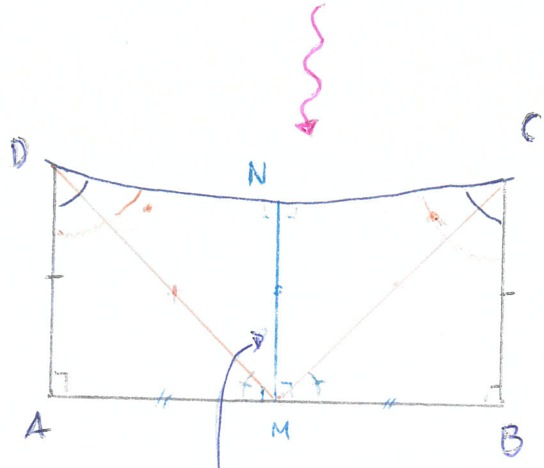
★★ Quadrilateri di Saccheri



perpendicolare condotta da M a DC
M pto medio di AB

★ **Teorema** con riferimento alla figura accanto:

Sia: $D\hat{A}B = A\hat{B}C$ = retto

$AD \cong BC$

congruente

Allora

(i) $A\hat{D}C = D\hat{C}B$

congruente

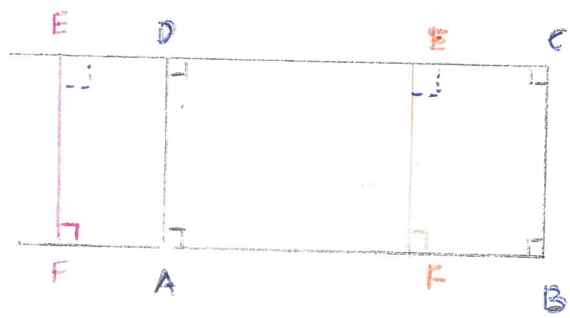
(ii) $AMND \equiv MBCN$

(*) In particolare $D\hat{N}M = C\hat{N}M$ = retto
e $A\hat{D}C = D\hat{C}B$ ⟶ vedi oltre

Dimostrazione La perpendicolare ad AB per M (pto medio di AB) è interna a $D\hat{M}C$ e taglia CD in N.
Si ha subito $AMD \equiv MBC$ (1° criterio). Pertanto (1° criterio), si ha pure $DMN \equiv NMC$, da cui segue (ii) e, in particolare (i) e (*).

(*) **Teorema**

Sia dato un quadrilatero ABCD con quattro angoli retti (rettangolo). Se $E\hat{F}B$ è retto, lo è pure $F\hat{E}C$.

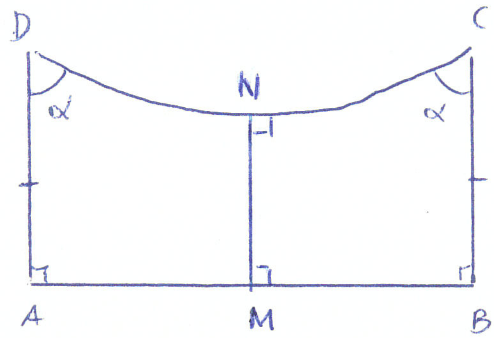


★ **Importante**

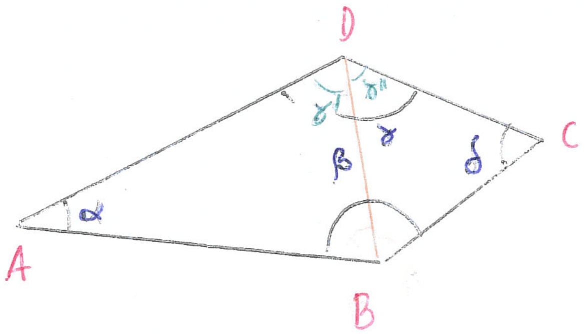
In un quadrilatero di Saccheri l'angolo α è acuto o retto

"ipotesi dell'angolo acuto" HAA

"ipotesi dell'angolo retto" HRA



Infatti, dal 1° teorema di Saccheri - Legendre segue che la somma degli angoli interni di un quadrilatero non eccede quattro retti:



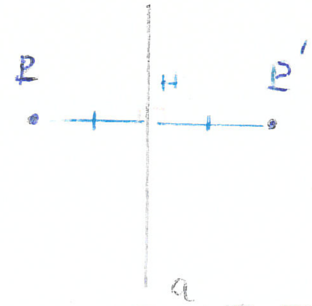
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta =$$

$$\underbrace{\alpha + \beta' + \gamma'}_{\leq \pi} + \underbrace{\beta'' + \gamma'' + \delta}_{\leq \pi} \leq 2\pi$$

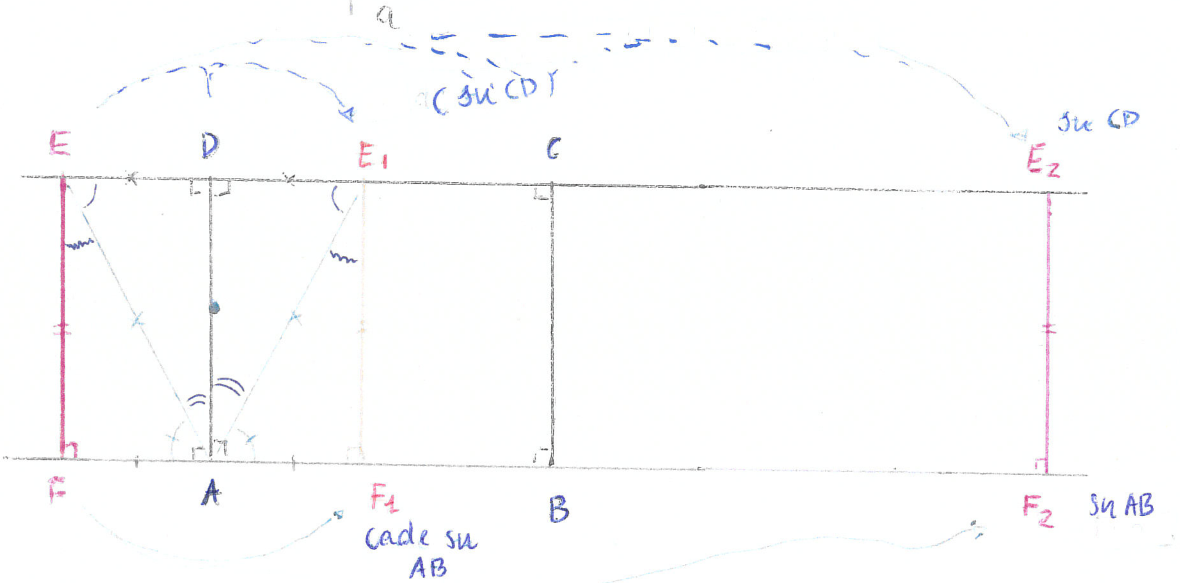
Se α (nel quadrilatero di Saccheri) fosse ottuso, il quadrangolo MNCB avrebbe tre angoli retti e un angolo ottuso, sicché la somma dei suoi angoli interni eccederebbe 4 retti (lo stesso varrebbe per ABCD).

Dimostrazione (cf Hilbert, Grundlagen)
di (◈)

Premessa:



P': simmetrico di P rispetto ad A ($PP' \perp a$, $PH = P'H$)



Costruiamo (pto per pto) E_1F_1 simmetrico di EF rispetto ad AD e, parimenti, E_2F_2 simmetrico di EF rispetto a CB: notare che E_1 ed E_2 si trovano su DC e così F_1 ed F_2 giacciono su AB

Si noti ora che $ADE \cong ADE_1$ (1° criterio)
Da ciò discende facilmente che $FAE \cong F_1AE_1$ (1° criterio) sicché $EF \cong E_1F_1$ e $E_1F_1 \perp AB$.
similmente $EF \cong E_2F_2$ e $E_2F_2 \perp AB$

Pertanto EE_1F_1F è di Saccheri
EE_2F_2F è di Saccheri
$E_1E_2F_2F_1$ è di Saccheri

$\Rightarrow$ $F\hat{E}E_1 = E\hat{E}_1F_1$ $\quad$ $F\hat{E}E_1 = E\hat{E}_2F_2 = F_1\hat{E}_1E_2$

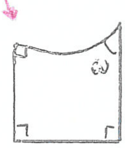
$\Rightarrow$ $\boxed{E\hat{E}_1F_1 = F_1\hat{E}_1E_2}$

$\Rightarrow$ tutti gli angoli superiori sono retti e l'asserto segue. □

Teorema Se in un quadrangolo $A'B'C'D'$ tutti gli angoli sono retti, in ogni quadrangolo $ABCD$ con tre angoli retti è retto anche il quarto angolo

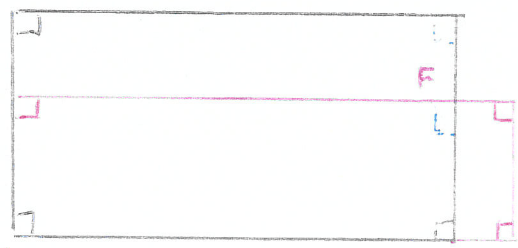
∃ 

se



⇒ ω è retto

Dimostrazione (cf. Hilbert, Grundlagen)



Sia $A'B'C'D'$ un quadrangolo con quattro angoli retti; lo si trasporti in $AB_1C_1D_1$, facendo coincidere gli angoli retti in A.

Se $B_1 = B$ o $D_1 = D$ abbiamo finito, altrimenti (ci si riferisca alla situazione in figura), per il teorema precedente, $D_1\hat{F}B$ è retto, e tale è anche $D\hat{C}B$, che è la tesi. □

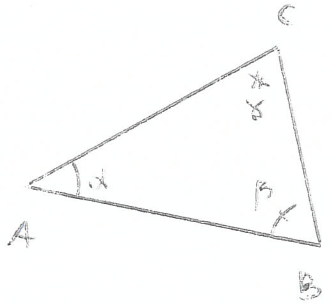
★ **Teorema** (secondo teorema di Saccheri-Legendre, cf. Al-Ṭūsī
spesso detto "teorema dei tre moschettieri")

Se in un particolare triangolo la somma degli angoli interni è uguale a due retti, ciò è vero per ogni triangolo

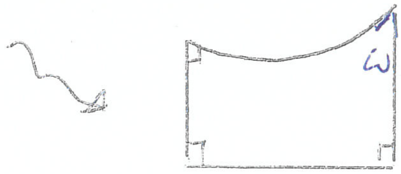
[rafforza il teorema di al-Ṭūsī: l'esistenza di un solo triangolo con somma degli angoli interni pari a due retti implica il V° postulato]

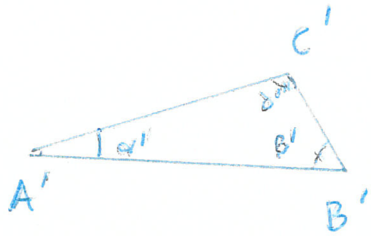
Strategia della dimostrazione: si parte da un triangolo generico in cui la somma degli angoli sia 2ω ($\leq$ 2 retti) e qui si associa un quadrangolo con tre angoli retti e quarto angolo ω. Se in un dato triangolo la somma degli angoli valesse due retti, il relativo quadrangolo avrebbe quattro angoli retti. In virtù del risultato precedente, sarebbe retto anche il quarto angolo del quadrangolo associato al primo triangolo, cioè la somma degli angoli di quest'ultimo sarebbe necessariamente due retti.

Schematicamente:

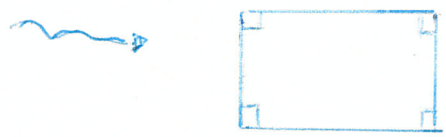


$\alpha + \beta + \gamma = 2\omega$



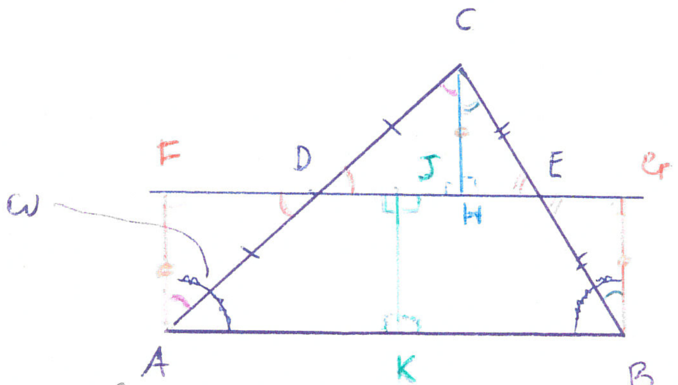


$\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$ (due retti)



★ Ma allora <u>ω è retto</u>

Rimane da esaminare la costruzione del quadrangolo che procede come segue



Preso ABC, siano D ed E i punti medi di AC e BC, rispettivamente. Sia CH la perpendicolare a DE condotta da C, e H il suo piede. Siano AF e BG le perpendicolari a DE condotte da A e B, rispettivamente. Sia J il pto medio di FG, e da questo si tracci la perpendicolare a FG, che incontra AB in K

Per il 2° criterio, AFD ≡ CDH e, similmente, CHE ≡ EGB. Da ciò segue che FA = GB, sicché <u>AFGB è un quadrilatero di Saccheri</u>, e $A\hat{K}J = J\hat{K}B$ è retto

Si ha pertanto $F\hat{A}B = G\hat{B}A = \omega$ (la loro somma equivale alla somma degli angoli interni di ABC)

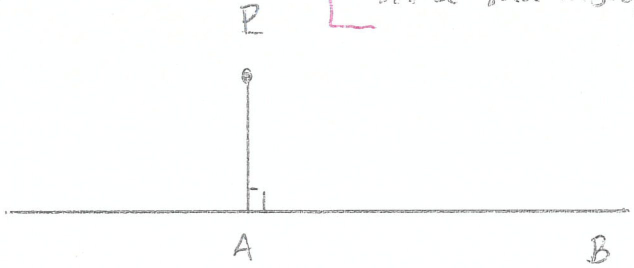
★ Associamo al triangolo ABC il quadrangolo AKJF: esso ha tre angoli retti (in F, J e K) e quarto angolo ω (in A). In virtù delle considerazioni precedenti, si conclude.

□

★ **Teorema** (cf Saccheri, Prop XXXII) (1733)

[geometria non-euclidea ... a sua insaputa]

Nel piano (assoluto) dato $P \notin AB$, esistono tre classi di rette uscenti da P



[vale AA]

(i) rette incidenti AB

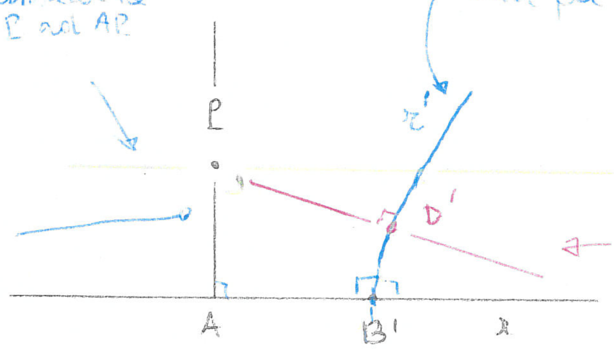
(ii) rette aventi una perpendicolare in comune con AB (ultraparallele)

"... ripugna alla natura delle linee rette"

(iii) rette (necessariamente asintotiche ad AB) (parallele) non aventi una perpendicolare in comune con AB

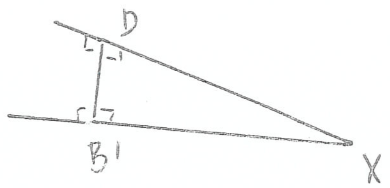
Poniamoci nel semipiano individuato da PA contenente D

Dim. (cenno) Facciamo vedere come costruire rette di tipo (ii)



★ PD' e AB' hanno r' come perpendicolare comune

Si noti che PD' e AB' non hanno punti in comune, altrimenti sarebbe violato il teorema dell'angolo esterno I.16

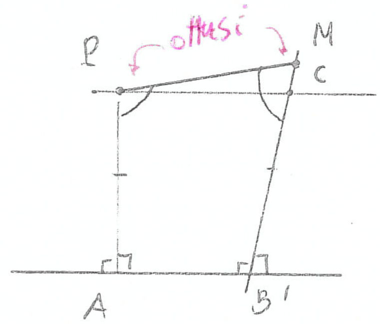


Osservazione: l'angolo $A\hat{P}D'$ è acuto.

Ciò si può accertare come segue:

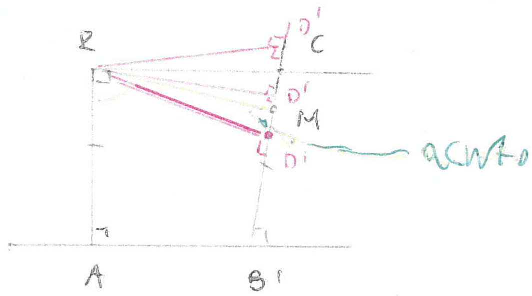
Sia $B'M \cong AP$, M al di sopra di C

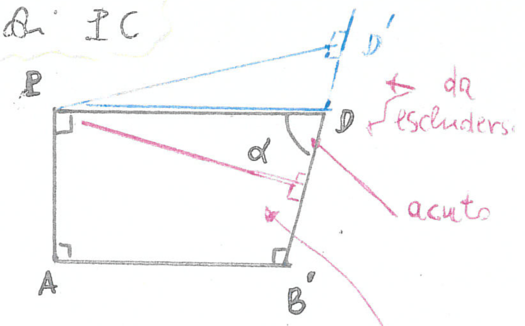
$APMB'$ ottiene un quadrilatero di Saccheri con due angoli ottusi, il che è da escludersi.



Se $M = C$ avrei un rettangolo, pure da escludere

dunque M capita al di sotto di PC





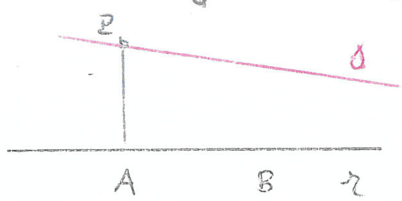
Variante (più rapida)

La perpendicolare da P a $B'C$ càpita tra M e B', altrimenti verrebbe violato il teorema dell'angolo esterno.

Proseguiamo con la dimostrazione

Le semirette di tipo (i), (ii) dànno vita a due classi di grandezze contigue (+), separate da una retta s (*) che è asintotica a $r = AB$ e non ha una perpendicolare in comune con r (tale perpendicolare si troverebbe "all'infinito")

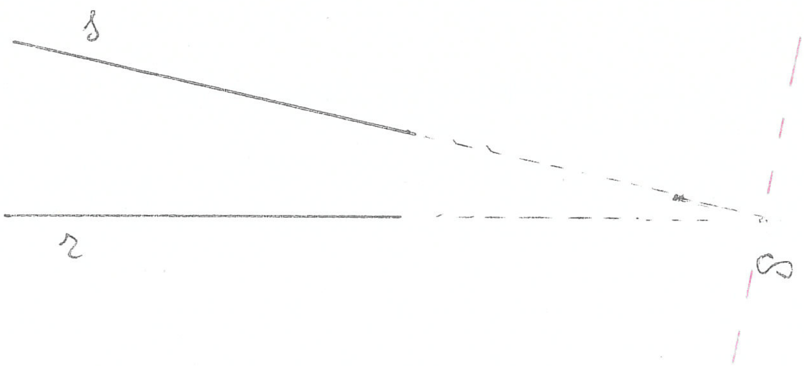
omettiamo i dettagli



(*) è una retta di tipo (iii)

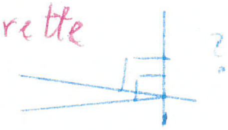
(+) vedi il capitolo sulle sezioni di Dedekind

Si ha la seguente situazione:



Lambert (1786) evidenzia la pecca di questo ragionamento

... e ciò ripugna alla natura delle linee rette (Prop. XXXIII)



Ma, di fatto, ciò è proprio quello che accade in geometria non euclidea!

Legendre si esprime in termini simili nel secolo succ.

Anticipando, ecco ciò che accade nel modello di Klein

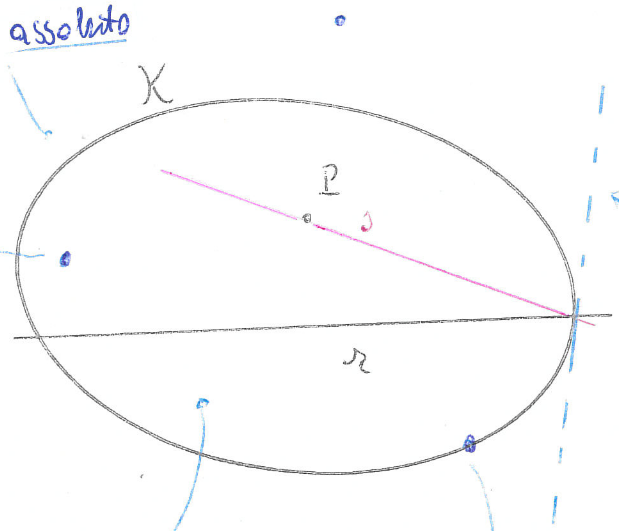
o meglio, di Beltrami-Klein

pto ideale

assoluto

conica, generale, reale, a pti reali

piano proiettivo reale



pto proprio

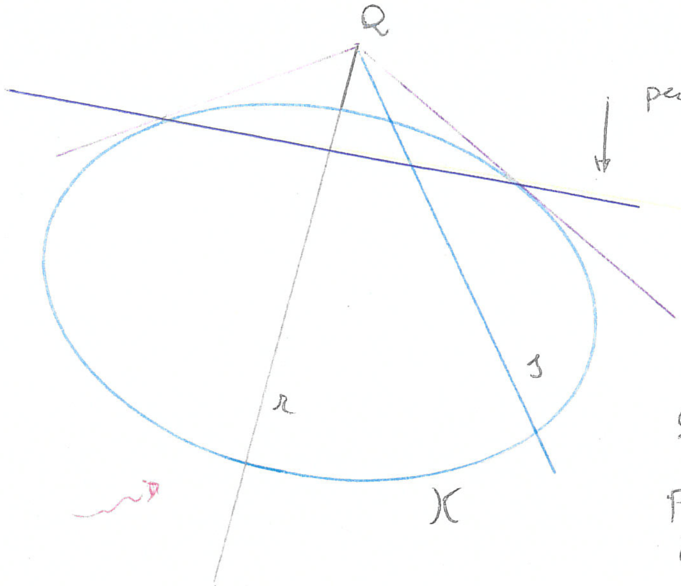
"perpendicolare" comune a r e s è una retta ideale (tangente all'assoluto K)

r e s parallele (in senso stretto)

piano iperbolico
pti interni a K
≡ pti le cui tangenti a K sono complesse coniugate

pto improprio ("all'infinito")

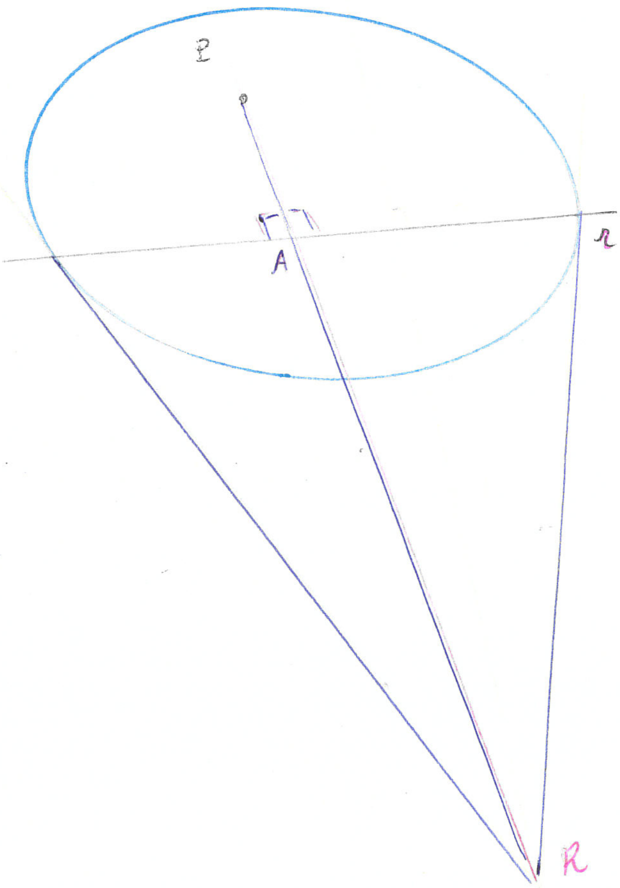
r e s
<u>ultra parallele</u>



perpendicolare comune a r e s (polare del pto ideale Q in cui concorrono r e s)

Se Q diviene un pto di K, tale retta diventa la retta tange a K in Q

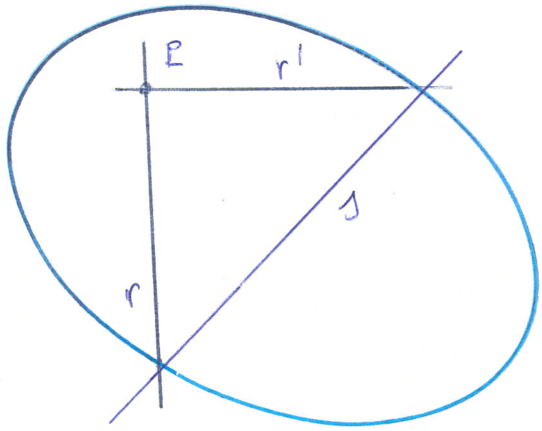
Come si trova la retta per $P \perp r$? Si trova il polo di r, R e lo si congiunge con P : PR è la retta cercata

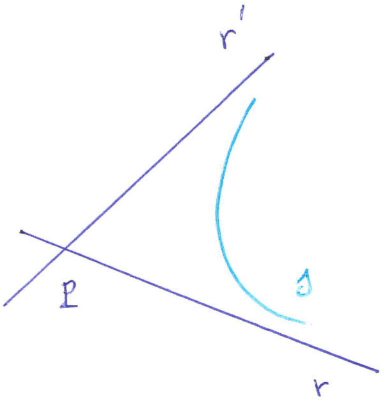


" Tutta la geometria è geometria proiettiva " (A. Cayley)

Il dilemma di Legendre

risolto





$\exists !\ s$ "parallela" a due rette incidenti (!)
(in un determinato verso)

[impossibile in geometria euclidea]