietà avulse dalle grandezze geometriche } concetti primitivi

◇ RAPPORTO — def. per astrazione
(la definizione di Euclide è puramente descrittiva, di fatto va preso come concetto primitivo

◇ PROPORZIONE — def. esplicita e operativa

◇ grandezza — V.1 — una grandezza è parte di una grandezza, la minore della maggiore, quando la misura

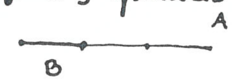


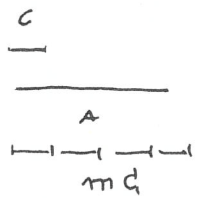
immagine greca

◇ rapporto — V.3 — rapporto è una certa relazione tra grandezze omogenee, in ordine della loro quantità

◇ grandezze commensurabili e incommensurabili
(aventi o meno un sottomultiplo comune)

Postulato di Eudosso-Archimede

Hanno un rapporto quelle grandezze le quali possono, se misurate, superarsi reciprocamente



$C < A$

$\exists\, m$, multiplo di C tale che $mC > A$

V.5 grandezze proporzionali

A sta a B come C sta a D

$$A : B = C : D$$

proporzione = uguaglianza di due rapporti

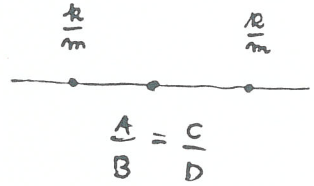
se

anche $\frac{A}{B}$

$$mA \gtreqless nB \iff mC \gtreqless nD$$

$$\frac{A}{B} \gtreqless \frac{n}{m} \iff \frac{C}{D} \gtreqless \frac{n}{m}$$

$n \neq 0$
$m \neq 0$



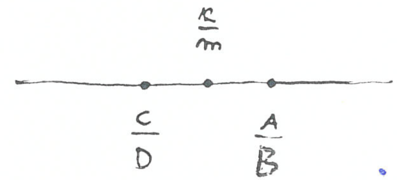
⚠ immagine non greca

V.7 rapporto maggiore di un altro

$$A : B > C : D$$

se $\exists\ n, m$ con $mA > nB$ ma $mC \leq nD$

$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ se $\exists\ \frac{n}{m}$ tale che $\frac{A}{B} > \frac{n}{m}$, $\frac{C}{D} \leq \frac{n}{m}$



v2

MATEMATICHE COMPLEMENTARI II

Prof. Mauro Spera
UCSC, Brescia

Lezione IX

- La teoria delle proporzioni in Euclide
- Sezioni di Dedekind

✩ Teoria delle proporzioni vs sezioni di Dedekind

R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872
continuità e numeri irrazionali

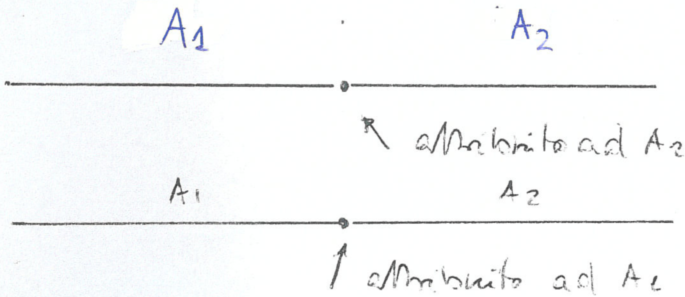
analogie tra numeri (razionali) e punti di una retta
[usiamo in parte il simbolismo contemporaneo]

numeri razionali $\mathbb{Q}$	punti di una retta
1. relazione $>$ (maggiore di) (e $<$, minore di)	1'. relazione "a destra di" (e "a sinistra di")
2. dati $a, c \in \mathbb{Q}$ ($a \neq c$ e, per fissare le idee, $a < c$), esistono infiniti $b \in \mathbb{Q}$, con $a < b < c$	2'. Se $p \neq r$, e p è a destra di r, esistono infiniti pti q tra r e p 
3. Dato $a \in \mathbb{Q}$, i numeri $\neq a$ si ripartiscono in due classi $A_1 = \{ b_1 / b_1 < a \}$ $A_2 = \{ b_2 / b_2 > a \}$ contenenti infiniti elementi	3'. Dato p, i punti diversi da p si ripartiscono in due classi: $P_1 = \{ p_1 / p_1 \text{ a sinistra di } p \}$ $P_2 = \{ p_2 / p_2 \text{ a destra di } p \}$ contenenti infiniti elementi

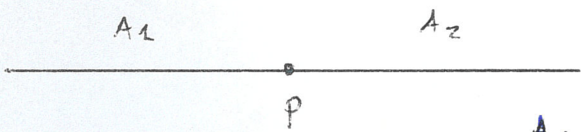
È noto che, fissando sulla retta un'origine e un'unità di misura, è possibile far corrispondere ad ogni $a \in \mathbb{Q}$ uno e un sol punto P_a sulla retta. Ma, d'altra parte, esistono punti della retta che non corrispondono ad alcun razionale.
È chiaro che la proprietà cruciale della retta è la "continuità" ma cosa vuol dire? Dedekind la evidenzia nel modo seguente:

4' **Principio di continuità della retta** (nella forma di Dedekind)

Se una ripartizione di tutti i punti della retta in due classi è tale che ogni punto di una delle due classi si trovi a sinistra di ogni punto dell'altra, allora esiste uno e un sol punto dal quale questa decomposizione ("sezione") è prodotta. Il punto stesso si può pensare attribuito all'una o all'altra classe. ~ attenzione



viceversa, un punto individua in modo naturale una sezione, prendendo i punti a sinistra e a destra di esso, e attribuendo il punto stesso ad una delle classi



es:

$A_1 = \{ q \mid q$ a sinistra di $p \}$

$A_2 = \{ q \mid q$ a destra di p, compreso $p \}$

In definitiva, ogni sezione della retta è individuata da uno e un sol punto

Ma, per i numeri razionali non esiste un analogo di 4'.

Costruiamo ad esempio (A_1, A_2) così:

$$A_2 = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 ,\ a^2 > 2 \}$$

$$A_1 = \mathbb{Q} \setminus A_2$$

Non esiste alcun razionale b che produce la decomposizione data

dovrebbe aversi infatti $b^2 = 2$ (e b sarebbe attribuito ad A_2) ma ciò è assurdo

Ecco allora l'idea cruciale della costruzione di Dedekind:

Se una sezione (A_1, A_2) di $\mathbb{Q}$ non è prodotta da $q \in \mathbb{Q}$, si crea un numero irrazionale α definito dalla sezione

corrispondente ad un rapporto irrazionale della teoria delle proporzioni

Si dice che α corrisponde alla sezione
α produce la sezione
o anche α "è" la sezione

L'insieme dei razionali e degli irrazionali costituisce l'insieme dei numeri reali

$$\boxed{\mathbb{R} = \{\text{sezioni di } \mathbb{Q}\} \quad \text{modello di Dedekind}}$$

In tal modo, risulta soddisfatto il principio di continuità (alla Dedekind), e si è trovato, o meglio, costruito 4, analogo di 4'

Ribadiamo: si è costruito un modello aritmetico della retta geometrica (esso poggia, in definitiva, sulle proprietà dei numeri naturali (questi ultimi si possono assiomatizzare tramite gli assiomi di Peano)

Di seguito vedremo come l'approccio di Dedekind sia molto vicino a quello euclideo.

◇ DEDEKIND Riassunto

- aritmetizzazione
- motivazioni didattiche

una grandezza crescente ma non oltre ogni limite ha un limite ℝ in termini attuali: assioma dell'estremo superiore per ℝ

◇ PRINCIPIO DI CONTINUITA' DELLA RETTA

Se una ripartizione di tutti i punti della retta in due classi è tale che ogni punto di una delle due classi si trovi a sinistra di ogni punto dell'altra, allora esiste uno e un sol punto che produce tale decomposizione (sezione)

☆ Se una sezione di $\mathbb{Q}$ non è prodotta da $r \in \mathbb{Q}$, si crea☆ un numero irrazionale α definito da quella sezione

α corrisponde alla sezione produce la sezione

$\mathbb{R} = \{$ sezioni di $\mathbb{Q} \}$

$A_2 = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a > 0, a^2 > 2 \}$

$A_1 = \mathbb{Q} - A_2$

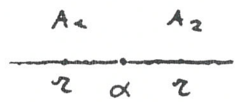
$(A_1, A_2) = \sqrt{2}$

Di fatto si può lavorare solo con A_1, si parla allora di semirette razionali ☆

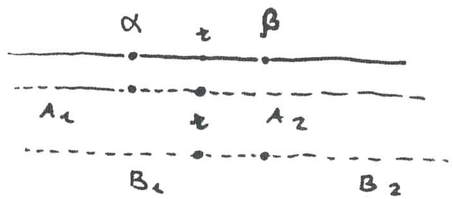
IX-5

Il confronto tra numeri reali (sezioni) mostra lo strettissimo legame con la teoria delle proporzioni ☆

1. Confronto di $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

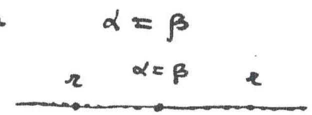


2. Confronto di $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
(Per fissare le idee esprimiamo $\alpha < \beta$)



$\exists\ r \in A_2 \cap B_1$ inserzione di r tra α e β

Sia ora $\alpha = \beta$



Deve essere $r \gtrless \alpha \iff r \gtrless \beta$

in senso lato, i.e. algebrico $\mathbb{R} = \{$ rapporti $\}$

X-6

◇ LA CONTINUITÀ in Euclide

è implicitamente definita e utilizzata

- esistenza della quarta proporzionale dopo tre grandezze assegnate A, B, C
  esiste sempre X tale che

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$$

Appare nel corso della dim. di V.18, è assunta senza dimostrazione

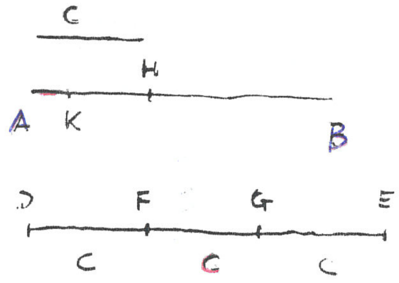
(A, B omogenee, ma C non nec. omogenea ad A, B: in quest'ultimo caso X è omogenea a C)

già esaminato...

- Lemma di Euclide (Elementi X.1)

se da una grandezza si sottrae più della metà, e dalla parte restante più della metà di questa e così via, si può sempre determinare una grandezza più piccola di ogni grandezza prefissata

(di fatto ciò vale anche se si sottrae la metà, e così via)



Dim. Si prenda N tale che ☆ $N \cdot C > AB$ (sia $N = 3$..)

$DE > AB$

$DE - EG > AB - HB$

$GD > AH$

$GD - GF > AH - KH$

$DF > AK$

$C > AK$

☆ notare: non si divide per N...

◇ METODO DI ESAUSTIONE (O DI COMPRESSIONE)

da discutersi in seguito

Schema base per la det. di una grandezza Σ

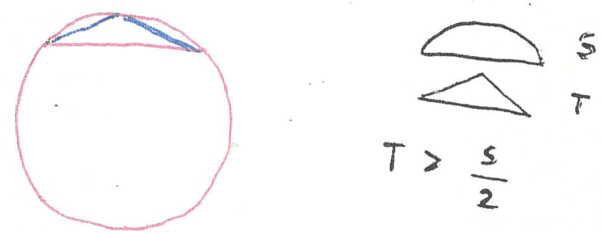
supposta esistente; di fatto assegnata

$C_n - I_n < \varepsilon$ assegnato a piacere

☆ trovare poi K : $I_n < K < C_n \quad \forall n$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = K$$

- un'applicazione del lemma di Euclide (v. oltre)



$$T > \frac{S}{2}$$

⇒ due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi (Euclide)

☆ Il rapporto effettivo (π) è stato stimato da Archimede

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

22 | 7
10 3,142857
30
20
60
40
50

$$\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}$$

$\pi \sim 3,14$ ← prime due cifre decimali corrette