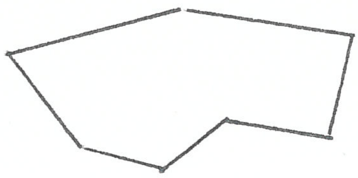
Osservazioni preliminari sulla teoria dell'estensione in Euclide (e Hilbert)

• La teoria dell'estensione (piana) in Euclide

In Euclide non troviamo una definizione formale di "area" (come "numero") e di "estensione" (concetto primitivo). In Hilbert si forniscono le due nozioni di equiscomponibilità e di equiamplicabilità

poligono semplice: nessun vertice è interno ad un lato e due lati non hanno punti in comune (oltre ad un vertice, eventualmente)

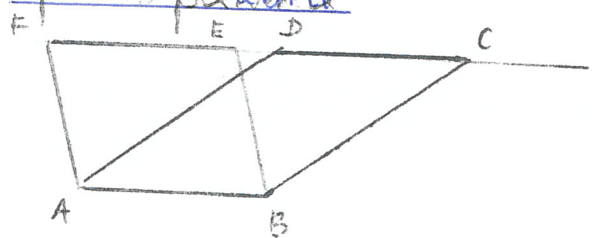


poligoni semplici:

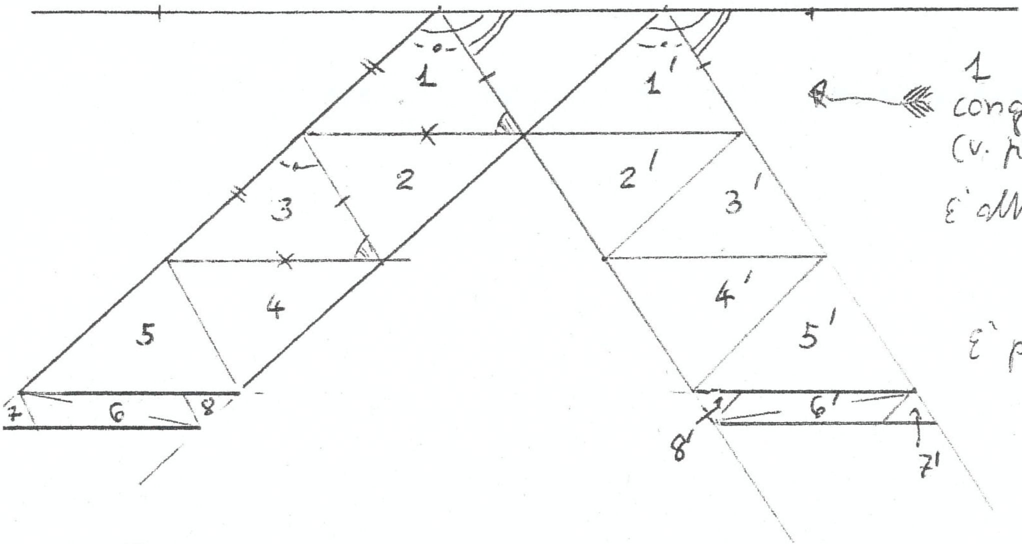
equiscomponibili: possono venire scomposti in un numero finito di triangoli a coppie congruenti tra loro.

equiamplicabili: Si può aggiungere ad essi un numero finito di poligoni a coppie equiscomponibili in modo che i poligoni risultanti siano equiscomponibili

esempio (v. poco oltre): parallelogrammi con basi e altezze uguali (i.e. compresi tra le stesse parallele) sono equiamplicabili



★ parallelogrammi con basi e altezze uguali sono equiscomponibili
v. oltre per le loro proprietà usate nell'argomentazione



1 e 1' sono congruenti (I° criterio) (v. figura) e così 2, 2' ecc.
È altresì $1 = 2 = 3 = 4 = 5$, $1 = 1'$, $5 = 5'$

È pure $7 = 7'$ ecc.

Equiscomponibilità di due parallelogrammi con la stessa base e la stessa altezza

equiscomponibilità ≡ equiampliabilità
(≡ avere la stessa area) v. oltre per i dettagli

★★★ (teorema di Bolyai - Gerwien) → È necessario utilizzare l'assioma di Archimede ★
Si veda oltre

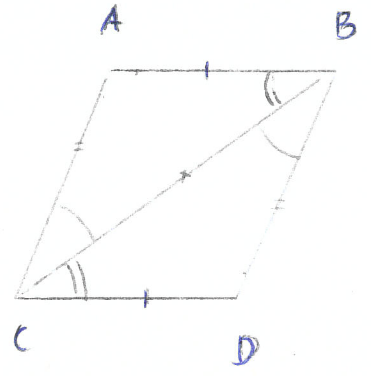
(ciò è manifesto anche nell'esempio sopra...)

dati due segmenti, esiste sempre un multiplo di uno dei due che supera l'altro

Attenzione: per i solidi il teorema di B-G è falso: esistono solidi aventi lo stesso volume ma non scomponibili in solidi a due a due congruenti.
[È in gioco il cosiddetto invariante di Dehn] ⚠

Parallelogrammi

I.33



$$AB \parallel CD \quad , AB = CD$$
$$\Rightarrow \quad AC = BD \ e \ AC \parallel BD$$

Dim. Si tracci BC.

ABC = BCD (I criterio)
congr.

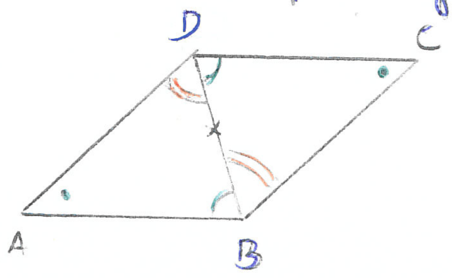
[$A\hat{B}C = B\hat{C}D$ poiché $AB \parallel CD$, $AB = CD$ per ipotesi, BC in comune]

Pertanto $AC = BD$ e $A\hat{C}B = C\hat{B}D$, da cui $AC \parallel BD$

Euclide non definisce esplicitamente il parallelogramma (quadrilatero con lati opposti paralleli) ma usa la parola liberamente (in ogni caso ne ha fornito la costruzione in I.33)

I.34

I parallelogrammi hanno lati e angoli opposti uguali e sono divisi da una diagonale in due parti uguali



L'ipotesi è $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

Da I.29 è $A\hat{D}B = B\hat{D}C$ e

$B\hat{D}C = A\hat{B}D \Rightarrow ABD = BDC$ (cong.)

per I.26 ("2° criterio")

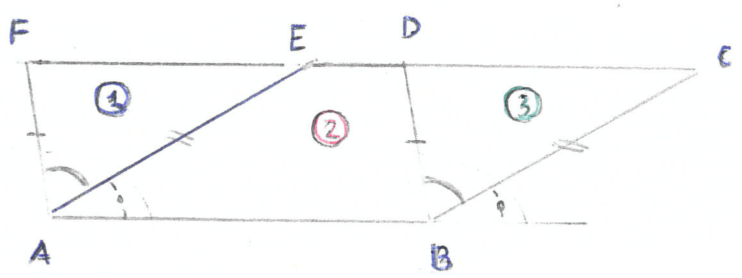
(e così $AB = DC$, $AD = BC$). È poi chiaro che $A\hat{D}C = A\hat{B}C$

I. 35

Parallelogrammi sulla stessa base e compresi fra le stesse parallele sono uguali (i.e. equivalenti, o equiestesi)

[Cf. i concetti di equiscomponibilità ed equiampliabilità nei Grundlagen v. pag VIII-1]

[equivalenti se si utilizza l'assiom. di Eudosso-Archimede]



ABDF = 1 + 2

ABCE = 2 + 3

1 = 3 poiché

AEF $\underset{cong.}{=}$ DBC (I.4)

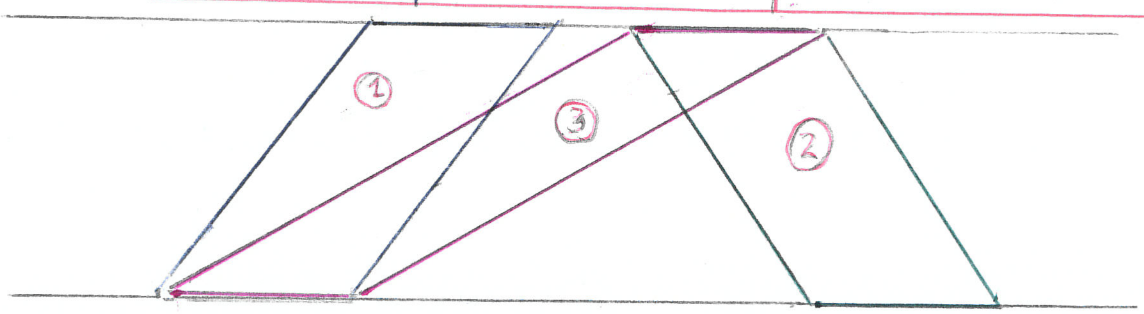
infatti AF = DB, AE = BC e $F\hat{A}E = D\hat{B}C$

(come differenza di angoli uguali)

ABDF e ABCE sono equiampliabili nella terminologia di Hilbert: ad essi si possono aggiungere poligoni congruenti (1 e 3) in modo da ottenere poligoni equiscomponibili (in questo caso il trapezio ABCF)

I. 36

Parallelogrammi su basi uguali e compresi fra le stesse parallele sono equivalenti



1 = 3, 3 = 2 (I. 35) => 1 = 3

(in estrema sintesi)

I.37 e I.38

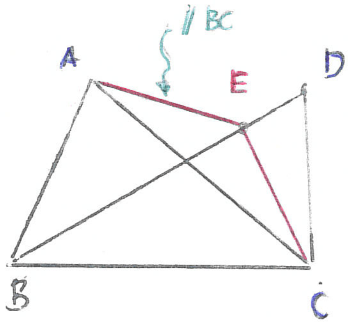
triangoli su un stessa base o su basi uguali, compresi fra le stesse parallele sono uguali (equivalenti)

un triangolo può vedersi come metà di un parallelogramma

I.39

Importante nei Grundlagen

(inverso di I.37) triangoli uguali (i.e. equivalenti) sulla stessa base e dalla stessa parte sono compresi fra le stesse parallele



Siano ABC e DBC equiestesi, sulla stessa base BC. Se AD ∦ BC, sia AE // BC. I triangoli BEC e DBC risultano allora equivalenti per I.37, ma una parte non equivale al tutto

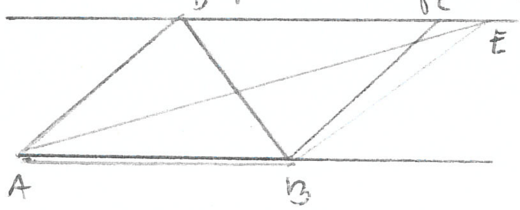
Dunque AD // BC

I.40

(inverso di I.38) triangoli uguali su basi uguali e dalla stessa parte sono compresi fra le stesse parallele.

I.41

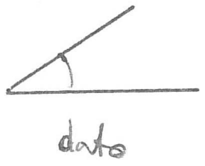
Dato un parallelogramma, ogni triangolo con base uguale ad uno dei lati di questo e compreso fra le stesse parallele è metà del parallelogramma

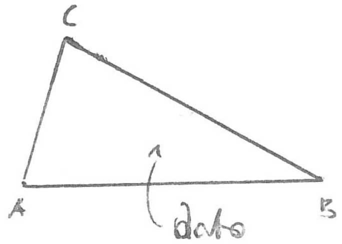


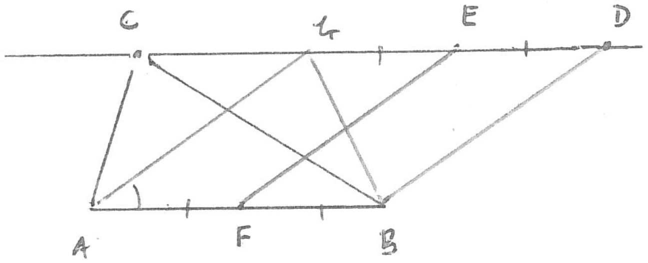
ADB è metà di ABCD. ma ABE è equivalente ad ADB e dunque è metà di ABCD

I. 42

Costruire in un dato angolo rettilineo (+) un parallelogramma uguale (equivalente) ad un triangolo dato







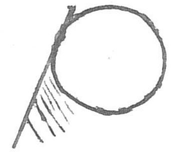
La costruzione è mostrata in figura:

Si determini $G\hat{A}B$ uguale all'angolo dato

Il triangolo ABG è equivalente ad ABC.

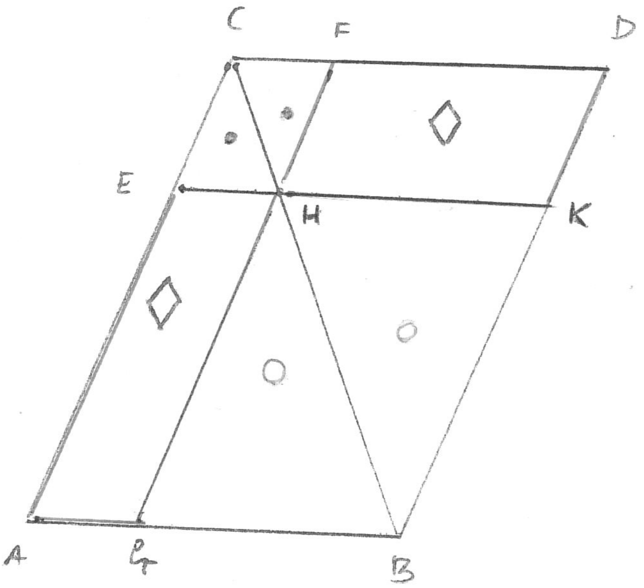
Il parallelogramma ABDG è doppio del triangolo; lo si dimezzi: i parallelogrammi AFEG e FBDE risolvono il problema.

(+) Nel libro III vengono occasionalmente utilizzati angoli curvilinei



di fatto sono grandezze non <u>archimedee</u>: Euclide prova che tra la tangente in un pto alla circonferenza non si può inserire alcuna retta.
l'angolo curvilineo è più piccolo di un qualsiasi angolo "rettilineo", ma non è nullo

I.43 "teorema dello gnomone"



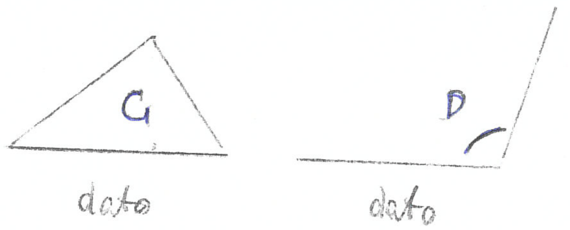
** chiave di volta della teoria dell'estensione euclidea

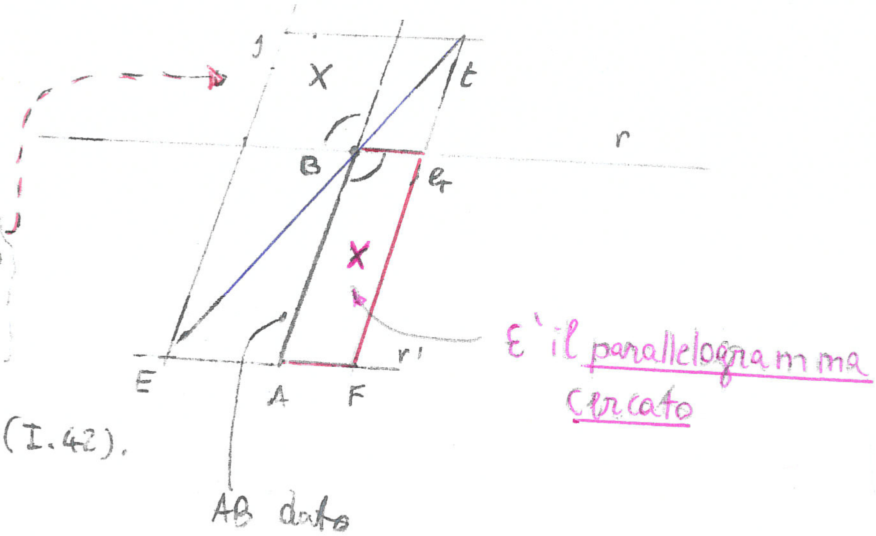
Dato il parallelogramma ABCD, se lungo la diagonale CB si rimuovono i parallelogrammi CFEH e GHKB, si ottengono parallelogrammi equivalenti [non necessariamente congruenti] EHGA e FHKD.

Infatti, i parallelogrammi cercati si ottengono rimuovendo dai triangoli congruenti ABC e CDB triangoli rispettivamente congruenti CEH, CFH e HGB e HKB.

I.44 (Costruzione fondamentale della teoria dell'estensione in Euclide)

"Applicare ad una retta data, in un angolo rettilineo dato, un parallelogramma uguale ad un triangolo dato"





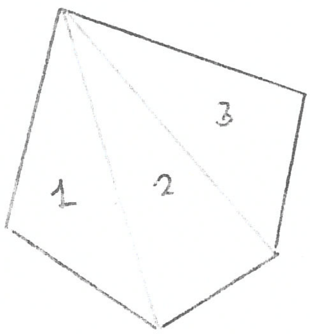
Sul prolungamento di AB dalla parte di B, si ricostruisce l'angolo D e si determina un parallelogramma X equivalente a G (I.42).
Si completa poi la costruzione, giungendo al parallelogramma AFGB = X (I.43) che risulterà equivalente a C, con un angolo e un lato prefissati.

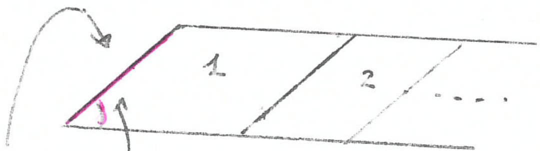
I.45

Costruire un parallelogramma uguale ad una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo

(un poligono arbitrario è equivalente ad un parallelogramma con un lato e un angolo prefissati, in particolare, è equivalente ad un rettangolo con un lato prefissato

Basta iterare la costruzione precedente



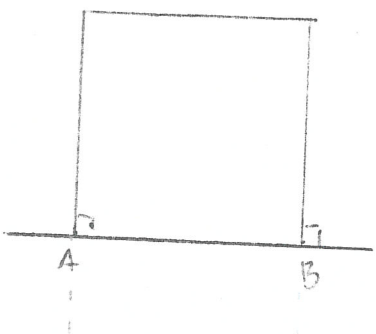


fissati

I.46

"Descrivere un quadrato su una retta data"

La costruzione (assieme alle sue varianti) è classica: dagli estremi del segmento dato si innalzano le perpendicolari ad esso, sulle quali (dalla stessa parte) si individuano due segmenti uguali al lato



I · 47

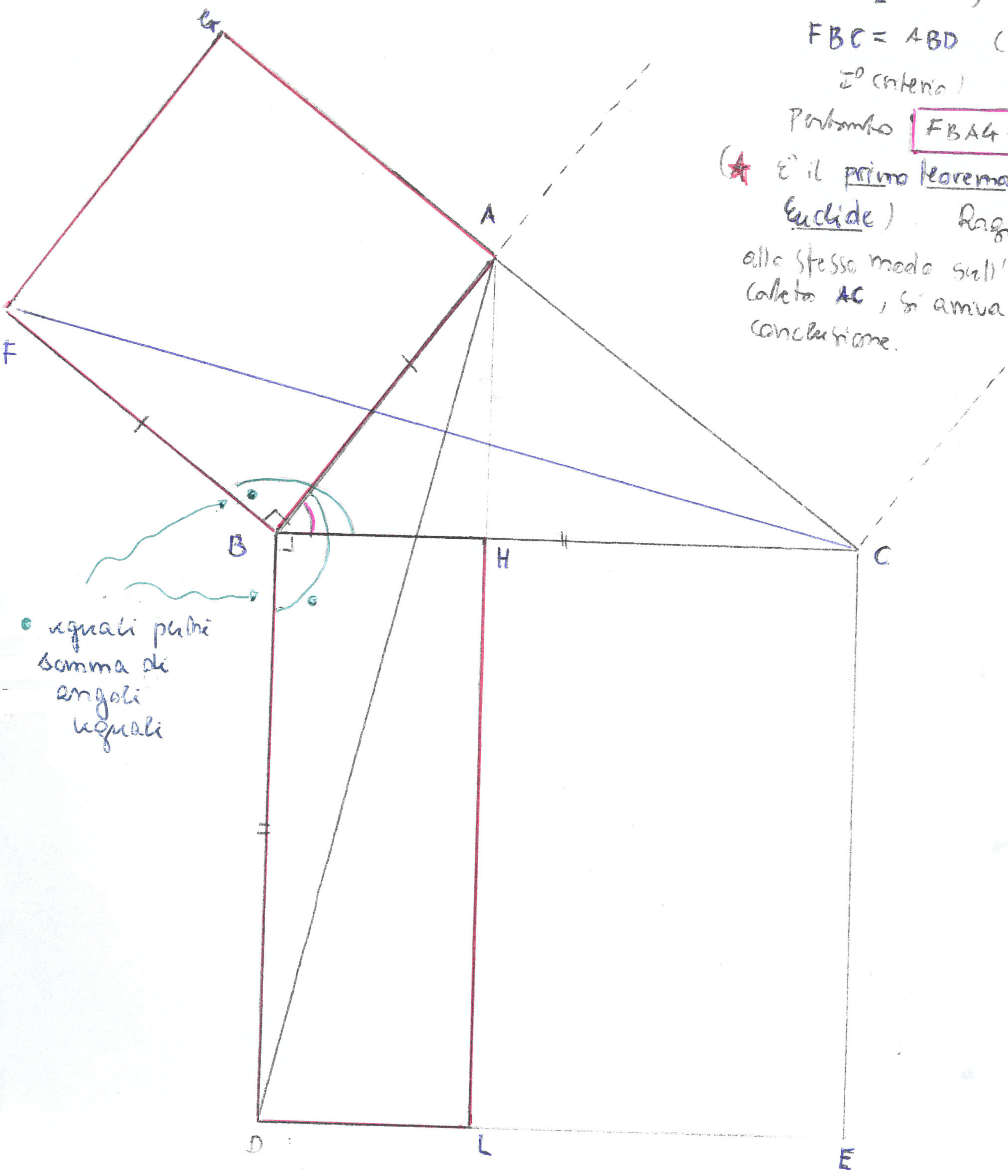
"Teorema di Pitagora"

Il quadrato costruito sull'*ipotenusa* di un triangolo rettangolo è equivalente alla "somma" dei quadrati costruiti sui *cateti*.

Dim.
Con riferimento alla figura, $FBC = \frac{1}{2} FBAG$ (I.35 e seg.) e così $ABD = \frac{1}{2} BDLH$; ma $FBC = ABD$ (congr. I° criterio)

Pertanto $\boxed{FBAG = BHDL}$

(★ È il *primo teorema di Euclide*) Ragionando allo stesso modo sull'altro cateto **AC**, si arriva alla conclusione.



• uguali perchè somma di angoli uguali

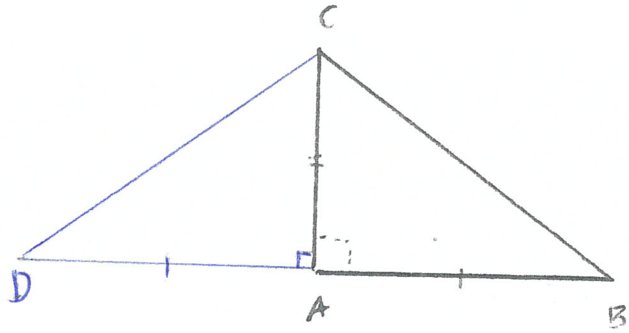
I.48

★ Inverso del teorema di Pitagora

Se in un triangolo vale la "relazione pitagorica" (il quadrato su uno dei lati è equivalente alla somma dei quadrati sugli altri due lati), allora è rettangolo

Cruciale nelle applicazioni: (Squadre "da cantiere", "corda egiziana" ecc.)

Sia $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Si costruisca il triangolo rettangolo ADC, con $AD = AB$.



Allora (I.47)

$AD^2 + AC^2 = DC^2$

ovvero

$AB^2 + AC^2 = DC^2 = BC^2$, per ipotesi, ossia

$CB = CD$

Pertanto ABC e ACD sono congruenti (III criterio)

Sicché $B\hat{A}C$ è retto.