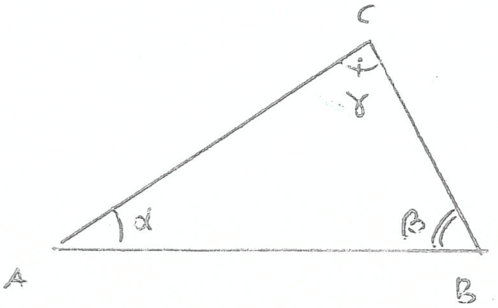
Il "1° teorema di Saccheri-Legendre"

(seguendo Hilbert, Grundlagen)

Ammettendo i primi quattro postulati di Euclide nonché la "teoria delle proporzioni" (V libro, e Euclide XI) si trova che $\alpha + \beta + \gamma \le \pi$



(la somma degli angoli interni di un triangolo non eccede due retti)

Strategia della dimostrazione

1. Dato un triangolo **qualsiasi**, se ne può costruire un altro con la **stessa** somma degli angoli interni [e con un angolo che non eccede la metà di uno degli angoli del triangolo iniziale, v. oltre]

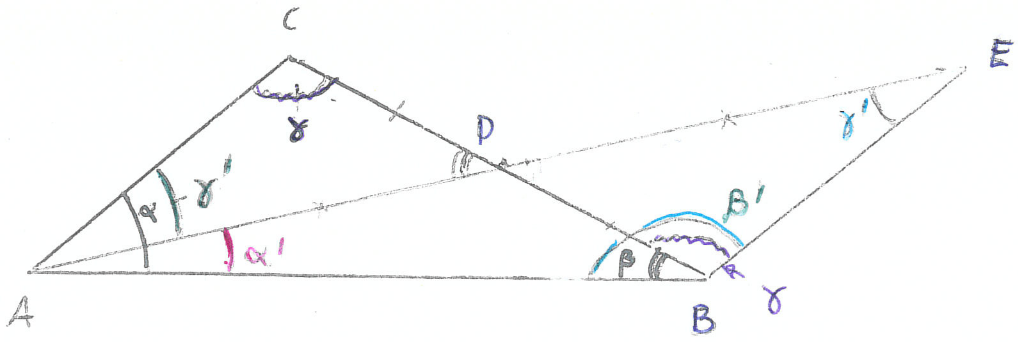
2. Iterando opportunamente la costruzione, si può fare in modo che **uno degli angoli** (α^*) del nuovo triangolo risulti **più piccolo** di $\varepsilon > 0$ scelto a piacere [misuriamo gli angoli in radianti]

3. p.a. Ora, se la somma degli angoli del triangolo iniziale **eccedesse** π ($\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$, ε diciamo), il triangolo **finale** sarebbe tale che la somma dei suoi angoli interni $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = \pi + \varepsilon$, e altresì $\alpha^* < \varepsilon$.

Da ciò seguirebbe subito $\beta^* + \gamma^* > \pi$ in contrasto con I.17 (la somma di due angoli interni di un qualsiasi triangolo non eccede due retti). Ciò dimostra il teorema

Procediamo con la dimostrazione

(1)



Dato ABC, con somma $\alpha+\beta+\gamma$, ($\beta \leq \gamma$ per fissare le idee)
con la tecnica usata in I.16 costruiamo ABE
(si biseca CB, si trova D, si prolunga AD in AE con AD = DE) Dalla congruenza di ADC e DBE (I.4)
si trova

$$\alpha = \alpha' + \gamma'$$
$$\beta = \beta' - \gamma$$

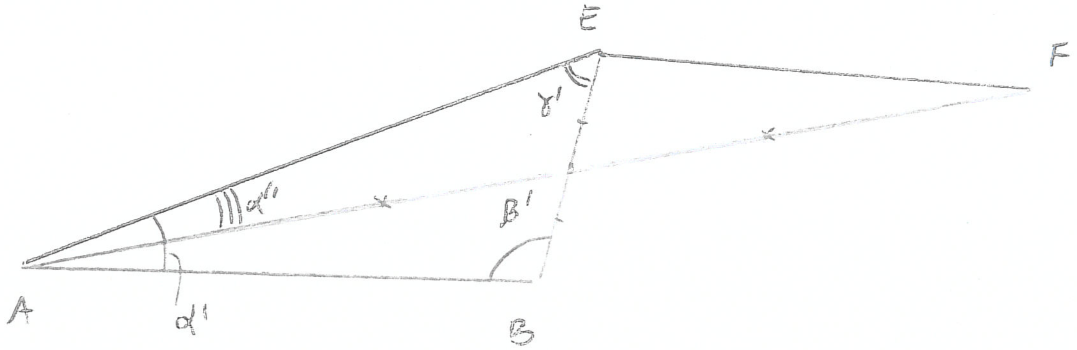
sicché $\boxed{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha'+\gamma'+\beta'-\cancel{\gamma}+\cancel{\gamma}$
$= \boxed{\alpha'+\beta'+\gamma'}$

☆ Dimostriamo che $\boxed{\alpha' \leq \frac{\alpha}{2}}$

Ciò equivale a dimostrare che $\alpha' \leq \gamma'$
($\alpha = \alpha'+\gamma'$). Ciò segue da $\beta \leq \gamma$ (che implica $AC \leq AB$)
Infatti, in ABE è

$$BE = AC \leq AB \implies \alpha' \leq \gamma'$$

② Si consideri allora ABE (qui $\gamma' \leq \beta'$).
Si riapplichi la costruzione



Qui il nuovo triangolo è AEF e $\alpha'' \leq \frac{\alpha'}{2} \leq \frac{\alpha}{4}$

In ogni caso si costruisce una successione di triangoli Δ_n, $n=0,\dots$ $\Delta_0 = ABC$..

tale che

$$\boxed{W := \alpha+\beta+\gamma = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n}$$

$n=0,1,2\dots$
$\alpha_0=\alpha$ ecc.

con

$$\boxed{\alpha_n \leq \frac{\alpha}{2^n}}$$

Sia ora $\bar{n}$ scelto in modo che per $n > \bar{n}$, risulti $\boxed{\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon}$

⚠ Ciò è possibile per Euclide X.1

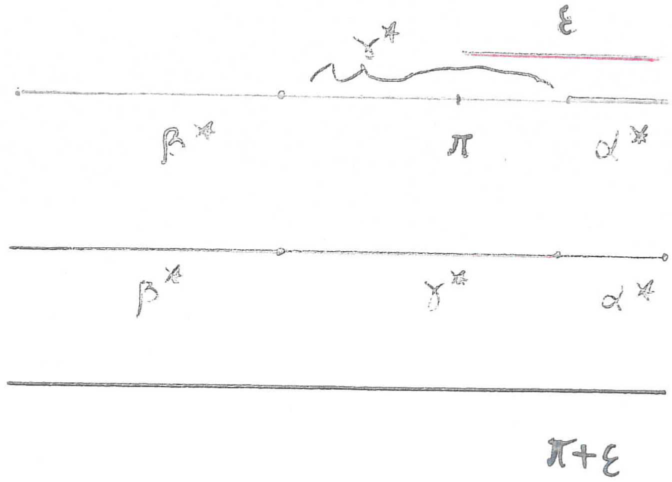
Se da una grandezza si toglie la metà o più, iterando la costruzione si determina una grandezza più piccola di una grandezza prefissata.

N.B. [Si lavora con grandezze archimedee: date due grandezze, esiste un multiplo della minore che supera la maggiore
v. anche oltre

③ preso allora un triangolo Δ_* della suddivisione data, con $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = \pi+\varepsilon$

e $\alpha^* < \varepsilon$

Come si è detto, si avrebbe $\beta + \gamma > \pi$, il che è assurdo (v. anche la figura)

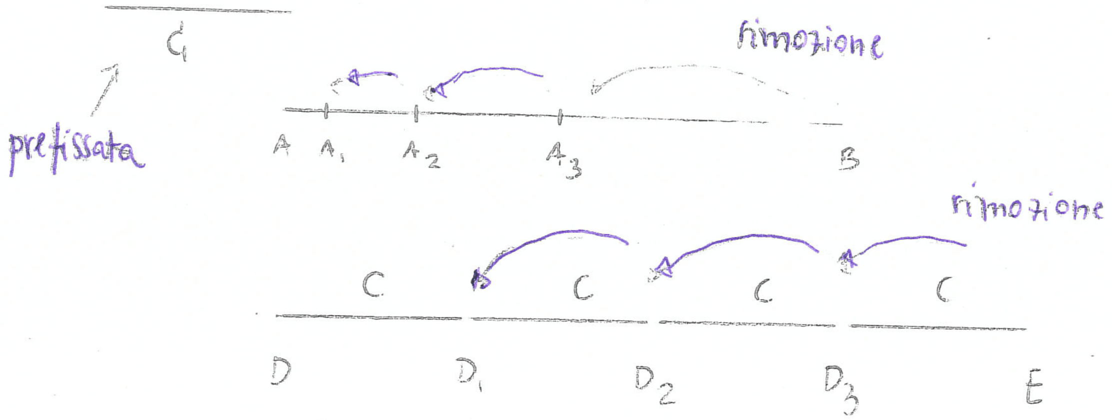


$\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = w$
$= \pi + \varepsilon$

□

Euclide X.1

Data una grandezza, se da questa si toglie successivamente la metà o più della metà, si arriva [dopo un numero finito di passi] ad una grandezza più piccola di qualsiasi altra grandezza prefissata.



Sia N tale che $\underbrace{N \cdot C}_{= DE} > AB$ (* postulato di Eudosso-Archimede)

qui $N = 4$

$AB < DE$ (G è minore della metà di DE)

$\Rightarrow AA_3 < DD_3$

e, successivamente, si arriva a

$AA_1 < DD_1 = C$ AA_1 è la grandezza cercata

- Riassumiamo la strategia della dimostrazione: Commenti

P.A. Sia dato un triangolo tale che la somma dei suoi angoli interni sia maggiore di due retti.
A partire da questo, si costruisce (tramite le costruzioni già usate per dimostrare I.16) una successione di triangoli τ_n i cui angoli interni hanno la stessa somma, ma tali che uno di questi ultimi diventa piccolo a piacere. Da ciò segue che, a partire da un certo indice n, la somma dei due rimanenti angoli dei triangoli τ_n eccede 2 retti, e ciò costituisce una contraddizione.

- Attenzione: non abbiamo supposto che la somma degli angoli interni di tutti i triangoli ecceda due retti, ma che ne esista uno con questa proprietà.

- Nelle geometrie non euclidee, la somma degli angoli interni di un triangolo dipende dall'area dello stesso. Ad esempio, per i "lati" di un triangolo sferico (formati da archi di cerchi massimi) si trova $\underbrace{\alpha+\beta+\gamma-\pi}_{\text{eccesso sferico}} = A(\tau)$ (formula di Harriot-Girard-Cavalieri): su una sfera, pertanto, non vi sono triangoli simili che non siano automaticamente congruenti. Notiamo che su una sfera, i segmenti non sono indefinitamente estendibili, proprietà cruciale utilizzata nella dim. di Saccheri-Legendre conduce alla geometria euclidea (se si ha =) o a quella iperbolica (se si ha <). Attenzione: anche nella geometria iperbolica si prova una formula del tipo:

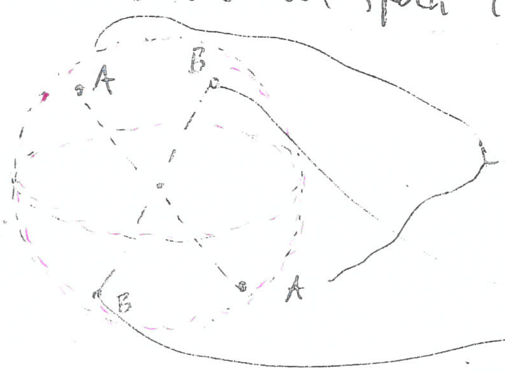
$$\underbrace{\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}_{\text{difetto angolare}} = A(T)$$

e non esistono "triangoli" simili che non siano anche congruenti (cf il postulato di Wallis, equivalente al V°)

- Su una sfera, dato un cerchio massimo e un punto fuori di esso, non esiste alcun cerchio massimo passante per quel punto che non interseChi il dato, non vi sono pertanto "rette" parallele.

- In geometria iperbolica esistono infinite parallele ad una "retta" data condotte da un punto esterno ad es (due rette parallele in senso stretto e infinite rette ultraparallele)

- Un' ultima precisazione, prima di chiudere questa discussione informale: due cerchi massimi su una sfera si incontrano in due punti; due rette ordinarie (distinte) se si incontrano, lo fanno in un punto. Per ripristinare tale proprietà nel caso sferico si considera in realtà il piano proiettivo reale, ottenuto da una sfera identificandone i punti antipodali

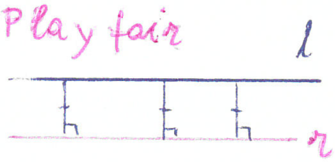


vanno considerati come lo stesso punto

geometria ellittica

★ Affermazioni equivalenti al V° postulato

1. Playfair

2. 

← il luogo dei punti equidistanti da una retta r è ancora una retta

3. 

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (al-Tusi)

4. I.29 (contronominale del V° postulato)
5. L'inversa di I.17
6. Esiste un rettangolo
7. Teorema di Pitagora (I.47)
8. rette parallele hanno una perpendicolare comune

   (cf. Dilemma di Saccheri: ∃ rette // senza perpendicolare comune)

9. Wallis — ogni triangolo ammette un triangolo simile ad esso di grandezza arbitraria

⋮

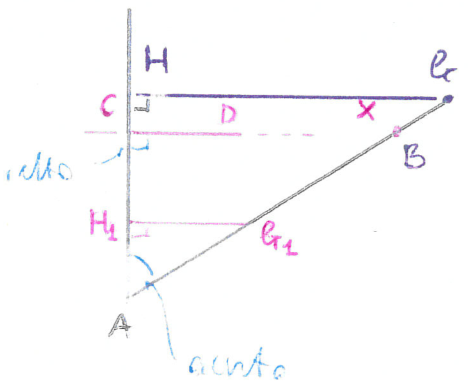
★ Teorema (Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī)

L'assunzione "la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti" (A) è equivalente al V° postulato (B)

Dimostrazione (cenno)

"B => A" è stata già dimostrata (I 32)

Sia CD ⊥ AC, $C\hat{A}B$ acuto. vogliamo dimostrare che CD interseca AB [ciò prova il V postulato in un caso particolare]



L'idea è quella determinare un triangolo rettangolo HGA come in figura (risulta (I.17)) allora HG // CD. CD, entrando in HGA da C, deve uscire necessariamente da GA (e non da HG per l'"assioma di Pasch" (esplicitato nei Grundlagen) in un punto X.

Il triangolo HGA risulta costruibile a partire dall'ipotesi (A) e dall'"assioma archimedeo", al termine di un processo iterativo che inizia con la scelta di G_1 su AB e con H_1 = piede della perpendicolare condotta da G_1 su AC
[se $AH_1 > AC$ si concluderebbe con Pasch]
H si ottiene riportando AH_1 un certo numero di volte su AC in modo da ottenere AH > AC.