V2

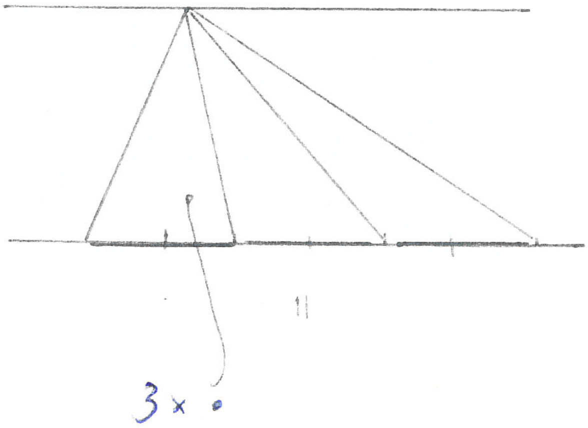
Il VI libro di Euclide

Teorema di Talete e applicazioni

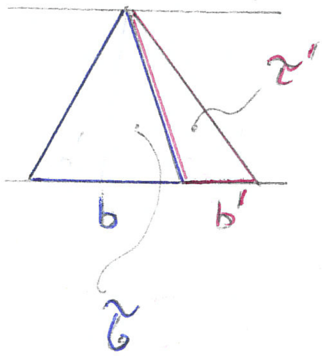
VI.1 Triangoli e parallelogrammi che abbiano la stessa altezza (i.e. compresi fra le stesse parallele) stanno fra loro come le rispettive basi

Dim (per i triangoli)

Osserviamo che, per I.38/I.39 le basi sono uguali $\Leftrightarrow$ i triangoli sono equivalenti



e che, se $b > b'$, $\tau > \tau'$ (v. figura) (e viceversa)



grandezze archimedee

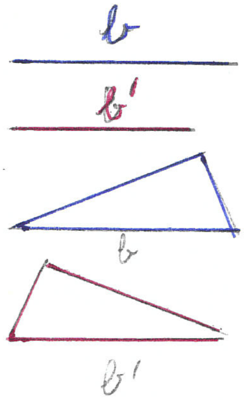
Sia allora

A =

B =

C =

D =



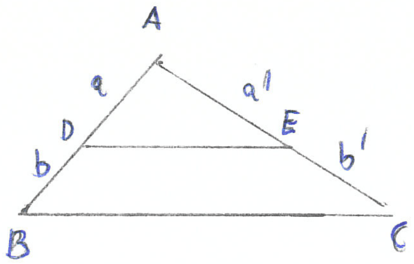
A, B omogenee

C, D omogenee

Risulta allora ! $nA \gtreqless mB \Leftrightarrow nC \gtreqless mD$ (basta $\Rightarrow$)

☆ ovvero $\boxed{\frac{A}{B} = \frac{C}{D}}$ notare l'efficacia operativa della definizione di proporzione!

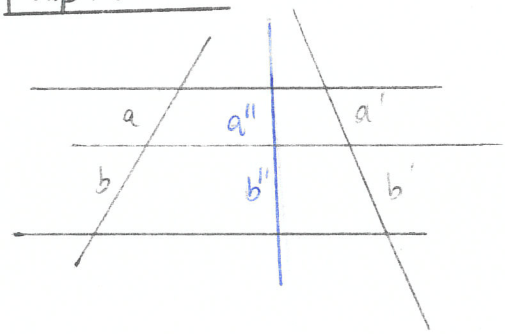
$\boxed{\text{VI. 2}}$ (a) "Teorema di Talete" diretto



Se $DE \parallel BC$, è $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

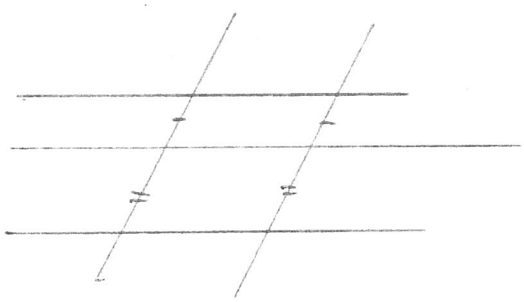
$\left(\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}\right)$

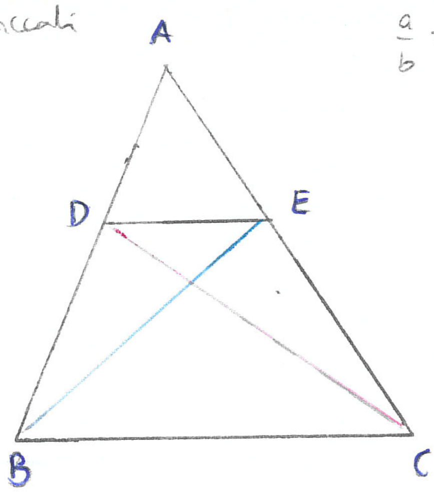
rette **parallele** tagliate da **due trasversali** staccano su queste segmenti risp. **proporzionali**



Nota: è sufficiente dimostrare il teorema nel caso in cui le trasversali **non siano parallele**, altrimenti il teorema è ovvio (vengono staccati segmenti risp. **congruenti**)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \left(= \dfrac{a''}{b''}\right)$ ecc.





Dim. con rif. alla figura $BDE \underset{\text{equiv.}}{=} DEC$ (I.38: triangoli sulla **stessa base** DE compresi tra le **parallele** DE e BC)

Sia ADE visto come **terza grandezza** $\left(A = B \iff \dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C} \right)$

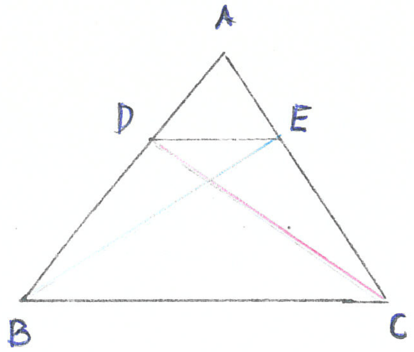
v libro

Si ha:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{BDE}{ADE} & = & \dfrac{DEC}{ADE} \\ \text{VI.1}\ \| & & \|\ \text{VI.1} \\ \dfrac{BD}{AD} & & \dfrac{EC}{AE} \end{array} \Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{EC}{AE}$$

ovvero l'asserto

VI.2 (b) inverso del teorema di Talete



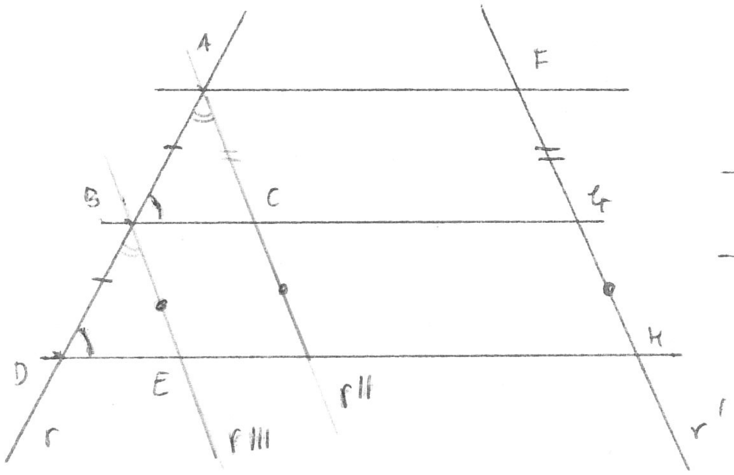
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

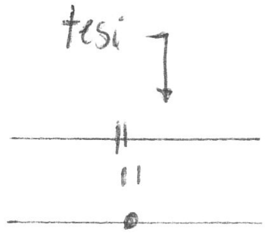
$\Rightarrow$ $BC \parallel DE$

Dall'ipotesi si ha (VI.1) $\dfrac{ADE}{BDE} = \dfrac{ADE}{EDC}$

$\Rightarrow$ $BDE \underset{\text{equiv}}{=} DEC$. Questi triangoli sono posti sulla stessa base DE e dalla stessa parte di questa. Dunque (I.39) sono compresi tra le stesse parallele.

Variante (cf. ed. Enriques-Amaldi)



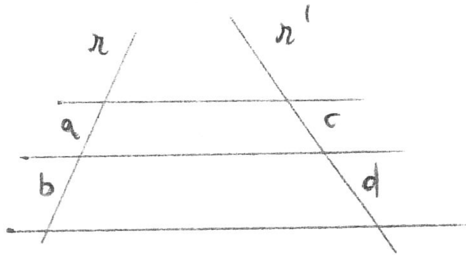


i.e., a segmenti uguali su r corrispondono segmenti uguali su r' (e quindi, si conservano le disuguaglianze

$a > b$ su $r \Rightarrow a' > b'$ su r'

Tracciate r'' e r''' parallele a r', si vede subito che i triangoli ABC e BDE sono congruenti (2° criterio).

e pertanto $AC = BE$ e così $FG = GH$.



Allora, prendendo come grandezze A, B i segmenti staccati su r, C, D i segmenti su r'

si ha, per quanto appena visto

$$m\overset{a}{A} \substack{\geq \\ <} n\overset{b}{B}$$

$$\Leftrightarrow m\underset{c}{C} \substack{\geq \\ <} n\underset{d}{D}$$

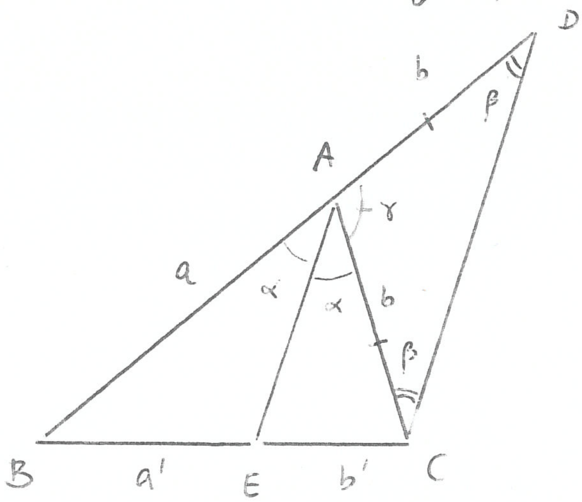
(di nuovo il V libro)

ovvero $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Analogamente si prova l'inverso.

$\boxed{\text{VI. 3}}$

(Nuova costruzione della bisettrice di un angolo)



AE biseca $B\hat{A}C$

$$\iff \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

$(\Rightarrow)$ Con riferimento alla figura sia $AD = AC$. Ciò fornisce $A\hat{C}D = A\hat{D}C \; (= \beta)$. Ma $2\alpha + \gamma = \pi$ $= 2\beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow AE \parallel DC$ e, per Talete, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$

$(\Leftarrow)$ da $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ segue $AE \parallel DC \Rightarrow \underbrace{E\hat{A}C}_{\alpha} = \underbrace{A\hat{C}D}_{\beta}$

Ma $B\hat{A}C + \gamma = 2\beta + \gamma = \pi \Rightarrow B\hat{A}C = 2\beta = 2\alpha$

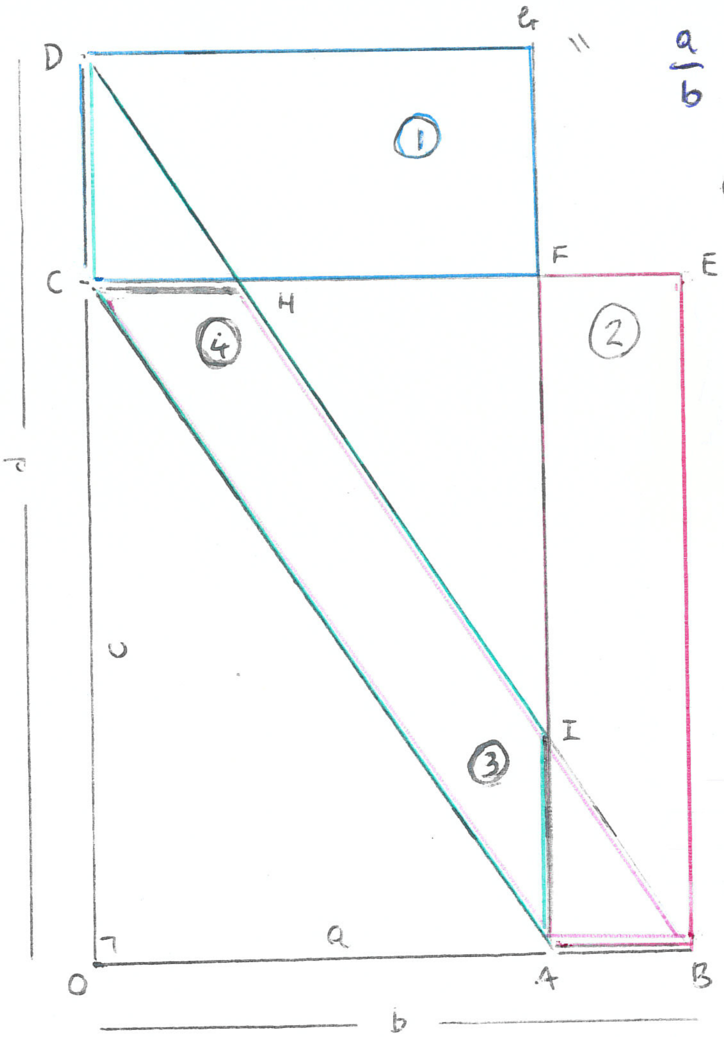
$\Rightarrow B\hat{A}E = E\hat{A}C$.

Questo risultato consente di costruire agevolmente la bisettrice di un angolo ($\hat{A}$). Costruito infatti ABC arbitrario si prolunghi BA in D con $AD = AC$. Sia poi AE la parallela per A a DC: essa è la bisettrice richiesta.

☆ $\boxed{\text{VI. 16}}$ (teorema "ponte" tra il I e il VI libro)

"prodotto dei medi = prodotto degli estremi"

"rettangolo dei medi = rettangolo degli estremi"



" $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \underbrace{ad}_{\text{r. d. estremi}} = \underbrace{bc}_{\text{r. dei medi}}$ "

($\Rightarrow$) È sufficiente dimostrare che i rettangoli CFGD (1) e ABEF (2) sono equivalenti, poiché, aggiunti al rettangolo OAFC, danno luogo al rettangolo degli estremi e dei medi, rispettivamente.

Ora, (1) è equivalente al parallelogramma DCAI (3) (stessa base DC, compresi fra le stesse parallele)

e quest'ultimo è equivalente al parallelogramma CHBA (4) (stessa base AC, compresi fra le stesse parallele). Ma (4) è equivalente a (2) (stessa base AB, compresi fra le stesse parallele

Dunque (1) $\underset{eq.}{=}$ (3) $\underset{eq.}{=}$ (4) $\underset{eq.}{=}$ (2)

($\Leftarrow$) viceversa, se date quattro grandezze (segmenti) (omogenee), a, b, c, d, se il rettangolo formato da a e d è equivalente al rettangolo formato da b e c, i.e. $ad = bc$, allora esse sono in proporzione $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Procediamo per assurdo:

se $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ sia per esempio $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

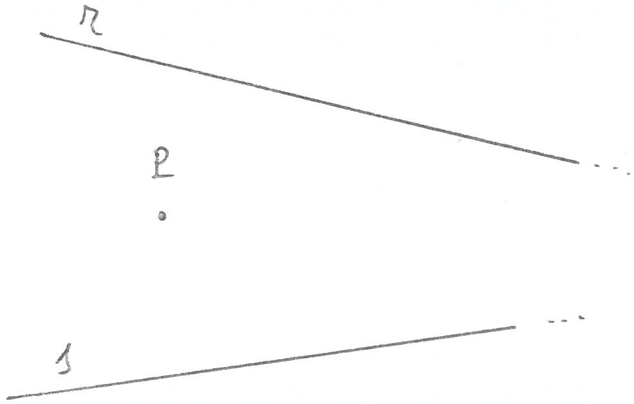
Allora si avrà (V.18) ★ $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ $(\Rightarrow x < d)$

e $ax = bc \underset{\text{ipotesi}}{=} ad$. Ma $ax = ad$

fornisce $x = d$, assurdo. Stesso ragionamento

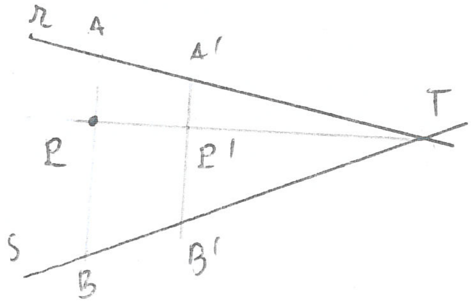
se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Pertanto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

☆ Problemi vari



① Determinare la retta per P passante per T, intersezione di r e s, supposto inaccessibile

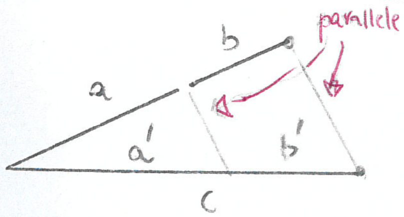
Analisi



Immaginando il problema risolto, sia data una retta per P, che incontri r in A e s in B.
Sia A'B' un'arbitraria retta // AB, e incontri PT in P'
ci si convince rapidamente che

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}.$$

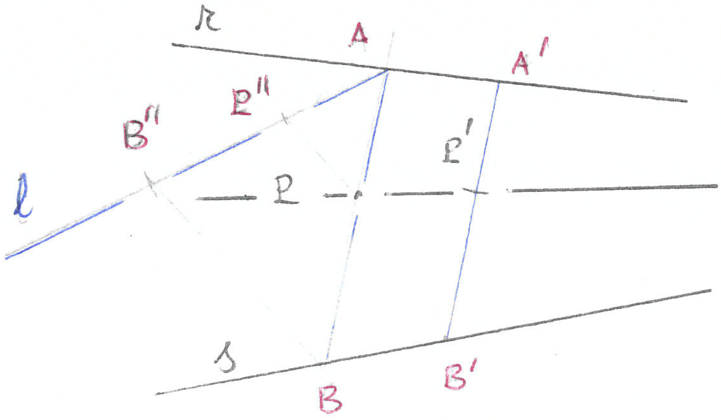
P' è allora il punto che divide A'B' in parti proporzionali ad AP, PB



c è diviso in parti prop. ad a, b

Sintesi

intersezione inaccessibile



l: retta per A

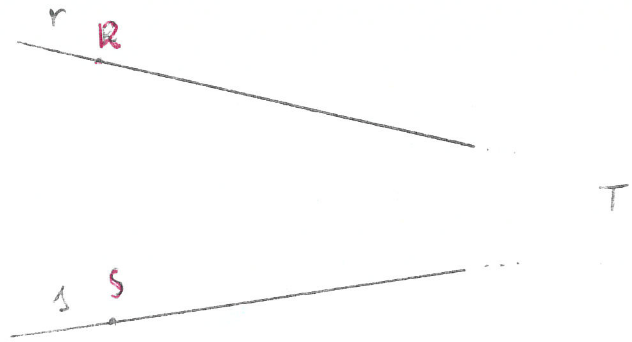
$AB'' = A'B'$

si congiunga B'' con B

e sia $PP'' \parallel B''B$

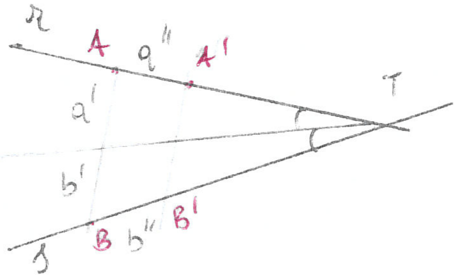
si riporti su $A'B'$ AP'', si ottiene P', che è un altro p.to della retta cercata (cf. l'analisi precedente), che risulta così individuata

(Analoga costruzione se P si trova dalla parte opposta di A rispetto a B



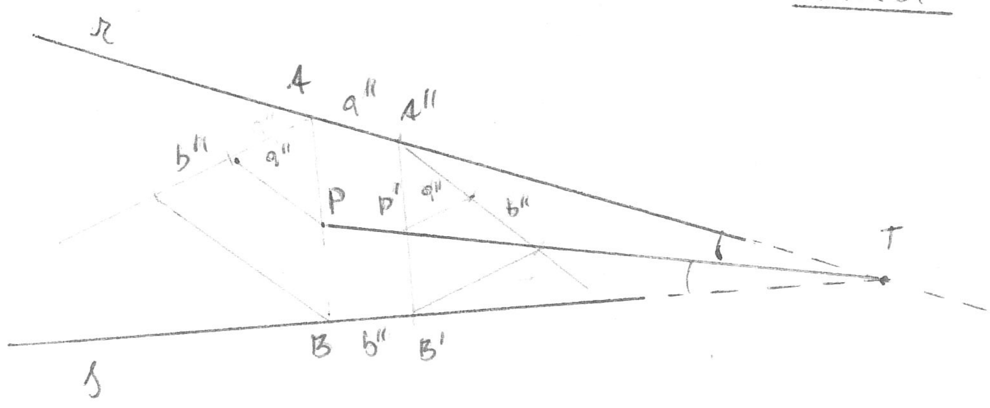
② bisecare l'angolo $R\hat{T}S$, con T inaccessibile

Analisi



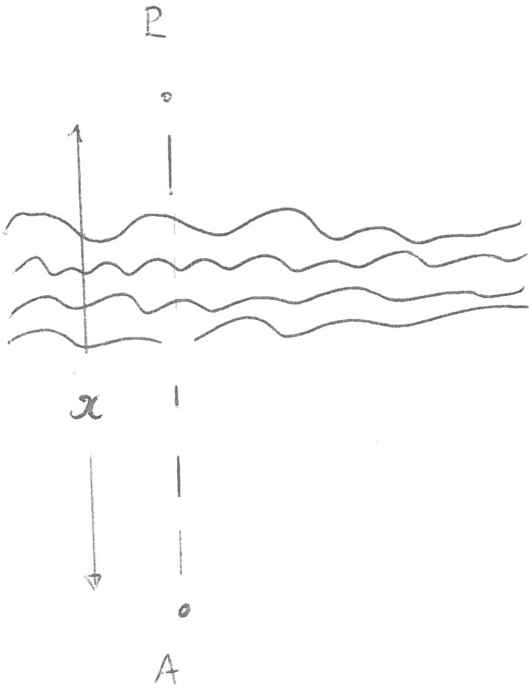
si trova subito $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$

Sintesi

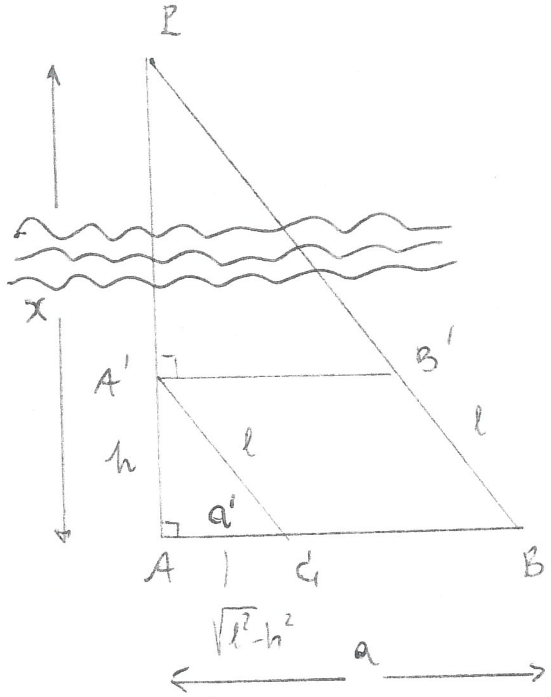


Tracciate $AB \parallel A'B'$ (arbitrarie) si dividano AB e $A'B'$ in parti proporzionali ad a'', b'', individuando P e P': la retta PP', in virtù dei risultati precedenti, passa per T ed è la bisettrice cercata.

③



Determinare $x = AP$ (P inaccessibile)



Si può procedere ad esempio così.

[in generale, problemi di questo tipo si risolvono con l'ausilio di un <u>teodolite</u>, tramite il <u>teorema dei seni</u>]

i triangoli rettangoli $A'B'P$, ABP, ACA' sono simili, sicché

$$\frac{x}{h} = \frac{a}{a'}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{ah}{a'}$$

misurabile