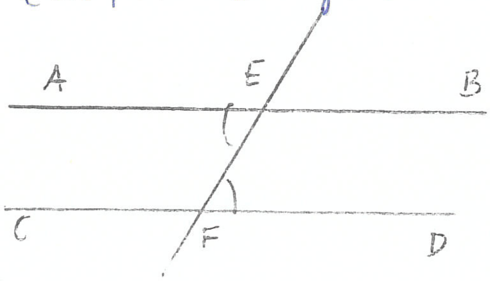
Parallelismo (nel primo libro degli Elementi)

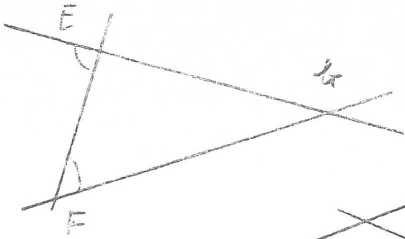
I.27

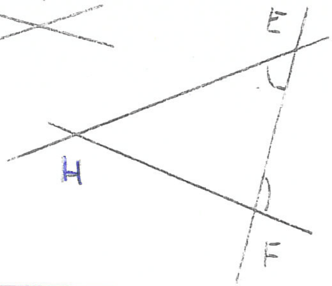


$\Rightarrow AB \parallel CD$

Siano le rette AB, CD tagliate (in E ed F, rispettivamente) dalla trasversale EF e sia $A\hat{E}F = C\hat{F}E$ (angoli alterni interni uguali). Allora AB e CD sono parallele.

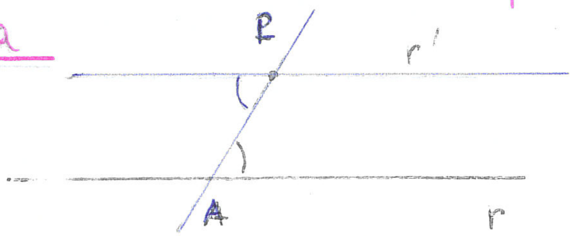
Dim. Se per assurdo non lo fossero, si incontrerebbero in G o H





ma ciò contraddirebbe l'ipotesi in virtù del teorema dell'angolo esterno (I.16)

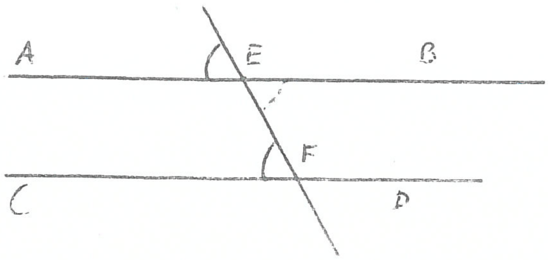
★ Questa proposizione assicura la costruzione di una parallela ad una retta data per un punto esterno ad essa



Ad esempio si può prendere $PA \perp r$ e costruire la perpendicolare a PA passante per P.

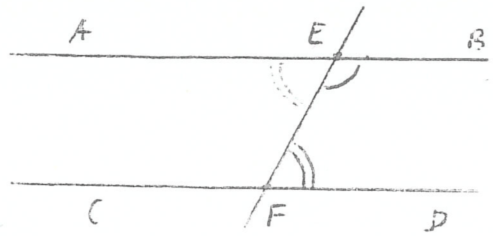
Per P si conduca infatti una retta qualsiasi che incontri r (in A). Si costruisca poi un angolo $\hat{P}$ uguale ad $\hat{A}$ (v. figura) con vertice in P avente PA come uno dei lati (ciò è possibile per il "trasporto dell'angolo"). La retta r' è parallela ad r (I.27).

I.28



Nelle situazioni ① o ② si ha $AB \parallel CD$

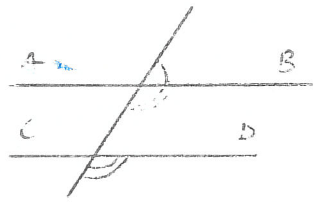
[① angoli corrispondenti uguali



② coniugati interni supplementari

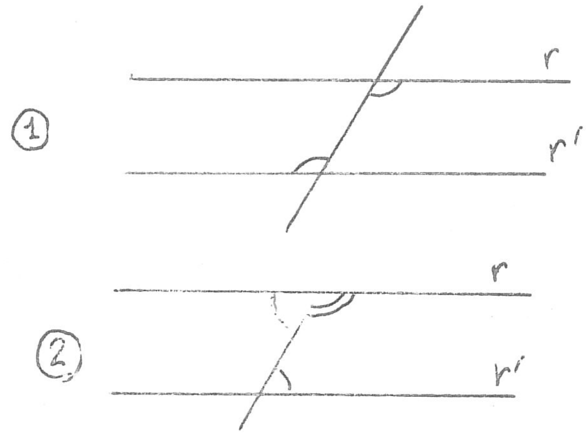
Dim. In entrambi i casi ci si riconduce a I.27 (① per I.15 , ② per I.13).
Oppure si applica direttamente I.16

Osservazione: anche ③ (coniugati esterni supplementari implica $AB \parallel CD$



Con la I.28 terminano le proposizioni dimostrabili senza usare il V postulato.

$\boxed{\text{I} \cdot 29}$

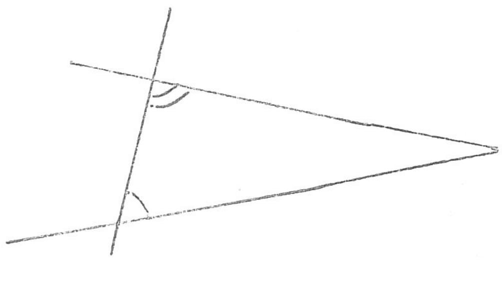


Contronominale del V postulato (è logicamente equivalente ad esso)

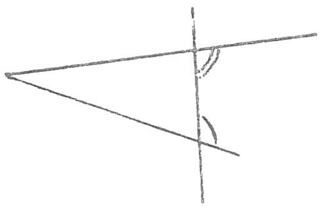
Siano r e r' parallele. Allora ① Esse individuano angoli alterni (interni) uguali e ② angoli coniugati (interni) supplementari

Dim. È chiaro che ① è equivalente a ②

Dimostriamo ②. Se, per assurdo, la somma degli angoli in questione differisse da due retti, allora le due rette si incontrerebbero da quella parte in cui la somma degli angoli coniugati è inferiore a due retti, in virtù del V postulato, e pertanto non risulterebbero parallele, contro l'ipotesi



$\triangleleft + \triangleleft < \pi$

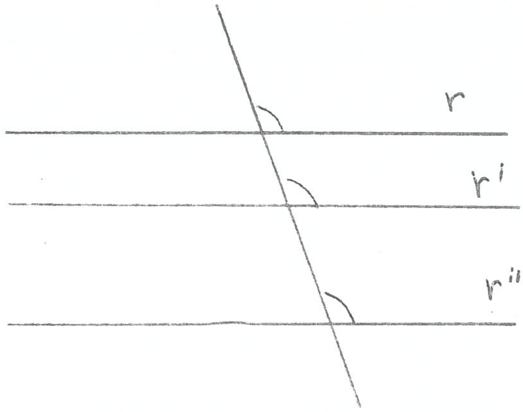


$\triangleleft + \triangleleft > \pi$

I.30

Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro

(transitività del parallelismo)



Il parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza

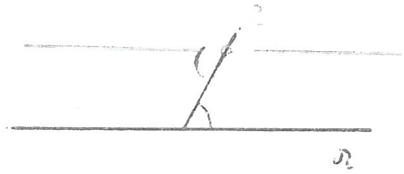
Se dichiariamo che una retta è parallela a se stessa (proprietà riflessiva)

infatti tale relazione è simmetrica (ovvio) e, per I.30, transitiva

Sia $r // r''$, $r' // r''$

gli angoli $\angle$ risultano uguali (I.29), sicché è $r // r'$ (I.28)

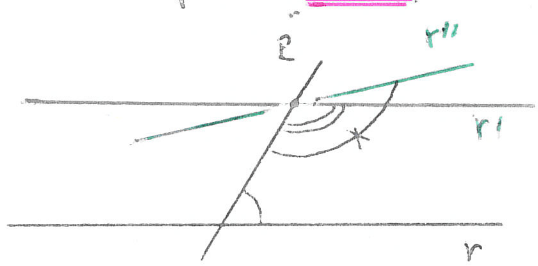
I.31



Condurre da $P \notin r$ **la** parallela ad r

Da I.27 sappiamo condurre **una** parallela.

Tale parallela è però **unica**.



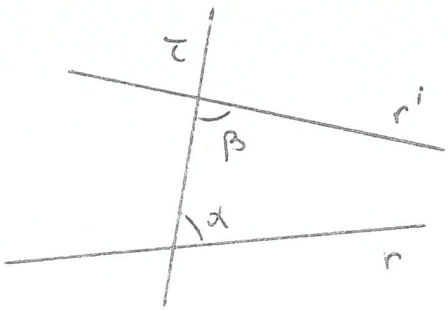
Se ce ne fosse un'altra, r'' si avrebbe (I.29)

il che è assurdo.

☆ Commento importante

L'unicità della parallela ad una data retta condotta per un punto esterno ad essa (assioma di Playfair) è equivalente al V postulato (nella forma di Euclide)

Infatti, dal V postulato abbiamo dedotto l'unicità della suddetta parallela. Viceversa, da Playfair (assieme alle proposizioni I.1 — I.28) deduciamo il V postulato.



Sia $\alpha + \beta < \pi$

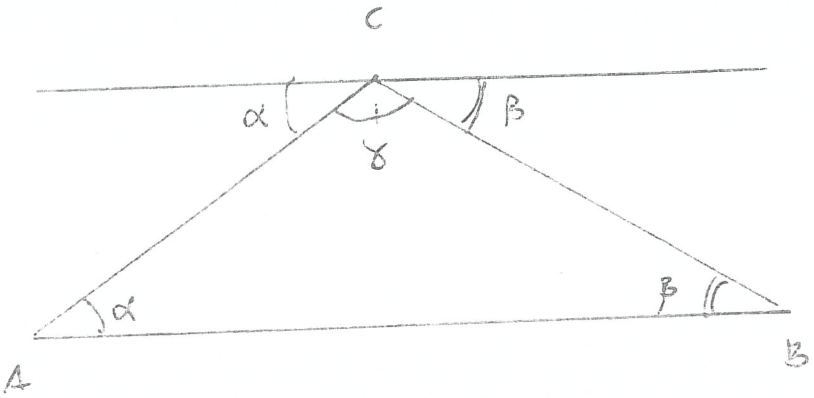
Dobbiamo dimostrare che r e r' si incontrano "a destra" della trasversale t

Se, per assurdo, non si incontrassero, r' sarebbe parallela a r, e risulterebbe unica (Playfair).
Ma allora r' si potrebbe costruire con la I.28 e si avrebbe però $\alpha + \beta = \pi$ Contraddizione.

I.32

"La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti"

È un'asserzione equivalente al V° postulato (al-Ṭūsī) v. oltre



La dimostrazione, notissima, è pressoché immediata: tracciata per C la parallela ad AB, da I.29 si ottiene la conclusione (v. figura)

Sono possibili altre dimostrazioni